Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica

La filosofía matemática de David Hilbert y Kurt Gödel

Tesis que presenta

Carlos Torres Alcaraz

para obtener el grado de Doctor en Filosofía

Facultad de Filosofía y Letras

Universidad Nacional Autónoma de México

2001



1.2.5 La consistencia de las geometrías no euclidianas
1.3 Un cambio en el concepto: la axiomática formal
1.3.1 La axiomática de Hilbert
1.3.2 El concepto de teoría axiomática formal
1.3.3 Propiedades de las teorías axiomáticas
1.4 El problema de la consistencia de la geometría euclidiana
1.5 Hilbert y el pensamiento axiomático
1.5.1 El marco teórico de los Grundlagen
1.5.2 Un ejemplo de análisis lógico
1.5.3 El significado de las teorías axiomáticas
1.5.4 Consistencia y existencia matemática

2. La matemática moderna y la teoría de conjuntos

2.1 La matemática moderna
2.2 La liberación del álgebra
2.2.1 El álgebra de Boole
2.2.2 Los cuaterniones de Hamilton

RESUMEN EN ESPAÑOL
Alumnos de maestría y doctorado

Resumen de la tesis:

(maximo 250 palabras)

El siglo XX testimonió diversos intentos por darle un fundamento a la matemática, entre los que destaca el Programa de Hilbert. La plena realización de este programa daría respuesta a las preguntas por la naturaleza de la matemática y la validez de sus métodos, que ahora se servían libremente del infinito actual, noción rechazada por otras tendencias.
El programa de Hilbert se presenta como una tentativa de responder a ciertas cuestiones filosóficas, todas ellas relativas a los fundamentos de la matemática, resolviendo ciertos problemas matemáticos precisos. La tesis se centra en la formación y desarrollo del programa junto con un análisis de los supuestos filosóficos fundamentales que Hilbert adopta, y en la crítica que a partir de los teoremas limitativos de Kurt Gödel se puede establecer del nominalismo extremo. La conclusión a la que se llega es que la matemática no es susceptible de una racionalización completa, y que el problema de sus fundamentos quedará como un problema abierto en el futuro previsible. En particular, la noción de verdad en matemáticas se presenta como algo muy cercano a los ideales de la razón pura kantianos, que sirven como principios reguladores de la razón práctica. Esta postura es solidaria con la tesis de que la matemática es una actividad tan cercana al arte como a la ciencia, y que como tal se trata de una forma de pensamiento esencialmente creativa.

RESUMEN EN INGLES
Alumnos de doctorado

Resumen de la tesis:

(maximo 250 palabras)

The twentieth century testified diverse attempts to give a foundation to mathematics, among them Hilbert's Program. The fulfillment of the program would have given an answer to the questions about the nature of mathematics and the soundness of it's methods, which made free use of the actual infinite, a notion rejected by other trends.
Hilbert's Program is presented as an attempt to answer certain philosophical questions, all of them related

	to the foundations of mathematics, solving certain mathematical problems. The thesis centers in the construction and development of the program and is accompanied by an analysis of the fundamental philosophical assumptions that Hilbert adopts and undertakes a critique to the extreme nominalism with the support of Gödel's theorems. One conclusion is that mathematics is not capable of complete rationalization, and that the question of it's foundations will remain as an open problem in the foreseeable future. Particularly, the notion of truth in mathematics is presented as something closely related to the kantian's ideals of pure reason, that serve as regulative principles of practical reason. This position is in common cause with the thesis that mathematics is an activity as close to art as to science, and that as such mathematical thinking is essentially creative.
Palabras clave:	**1.** Fundamentos **2.** Teoremas limitativos **3.** Hilbert, Gödel

Parte VII. MANIFESTACIÓN DE VERACIDAD

Declaro que la información proporcionada es veraz.
Agradezco se le de continuidad a mi solicitud de fecha de examen de grado.

Enviar Datos   Borrar Datos



A Raquel y Ricardo,
a Teresa,
a mi padre, el "abuelo Ricardo"

A la memoria de mi hermano Ricardo
y de Santiago Ramírez

Índice

Preámbulo i
Introducción iii

1 El desarrollo del método axiomático

1.1 La axiomática en la antigua Grecia 1
1.1.1 Génesis del método axiomático 1
1.1.2 Los *Elementos* de Euclides 4
1.1.3 El concepto de teoría axiomática intuitiva 9
1.2 Las geometrías no euclidianas 11
1.2.1 El problema del quinto postulado 11
1.2.2 El advenimiento de las nuevas geometrías 15
1.2.3 La consistencia de las geometrías no euclidianas 18
1.3 Un cambio en el concepto: la axiomática formal 22
1.3.1 La axiomática de Hilbert 22
1.3.2 El concepto de teoría axiomática formal 33
1.3.3 Propiedades de las teorías axiomáticas 34
1.4 El problema de la consistencia de la geometría euclidiana 38
1.5 Hilbert y el pensamiento axiomático 45
1.5.1 El marco teórico de los *Grundlagen* 43
1.5.2 Un ejemplo de análisis lógico 46
1.5.3 El significado de las teorías axiomáticas 48
1.5.4 Consistencia y existencia matemática 51

2. La matemática moderna y la teoría de conjuntos

2.1 La matemática moderna 55
2.2 La liberación del álgebra 57
2.2.1 El álgebra de Boole 58
2.2.2 Los cuaterniones de Hamilton 60
2.3 La teoría de grupos y el programa de Erlangen 66
2.4 La matemática moderna en la física 72
2.5 La aritmetización del análisis 75
2.6 La teoría de conjuntos 79
2.6.1 El concepto de infinito en la teoría de conjuntos 80
2.6.2 Conjuntos, funciones, relaciones y estructuras abstractas 81
2.6.3 Los comienzos de la teoría cantoriana: conjuntos de números 83
2.6.4 La hipótesis del continuo 87
2.6.5 El axioma de elección 91
2.6.6 Dos comentarios y un epílogo 95

3. El programa de Hilbert

3.1 El problema de los fundamentos 99
3.1.1 Situación del problema a principios del siglo veinte 100
3.1.2 Las antinomias 101
3.1.3 La propuesta de 1904 109
3.2 El logicismo de Russell y Whitehead 115
3.3 El intuicionismo de Brouwer 121
3.3.1 El principio del tercero excluido 123
3.3.2 Comentarios generales 128
3.4 La naturaleza de la matemática clásica según Hilbert 134
3.4.1 La naturaleza, el entendimiento y el infinito 135
3.4.2 El infinito en la matemática 137
3.4.3 La matemática clásica 138
3.4.4 Un cambio en el punto de vista 146
3.5 La intuición del signo 150
3.6 El programa de Hilbert 158
3.6.1 La formalización 158
3.6.2 Posibilidad de una prueba finitista de consistencia 160
3.6.3 La teoría de la demostración 168
3.6.4 La completud de los axiomas de la aritmética y el problema de la decisión 173
3.6.5 El programa: un resumen 181
3.6.6 Comentarios 184

4. Gödel

4.1 El espíritu de una época: verdad y demostrabilidad 189
4.1.1 La introducción de 1929 189
4.1.2 El espíritu de la época 194
4.2 Los teoremas de Gödel 197
4.2.1 El camino hacia el descubrimiento 198
4.2.2 La prueba heurística 201
4.2.3 Comentarios 207
4.3 Consecuencias para el programa 211
4.3.1 La cuestión de la completud 212
4.3.2 La cuestión de la consistencia 215
4.3.3 Gentzen *et al* 218
4.4 Consecuencias filosóficas de los teoremas de Gödel 222
4.4.1 Algoritmos, sistemas formales y máquinas de Turing 222
4.4.2 Filosofía de la mente 226
4.4.3 ¿Es la matemática una libre creación del espíritu humano? 231
4.4.4 Crítica al nominalismo y al positivismo lógico 236
4.4.5 Salvaguarda del realismo 240

5. Conclusiones

5.1 Hilbert: un balance 245
5.2 La cuestión de los fundamentos 250
5.3 Conclusiones generales 255

Referencias Bibliográficas 261

Apéndices 275 y ss.

Preámbulo

Una explicación nada literaria que, además, no explica nada

Hay un cuento de Augusto Monterroso que nunca dejará de sorprenderme. Creo que no tiene nombre, pues si lo tuviera sería más largo que él. Cabe en medio renglón:

Cuando despertó, el dinosaurio todavía estaba allí.[1]

No sé si el señor Monterroso estará satisfecho con la narración, o si pensará en reducirla aún más, pero eso no importa: como está, lo dice todo sin decir nada a la vez. ¿Quién despertó?, ¿por qué durmió?, ¿qué representa el dinosaurio?, ¿llegamos tarde al relato y sólo escuchamos la parte final?, ¿a qué extraña historia pone punto final tal acotación? Pensando en todas estas interrogantes, y en busca de una inexistente explicación del cuento-oración, llegué a dos conclusiones: 1) que el autor nos deja en libertad de poner todo cuanto calla, y 2) que una indiscutible lectura es la siguiente: un individuo, asediado y sin saber cómo escapar de su desventura, echó a dormir con la esperanza de que al despertar, la causa de su infortunio hubiera desaparecido.

Como entonces yo escribía este trabajo, pensé que el personaje sería Hilbert y el dinosaurio los teoremas de Gödel, e hice con estos protagonistas una variante nada literaria y totalmente personalizada del cuento (por lo que de antemano pido una disculpa al señor Monterroso):

Cuando despertó, los teoremas de Gödel todavía estaban allí.

Esta libre traslación del relato me agrada no porque sea buena literatura, sino porque me permite llegar sin más explicaciones al nudo gordiano de este trabajo: al derrumbe de un proyecto bastardo, mitad matemáticas, mitad filosofía. Y como aquí de lo que se trata es de un trabajo académico y no de literatura, ahora debo explicar qué fue lo que sucedió antes del "Cuando" y después del "Cuando", es decir, ¿por qué en mi fantasía Hilbert decidió dormir para ver si así desaparecía el dinosaurio, y por qué deseaba su desaparición. Esto, obviamente, en cientos de páginas y no en media línea, como el prodigioso Sr. Monterroso lo podría haber hecho.

---

[1] Para mi asombro, después de escribir estas líneas me enteré que el cuento sí tiene nombre, y que es más corto que él. Se llama *El dinosaurio*. Esto es, al menos, lo que una culta dama me dijo.

Introducción

La matemática es un tema que ha acompañado a la filosofía a lo largo de su historia. ¿No fueron también grandes matemáticos algunos de los filósofos más ilustres, como Descartes, Pascal y Leibniz? Otros filósofos como Platón, Kant, Comte y Husserl, ¿no poseyeron una extensa cultura matemática que repercutió en su pensamiento filosófico? Los pitagóricos consideraron la matemática como *la* ciencia, y esta concepción ejerció una influencia considerable tanto en el mundo antiguo como en la edad moderna. Recordemos, por ejemplo, el lugar que otorga Platón a la geometría como conocimiento estable y permanente de formas universales, y la importancia que le confiere en el conocimiento de la naturaleza, resumida admirablemente en la frase "Dios siempre geometriza". En la edad moderna podemos reconocer una idea semejante en la afirmación de Galileo de que el gran libro del universo está escrito en caracteres matemáticos, o advertir la importancia que Kant le atribuye a esta disciplina cuando afirma que «en toda teoría particular de la naturaleza no podrá encontrarse ciencia en sentido propio, más que en la medida en que pueda encontrase matemática en ella.».[1]

¿Por qué la matemática ha atraído tan poderosamente la atención de la filosofía? No es por su importancia en la vida humana. La agricultura es igualmente importante, pero no hay una filosofía de la agronomía. Más bien, la causa son ciertos problemas característicos de la matemática y que la filosofía ha podido articular de manera precisa. ¿De qué trata esta ciencia?, ¿cuál es la naturaleza de los entes matemáticos?, ¿qué relación guarda la matemática con las otras disciplinas científicas?, ¿cuál es su vínculo con la realidad?, ¿cómo es posible que la matemática, ciencia abstracta que supuestamente nada toma de la experiencia, sea un elemento clave en la comprensión de la naturaleza? La filosofía está llena de intentos por aclarar esa extraña alianza de virtudes de que hace gala la matemática, que reúne en un solo arte la infalibilidad de la lógica formal y la capacidad de expresar y anunciar en su lenguaje lo real, como si participara de dos naturalezas distintas: por una parte, ciencia exacta e infalible en sus conclusiones; por la otra, lenguaje versátil y sutil, capaz de amoldarse a nuestra experiencia.

Obviamente, un poder tan sorprendente no podía dejar de suscitar numerosas tentativas de explicación. A lo largo de la historia, la filosofía ha propuesto diversas concepciones acerca de la naturaleza de la matemática a partir de las cuales se han derivado criterios acerca de lo que son sus objetos, sus métodos, la verdad de sus conclusiones y su relación con lo "real". Con el tiempo esta racionalidad filosófica se ha transformado y, a su vez, ha sido objeto de

[1] Kant, 1786. Cita tomada de la traducción al español, p. 102.

críticas surgidas desde el quehacer matemático. Por ejemplo, a partir del desarrollo de las geometrías no euclidianas la noción de espacio absoluto de Kant resulta insostenible. Al erigir otras geometrías que la euclidiana, la matemática ha mostrado la posibilidad de postular nuevos espacios mediante otros conceptos, reivindicando con ello la libertad de que goza para determinar su objeto de estudio.[2]

La voluntad de someter la razón filosófica al juicio de la matemática adquirió plenos derechos en el siglo veinte, en el que los casos se multiplican. Tenemos por ejemplo a Jean Cavaillès, quien sostiene que el vínculo tradicional entre la matemática y la filosofía se debe invertir. Ya no se trata de exhibir la matemática como una disciplina o forma de conocimiento en donde se confirman o reproducen ciertos supuestos filosóficos acerca de la existencia, la verdad y el método. Por el contrario, considera que esta postura es insostenible y se debe transformar, dando lugar a una filosofía matemática, una filosofía que escuche a la matemática y la siga atentamente en su desarrollo.

Un caso extremo de esta nueva actitud lo tenemos en David Hilbert y Kurt Gödel. Hacia 1920 Hilbert elaboró un programa a fin de responder ciertas cuestiones filosóficas, relativas a los fundamentos de la matemática, resolviendo problemas matemáticos precisos. Su intención era dar un fundamento *matemático* a esta disciplina, recurriendo para ello a un número muy reducido de supuestos filosóficos, extraídos de la práctica matemática misma. La apuesta de Hilbert *—la matemática es capaz de dar cuenta de su propio fundamento—* presupone un cambio en la relación entre la matemática y la filosofía, en el que esta última adopta una postura no impositiva sino consultante, que basa sus conclusiones en la propia matemática. Por su parte Gödel, defensor del platonismo en matemáticas, no sólo opuso al proyecto de Hilbert objeciones de corte filosófico, sino que, actuando de la misma manera, emprendió una investigación matemática del problema, hasta concluir con una negativa basada esta vez en dos teoremas de su creación.[3]

Podemos decir que la aparición de la filosofía de la matemática como disciplina autónoma fue una consecuencia de los cambios ocurridos en la matemática en el siglo diecinueve y de esta naciente actitud. Un problema que trajo consigo este estudio tan especializado fue que

---

[2] Al respecto, encontramos de interés el siguiente pasaje, debido a Santiago Ramírez: «Ante la afirmación de que el espacio físico (de Newton) es euclidiano, las matemáticas responderían que ellas están hablando de un espacio que no es aquel en donde tienen lugar los fenómenos físicos, *con lo cual estaría estableciendo, con el mismo derecho y la misma legitimidad que la física*, la existencia de un espacio propiamente *matemático*. Al mismo tiempo, no estarían imponiendo a la física una idea de espacio contradictoria con la que la explicación del mundo de la física hace necesaria. En todo caso, las matemáticas funcionarían como una crítica de la noción de espacio newtoniano, que ulteriormente habría de servir de fundamento matemático para las nuevas teorías físicas.». Cita tomada de Ramírez, 1990, p. 420.

[3] De hecho, la necesidad de apoyarse en resultados matemáticos concretos para la discusión filosófica no se hizo evidente sino hasta la aparición de la teoría de la demostración de Hilbert, en los años veinte.

su desarrollo se dio en estrecha dependencia con métodos y técnicas que dificultan su comprensión. En particular, la crítica a la razón filosófica surgida de este quehacer no siempre se enuncia en términos cercanos a la filosofía, sino que por lo general se oculta tras de un lenguaje técnico que la obscurece y aleja del no especialista. Los matemáticos, principales conductores de estas investigaciones, han establecido límites al pensamiento filosófico, pero lo han hecho levantado una barrera conceptual y metodológica entre ambas disciplinas.

De esta manera el problema al que nos enfrentamos es doble: por un lado, el de la exposición de las investigaciones en torno a los fundamentos de la matemática; por el otro, el de la lectura filosófica de los principales elementos de la crítica surgida de dicha labor. En función de este doble objetivo es que hemos seleccionado los materiales y modelado la estructura de esta tesis. En particular, hemos procurado exponer los conceptos propios de la matemática de manera accesible al no especialista. En última instancia lo que pretendemos es restablecer los vínculos teóricos entre la matemática y la filosofía y poner en evidencia la unidad subyacente a estas dos formas relativamente autónomas del conocimiento.

En este marco nuestra hipótesis de trabajo consiste en suponer que la matemática, desde el punto de vista "internalista", da cuenta de sí misma y, a partir de ello, establecer los límites de algunos contextos filosóficos en que se le ha colocado. El resultado de esta hipótesis es la transformación de la "filosofía de las matemáticas" en "filosofía matemática". Estamos convencidos de que ya no se puede sostener ninguna concepción de la matemática que pase por alto los resultados obtenidos en las investigaciones en torno a sus fundamentos, ni se puede esbozar un concepto de razón que no tome en cuenta las limitaciones que dichos resultados le imponen en este domino, otrora considerado como un paradigma de la racionalidad. Se trata, en fin, de mostrar algunos resultados matemáticos que han puesto un límite a lo que se puede decir de la matemática misma y circunscriben los alcances de la razón en este terreno.

La toma de posición que anima este trabajo no es novedosa. Recupera el espíritu de un sector importante de las discusiones en torno a la relación entre la ciencia y la filosofía en el siglo veinte, y que bien puede quedar resumida en las siguientes palabras de Albert Einstein:

> La mutua relación entre la ciencia y la epistemología es digna de mención. Son dependientes una de la otra. La epistemología sin el contacto de la ciencia se

convierte en un esquema vacío. La ciencia sin la epistemología es —en la medida en que esto sea concebible en lo absoluto— primitiva y confusa.[4]

En la filosofía de la matemática podemos observar una preocupación creciente por conducir las investigaciones en torno a los fundamentos de la matemática en esta dirección. Por citar algunos ejemplos tenemos los trabajos de Poincaré,[5] Hilbert,[6] Curry,[7] Bernays,[8] Benacerraf,[9] Gödel[10] y Wang.[11]

En cuanto a este trabajo, nuestro interés se centra en el cuestionamiento de algunas tesis filosóficas como la de la exhaustibilidad de la matemática, la de su reductibilidad a sistemas formales (reduccionismo) y la de la inexistencia de límites para la razón matemática (racionalismo extremo).[12] Uno de los puntos centrales es someter a una crítica la posibilidad de establecer un fundamento apodíctico para esta disciplina. Este análisis se suma a otros cuestionamientos que se están llevando a cabo en diversos campos del conocimiento en torno a la racionalidad, —como, por ejemplo, la física o la economía[13]— y que tienen como propósito circunscribir sus alcances, recuperando y elaborando a un mismo tiempo otros conceptos como los de incompletud, incertidumbre y complejidad.

Nosotros nos aplicaremos al análisis de uno de los proyectos más ambiciosos de la filosofía matemática del siglo veinte. Nos referimos al programa de Hilbert. Este proyecto es especialmente significativo no sólo por el impacto que tuvo en la filosofía de la matemática, sino por el concepto fuerte de razón que defiende. La ocasión se presenta para realizar una lectura filosófica de los teoremas limitativos de Gödel, que con tanta claridad testimonian lo fructífera que puede ser la relación entre la ciencia y la filosofía. Con su estudio esperamos poner en claro cómo la reducción de un problema filosófico a un problema científico —matemático en este caso— puede tener un efecto positivo.

La veta filosófica de los teoremas de Gödel ha sido muy poco trabajada, sobre todo en México. Con su investigación intentamos hallar una respuesta a las pretensiones de Hilbert y a la posibilidad de alcanzar una síntesis exhaustiva de los métodos de prueba admisibles en

---

[4] Einstein, 1949, pp. 683-684.
[5] Poincaré, 1908.
[6] Hilbert, 1925.
[7] Curry, 1951.
[8] Bernays, 1935.
[9] Benacerraf, 1965.
[10] Gödel, 1951.
[11] Wang, 1974.
[12] Con esto último nos queremos referir a Leibniz y Hilbert, y tal vez a Descartes, que no reconocen límites para el poder de la razón matemática.
[13] En la ciencia económica tenemos como caso relevante las críticas a la teoría de la elección racional.

la matemática. Nuestro análisis nos proporcionará los elementos con los que, a modo de conclusión, trataremos de sustentar las siguientes tesis:

> Que la correcta lectura filosófica de los teoremas limitativos es que la matemática no es susceptible de una racionalización objetiva completa,[14] es decir, que nuestra creencia precrítica en la coherencia de la matemática no tiene una justificación formal (discursiva o demostrativa), salvo en aquellos casos en que menos se necesita.

o bien:

> Que no está dentro del alcance de la razón matemática dar cuenta de su propia coherencia, es decir, que esta ciencia no tiene un fundamento enteramente racional, debiéndose buscar tal justificación en otros ámbitos, como el de la práctica, que van más allá de sus límites.

La conclusión sería entonces que la búsqueda de tal justificación no tiene sentido en tanto que proyecto de fundamentación y que la matemática es más bien una actividad humana similar al arte, que no admite una racionalización total.[15]

En su estructura el trabajo sigue básicamente un orden cronológico, aunque no pretende ser una historia del problema que nos ocupa. Comienza con un análisis del carácter de la geometría griega y termina en la investigación de la filosofía matemática de Kurt Gödel. El orden y selección de temas obedece a distintos motivos.

1) Aunque el trabajo no es un estudio del método axiomático, el orden cronológico nos permite precisar el lugar que éste ocupa en la matemática. En particular, observando su desarrollo podremos poner en perspectiva los sistemas formales, que en manos de Hilbert se convierten en un instrumento esencial para su proyecto de fundamentación.

2) Otra ventaja de la estructura cronológica es que nos permite resaltar la diferencia entre la matemática tradicional y la matemática moderna, diferencia que se encuentra en el origen del problema de los fundamentos que se suscita a principios del siglo veinte.[16]

---

[14] Objetiva: que se le puede objetivar en términos de axiomas y reglas de inferencia.

[15] Estas tesis no dejan de tener un fuerte impacto en la filosofía de la matemática, sobre todo si recordamos que desde siempre la matemática ha sido considerada como el paradigma de la certeza y la exactitud, y así ha sido vista por las otras ciencias. Así lo expresa Hilbert en un escrito ahora famoso: «Lo primero que tenemos que hacer es percatarnos con toda claridad que, a la larga, las paradojas nos colocan en una situación absolutamente intolerable. Imaginemos simplemente lo que sucedería si en el paradigma de verdad y confiabilidad científicas que las matemáticas representan, las construcciones conceptuales y las inferencias que nos son familiares nos condujeran a absurdos. ¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?». [Hilbert, 1925]. Cita tomada de la traducción al español, p. 94.

[16] Aquí por *matemática moderna* se entiende, no la matemática que parte de Descartes y Fermat, sino de la matemática surgida a mediados del siglo diecinueve y que difiere en su espíritu de la que le precede; y si bien no es posible establecer una clara demarcación entre la matemática tradicional y la matemática moderna, por *matemática tradicional*

3) Una tercera ventaja, decisiva para la estructuración del trabajo, es que el orden cronológico nos permite exponer los problemas y resultados de las investigaciones en torno a los fundamentos de la matemática de manera accesible al no especialista, buscando de este modo tender un puente entre la matemática y la filosofía, tal como lo hemos anunciado.

4) Por último tenemos una consideración de orden teórico. Después de leer a Paul Bernays,[17] llegamos a la conclusión de que al explorar un tema como el de los fundamentos de la matemática no es necesario elegir entre los distintos puntos de vista analizados (intuicionismo, finitismo, logicismo, platonismo, etc.); más bien, lo relevante es formular de manera precisa tales puntos de vista y establecer sus diferencias, similitudes y mutuas relaciones. La idea que guía esta investigación es el montaje de un razonamiento que, sopesando los argumentos de los propios actores, nos lleve a las conclusiones.

En esta forma de tratar el tema se manifiesta una diferencia con la vieja filosofía sistemática. No pretendemos erigir una teoría o un sistema de filosofía. Más bien, lo que intentamos es lograr una comprensión global del problema de los fundamentos de la matemática, una comprensión que nos permita ahondar en la naturaleza de esta disciplina. Tal vez sea más valioso colocar el problema en su justa perspectiva, que intentar una solución espuria.[18]

El trabajo está dividido en cinco capítulos y un anexo con veinte apéndices. Su extensión obedece a una preocupación bastante difundida en el ámbito científico del cual provengo, consistente en presentar el trabajo como algo autocontenido, idea que en este caso empalma a la perfección con el propósito de tender un puente entre la matemática y la filosofía.

Capítulo 1. En el primer capítulo presentamos un bosquejo histórico del desarrollo del método axiomático, desde Euclides hasta los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. La ocasión se presta para contrastar el espíritu de la matemática tradicional, que se extiende desde la Grecia antigua hasta el siglo dieciocho, con el de la matemática moderna, cuyo surgimiento se relaciona con la aparición de las geometrías no euclidianas. Nuestro análisis nos lleva a preguntarnos por la naturaleza de la matemática y, en particular, por el lugar que Hilbert otorga a la axiomática en este contexto. Estas consideraciones nos proporcionan los elementos necesarios para examinar la concepción que Hilbert tenía de la matemática hacia

---

entendemos el cuerpo de teorías y métodos conocidos desde la antigüedad hasta principios del siglo diecinueve y que no se habían separado del todo de la física. Al respecto, esta distinción se aclarará al leer los dos primeros capítulos, en los que esta cuestión será tratada con cierto detenimiento.

[17] Bernays, 1935.

[18] Al igual que Hao Wang, estoy convencido de que antes que fundar sistemas, la filosofía debería intentar una comprensión global de los problemas. De hecho, para quienes están persuadidos de que "hacer filosofía" es adherirse a una teoría o construir la propia, lo que aquí encontrarán son sólo elementos para una filosofía.

1900 y la forma en que juzga se le debe fundamentar. Hacia el final comparamos el pensamiento de Hilbert con el de Kant, exploramos el marco teórico de su estudio en torno a los fundamentos de la geometría, y consideramos la identificación que hace de la existencia matemática con la no contradicción. Nuestro análisis nos lleva a la conclusión de que para Hilbert *la matemática es la ciencia de lo posible*.

Capitulo 2. En el segundo capítulo llevamos a cabo un análisis del carácter de la matemática moderna, señalando algunos de sus momentos más relevantes. Esta parte tiene como propósito precisar qué es aquello que Hilbert pretende fundamentar y cumple una función más bien informativa. Si el lector ya está familiarizado con los sucedido en la matemática durante la segunda mitad del siglo diecinueve, puede obviar la lectura de este capítulo sin menoscabo alguno. En la parte final dedicamos un extenso espacio a la teoría de conjuntos, que de alguna manera es el *non plus ultra* de la nueva matemática. La conclusión a la que llegamos es que uno de los elementos que marca la diferencia entre la matemática tradicional y la matemática moderna es la manera en que tratan la noción de infinito. Esta diferencia nos permite situar el ámbito de las discusiones en torno a la naturaleza de la matemática. Hacia el final abordamos el problema de la autonomía de la matemática, que con tanta vehemencia defienden Cantor y Hilbert.

Capítulo 3. En este capítulo nos ocupamos primordialmente del llamado *programa de Hilbert*. En la primera parte nos centramos en el problema de los fundamentos, las paradojas y las soluciones propuestas por Russell y Brouwer, esencialmente. Se muestra cómo la crítica intuicionista obligó a Hilbert precisar su concepción de la matemática clásica, e influyó en la elección que hizo de los medios para establecer un fundamento para ella.[19] El programa se presenta como un medio para asegurar la consistencia de la matemática clásica de manera absoluta. Veremos cómo aparece la metamatemática y cómo es que Hilbert cree haber llevado su análisis del pensamiento matemático a un punto en el que: a) logra expresar *todas* las técnicas de nuestro pensamiento en un juego formal, b) puede reducir *toda* la matemática a sistemas formales de manera exhaustiva, y c) cuenta con una herramienta que le permite asegurar que *todo* problema matemático es resoluble. Al examinar los supuestos filosóficos que Hilbert asume, veremos que su pretensión es la de fundamentar la matemática en la intuición pura del signo, evitando de este modo toda referencia a suposiciones ajenas a la matemática misma.

Capítulo 4. En el cuarto capítulo nos ocupamos del examen de los teoremas de Gödel y la consecuencias que de ellos se pueden extraer para la filosofía matemática. Frente a la

[19] Aquí por matemática clásica se entiende, no la matemática griega, sino aquella surgida en torno a la geometría, la física y el análisis, y que tiene como noción central la de número real.

pretensión de reducir toda la matemática a sistemas formales y de asegurarle un fundamento mediante una prueba elemental de consistencia, se plantea la posibilidad de retomar la noción de verdad y probar la existencia de proposiciones indecidibles en relación a un sistema axiomático. Tras aclarar la línea de razonamiento que llevó a Gödel a sus descubrimientos, examinamos la estructura de sus teoremas y los efectos devastadores que éstos tuvieron en relación al programa de Hilbert. Nos centramos en dos puntos: la imposibilidad de identificar entre sí las nociones de verdad y demostrabilidad, y la imposibilidad de resolver la cuestión de la consistencia de la manera prevista (y quizá de cualquier otra manera). En la parte final exploramos las consecuencias de los teoremas de Gödel en otros dominios que el de la teoría de la demostración de Hilbert, y establecemos el alto grado de inviabilidad de la concepción sintáctica de la matemática.

Capítulo 5. En el último capítulo llevamos a cabo tres tareas complementarias. En primer lugar, realizamos un balance de la obra de Hilbert y reivindicamos algunos aspectos de su concepción de la matemática con los que estamos de acuerdo. Acto seguido, examinamos lo que habría sido de la matemática en caso de que Hilbert hubiera logrado sus propósitos, y establecemos dos conclusiones: la matemática no es susceptible de una racionalización objetiva completa, ni se reduce a una sintaxis del lenguaje. Por último, llevamos a cabo una lectura muy general de los teoremas limitativos de Gödel, la cual apunta hacia la idea de que la matemática es una actividad creativa del hombre y, como tal, se encuentra más cerca del arte de lo que comúnmente se cree. Esto lo hacemos examinando el lugar que ocupa la noción de "verdad" en la matemática, la cual, desde nuestro punto de vista, constituye un ideal de la razón pura en el sentido de Kant, es decir, un principio regulador que da sentido a la búsqueda que la matemática representa.

Apéndices. En el trabajo procuramos tratar los distintos temas sin detenernos en numerosos detalles técnicos. No obstante, dada la naturaleza de la materia, a menudo es necesario abordar algunas cuestiones propiamente matemáticas que le dan forma y contenido a nuestro análisis. En tales caso hemos agrupado la información en distintos apéndices. El grado de complejidad de éstos es variable y va desde simples comentarios o ejemplos, hasta exposiciones más o menos extensas de temas específicos. Algunos de ellos son fragmentos de otros trabajos y uno de ellos, el apéndice **18**, es el texto casi íntegro de un artículo de reciente publicación en una revista especializada.[20]

[20] Se trata del texto correspondiente a [Torres, 2000]. La inclusión de este trabajo tiene como propósito presentar un panorama general del desarrollo de la lógica matemática en el siglo veinte que nos permita una mayor claridad del contexto en que se dieron los teoremas limitativos, y tener a la mano una versión más técnica de dichos resultados, sobre todo de los teoremas de Gödel.

Es importante advertir que algunos tópicos aparecen de manera repetida en los apéndices. Esto obedece a que los materiales ahí reunidos no están coordinados entre sí; más bien, se trata de una compilación que se fue integrando conforme a las necesidades del texto. No obstante, más allá de algunas repeticiones inocuas, dichos anexos cumplen su labor de redondear el texto principal sin entorpecer su lectura.



Agradecimientos. Este trabajo fue posible gracias al estímulo inicial de Santiago Ramírez Castañeda, bajo cuya dirección di los primeros pasos en su elaboración. Aunque Santiago ya no está entre nosotros para conocer el resultado, creo que le habría complacido ver por escrito el fruto de las innumerables entrevistas que sostuvimos en su casa de Coyoacán. Quiero agradecer también a Juan José Rivaud por haber aceptado la dirección de este trabajo tras el penoso fallecimiento del Doctor Ramírez, así como por la atenta lectura de tantos borradores y sus finas observaciones. También mi reconocimiento a Oscar Falcón por las infinitas ocasiones en que, sentados en torno a una taza de café, escuchó con interés el avance del proyecto y sugirió algunos caminos. A Atocha Aliseda y Pedro Stepanenko mi agradecimiento por su paciente asesoría y lectura, al Doctor José Antonio Robles por el tiempo e interés con que revisó este trabajo y sus amables sugerencias, a Max Fernández de Castro por el minucioso escrutinio del mismo y los cambios propuestos y a José de Teresa por su participación crítica en la revisión final. También quiero expresar mi reconocimiento a quienes cooperaron en la elaboración de este trabajo de diversas maneras con sugerencias, objeciones y mucha ayuda en su redacción. So pena de cometer atroces omisiones, quiero mencionar señaladamente (y en estricto orden alfabético) a José Alfredo Amor, Isabel Cabrera, Elisabetta Di Castro y Manuel Gil por la ayuda recibida.

Por último, quiero agradecer el apoyo del CONACYT, el de la UNAM y, especialmente, el del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, sin los cuales no habría llegado a la conclusión de este trabajo. Como siempre, mi reconocimiento para aquellos que hacen de la Universidad un lugar donde bien vale la pena laborar.

Cuernavaca, Morelos, abril de 2001

Capítulo 1

El desarrollo del método axiomático

1.1 La axiomática en la antigua Grecia

El pensamiento matemático debe a los griegos dos grandes ideas. La primera de ellas es que la estructura del espacio, que se manifiesta en las relaciones entre configuraciones espaciales y sus mutuas dependencias, es algo completamente racional; la segunda, solidaria con la primera, es que dicha estructura se puede caracterizar con la ayuda de unos cuantos conceptos exactos y unos cuantos principios, los axiomas, en tal forma que todo concepto geométrico se puede definir en términos de esos conceptos básicos y toda verdad geométrica se puede deducir como consecuencia lógica de los axiomas.[1]

La forma dada por los griegos a la geometría alcanzó en sus manos un grado de perfección tan elevado, que con el paso del tiempo se convirtió en el ideal de toda ciencia deductiva.[2] En la matemática moderna dicha forma fue la pauta para elaborar el concepto de teoría axiomática, que se ha extendido a prácticamente todas sus ramas. En la actualidad es tal la importancia de este concepto que resulta imposible referirse al problema de los fundamentos de la matemática sin primero dar cuenta de él.

1.1.1 Génesis del método axiomático

Ciertamente, con los griegos nace la geometría como saber especulativo. En abierto contraste con la agrimensura y la técnica empírica de los egipcios y babilonios, la geometría griega se presenta como un conocimiento racional y desinteresado, contrario al conocimiento utilitario. En un pasaje de *La República* Platón exalta el fin teórico de la geometría, por el cual ésta se cultiva «... con miras al conocimiento de lo que siempre existe, pero no de lo que en algún momento nace o muere»,[3] y lo contrasta con su uso práctico, que dirige al alma hacia abajo.

El primer geómetra del que se tiene noticia es Tales de Mileto. En sus manos, el conocimiento geométrico alcanzó una sistematicidad difícil de encontrar entre sus predecesores, por lo que se le considera el fundador de la geometría como ciencia racional. Más que por la importancia de sus descubrimientos, se le distingue por haber reconocido la necesidad de sustentar las proposiciones sobre una base demostrativa.

---

[1] Es decir, que es posible describir las determinaciones necesarias del espacio y dar a la geometría la forma de un sistema deductivo, de manera que el conocimiento de su estructura sólo precise de la razón, no de la experiencia. Cf. Weyl, 1949, p. 3 de la versión en español.
[2] Fuera de las matemáticas, la mecánica newtoniana es un ejemplo de dominio al que se extendió el método utilizado por los griegos en la geometría.
[3] Platón, *La República*, p. 252.

Del desarrollo de la matemática griega durante el período que va de Tales de Mileto a los pitagóricos se tienen pocas noticias. De éstos se sabe que fueron los primeros en examinar los principios de la geometría. Aunque no se sabe con toda certeza cuáles fueron sus descubrimientos (ni los de Tales), se les atribuye haber demostrado algunas proposiciones, e incluso se especula en torno a la forma en que pudieron hacerlo. Algunas de estas proposiciones figuran en la siguiente lista (las nombradas con las letras "T" por *Tales* y "P" por *Pitágoras*) junto con otras que presumiblemente fueron conocidas por los pitagóricos:

T1 *Un círculo es bisecado por su diámetro.*

T2 *Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.*

T3 *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

T4 *Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado común a dichos ángulos, iguales.*

T5 *El ángulo inscrito por un semicírculo es recto.*

A *Todo triángulo equilátero es equiángulo.*

B *Todo triángulo equiángulo es equilátero.*

P1 *Si una diagonal corta dos líneas paralelas, los ángulos alternos internos son iguales.*

P_2 *La suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo es igual a dos ángulos rectos.*

P2 *La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*

P3 *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

P4 *Dos triángulos son congruentes si tienen un ángulo y los lados que lo forman iguales.*

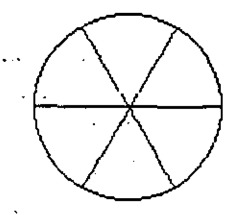
P5 *Dos segmentos de recta paralelos comprendidos entre rectas paralelas, son iguales entre sí.*

P6 *Tres rectas paralelas cortan a sus transversales en segmentos proporcionales entre sí.*

P7 *Toda paralela a la base de un triángulo corta a los otros dos lados en partes proporcionales.*

P8 *Dos triángulos semejantes tienen lados homólogos proporcionales.*

Mucho se ha dicho sobre cómo pudieron demostrar Tales y los pitagóricos las proposiciones que se les atribuyen. Por ejemplo, se dice que Tales difícilmente pudo haber demostrado T1, y que lo más probable es que tan sólo haya observado este hecho en algunos monumentos y dibujos egipcios, como el que se muestra a la derecha.

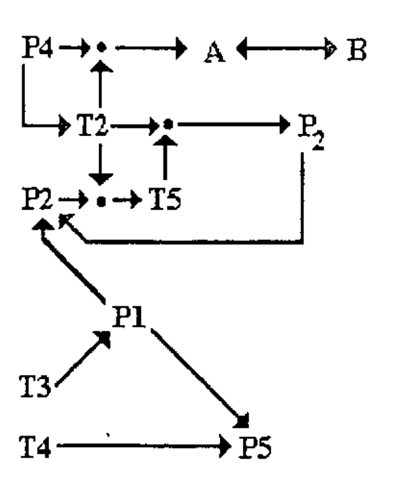


También se dice que Tales demostró T2 por superposición de figuras. Lo que sí es un hecho es que en esta etapa la geometría griega ya revela un rasgo distintivo a cuyo perfeccionamiento habría de contribuir Euclides: establece vínculos deductivos entre sus proposiciones a través de lo que podemos llamar una prueba, es decir, un razonamiento que se considera adecuado para establecer una proposición (el cuál, por otra parte, no es necesariamente una demostración o una deducción lógica en sentido estricto, debido a la posible intervención de otros factores).

Tenemos así un primer ejemplo de organización, aunque incipiente, del conocimiento geométrico. Algunos vínculos deductivos que se cree conocieron los pitagóricos se muestran en las siguientes tablas:

T2, P2 → T5
P1 → P2
P1, T4 → P5
T3, P2 → P1
P4→ C3
P4, A → B
T2 → A
P4 → T2

Vínculos deductivos individuales



Red de vínculos deductivos

Como se ve, entre las proposiciones anteriores no hay una jerarquía deductiva claramente definida o una precedencia lógica que las ordene de un modo natural. Incluso hay casos en que las proposiciones parecen formar *ciclos* en los que aparentemente se incurre en la conocida falacia de *petición de principios* (*Petito Principii*) que fuera analizada por Aristóteles, consistente en suponer en una demostración algo equivalente a lo que se quiere demostrar. Un ejemplo sería el siguiente: P1 → P2 y P2 & T3 → P1.

Una conjunto de proposiciones apenas jerarquizado como el anterior presupone el libre razonamiento en un contexto en el que los vínculos deductivos no están organizados. En este sentido, la organización axiomática de la geometría lo que hizo fue poner en forma la deducción material y ordenar el conocimiento en un cuerpo bien estructurado desde el punto de vista de la lógica. Para ello se tuvo que esclarecer la naturaleza del conocimiento demostrativo, comenzando por su posibilidad.

1.1.2 Los *Elementos* de Euclides

La organización deductiva de la geometría pronto dejó ver que la misma sólo es posible cuando algunas proposiciones se admiten sin demostración. De lo contrario habría que demostrar las hipótesis en que se apoya cada demostración *ad infinitum* (i.e. recorrer el infinito), o incurrir en circularidades (al demostrarse las proposiciones la unas a las otras). Dicha organización tuvo al parecer como base la doctrina del conocimiento demostrativo expuesta por Aristóteles en la *Analítica Posterior*, donde fija las bases de todo conocimiento demostrativo: «Lo que ahora afirmo es que, en todo caso, conocemos por vía de demostración.».[4] Aristóteles entiende por demostración un silogismo que deduce una conclusión a partir de principios primeros, verdaderos y evidentes: «Las premisas del conocimiento obtenido por demostración deben ser verdaderas, primarias, inmediatas, mejor conocidas que la conclusión y anteriores a ella, la cual luego se refiere a ellas, como el efecto a la causa.».[5] Con base en esta doctrina impugna la opinión ya señalada de que el conocimiento demostrativo es imposible: «Nuestra propia doctrina sostiene que no todo conocimiento es demostrativo o demostrable; por el contrario, el conocimiento de las premisas inmediatas es independiente de la demostración.».[6] A su vez, las premisas inmediatas deben cumplir ciertas condiciones: han de ser verdaderas, causa de la conclusión, mejor conocidas que ésta y anteriores a ella, e indemostrables: «La necesidad de esto es evidente, porque puesto que hemos de conocer las premisas anteriores de las que deriva la demostración, y puesto que el retroceso debe acabar en las verdades inmediatas, estas verdades deben ser indemostrables.».[7] Es así como Aristóteles responde a la pregunta de cuándo algo ha sido demostrado, y fija las bases para la organización del conocimiento demostrativo.

Esta doctrina tuvo al parecer una influencia decisiva en Euclides al momento de componer los libros de los *Elementos*, donde la demostración procede en franca concordancia con la teoría aristotélica.[8] Al modelo que Euclides sigue para organizar el conocimiento geométrico se le conoce hoy en día como *axiomática intuitiva* o *material*, para así distinguirlo de la *axiomática formal* que más adelante veremos.

[4] Aristóteles, *An. post.* II, 2, 71a/71b.
[5] *Ibid.*
[6] *Op. cit.*, II, 3, 72a/72b.
[7] *Ibid.*
[8] Los *Elementos* de Euclides constituyen un tratado sin explicaciones en cuanto a su propósito, aunque es evidente que una de sus finalidades era sistematizar el conocimiento geométrico. Aun así, el modo en que Euclides procede concuerda casi a la perfección con la doctrina de Aristóteles, salvo que no procede por silogismo.

Al frente de los libros de los *Elementos* (trece en total), Euclides pone una lista de definiciones y axiomas que, siguiendo al parecer una idea de Aristóteles,[9] divide en *nociones comunes* y *postulados*. Algunas definiciones son las siguientes:[10]

Definiciones

D1 Punto es aquello que no tiene partes.
D2 Una línea es una longitud sin anchura.
D10 Si una línea recta cae sobre otra formando ángulos adyacentes iguales, cada ángulo se dice que es recto y las líneas perpendiculares entre sí.
D15 Un círculo es una figura plana contenida por una línea tal que todas las líneas que caen de ella a un punto que se encuentra al interior de la figura son iguales entre sí.
D16 Y tal punto se llama centro del círculo.
D17 Diámetro del círculo es una recta cualquiera que se traza por su centro y cuyos extremos están en la circunferencia del círculo. Tal recta biseca al círculo.
D23 Líneas paralelas son líneas que estando en el mismo plano y prolongándose indefinidamente en ambas direcciones no se encuentran nunca en ninguna dirección.

Las nociones comunes y los postulados que figuran en el libro I son los siguientes:

Nociones comunes

NC1 Cosas iguales a una y la misma son iguales entre sí.
NC2 Y si a cosas iguales se añaden otras iguales, los totales son iguales.
NC3 Y si de cosas iguales se quitan otras iguales, las restantes son iguales.
NC4 Y las cosas congruentes entre sí son iguales entre sí.
NC5 Y el todo es mayor que la parte.

Postulados

P1 Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
P2 Prolongar por continuidad en línea recta una recta delimitada.
P3 Para cada centro y radio, describir su círculo.
P4 Que todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
P5 Que si una recta incidente sobre dos rectas hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos.

---

[9] *V.* Aristóteles, *An. post.* II, 2, 71b/72a.
[10] Cf. Euclides, 1992, pp. 5-13

Los *Elementos* de Euclides cuentan con una larga tradición y han sido analizados casi hasta la exhaución. En cuanto al tema que nos ocupa, nos limitamos a señalar algunos aspectos que consideramos relevantes, basándonos principalmente en los comentarios de Juan David García Bacca.[11]

1) Euclides define explícitamente un conjunto de objetos geométricos fundamentales —punto, línea, superficie— con palabras llanas porque ante los ojos del entendimiento, e incluso ante la vista, tales objetos se presentan clara y distintamente. Su existencia no está a discusión ni es puesta en duda. En esto, como veremos, radica una de las diferencias fundamentales con la forma dada por Hilbert a la geometría.

2) Sin entrar en detalles diremos que en el mundo helénico, en el que se sitúan los *Elementos*, lo positivo era el estado de finitud. La infinitud equivalía a la indefinición o indeterminación y pasaba, por consiguiente, como imperfección a superar. Este pavor al infinito y a lo indeterminado parece haber llevado a Euclides a circunscribir un horizonte dentro del cual pudiera el espíritu griego sentirse seguro y ver tranquilamente las cosas. Para ello comienza por definir explícitamente los *Elementos* que sirven para delimitar y "finitizar" las cosas que habrán de poblar el espacio geométrico. Así, por ejemplo, los puntos limitan por extremos a las líneas, haciéndolas claras y visibles. A su vez, las líneas ejercen la función de limitar o ser los extremos de una superficie, con lo que hacen que la superficie resulte clara y distintamente visible, pudiéndose decir lo mismo de las superficies en relación a los sólidos. Por ejemplo, el concepto de *segmento* no existe en la geometría griega, es decir, no existe la idea de que la línea, infinita por naturaleza, ha sido fragmentada por dos puntos. Al contrario, es la línea infinita la que está en estado de imperfección, pues es una línea sin puntos que la delimiten, y la función de los puntos es precisamente la de corregir ese defecto.[12]

3) Según parece, parte del plan de la geometría euclidiana consiste en construir objetos *delimitados* que resulten visibles y se puedan abarcar con la vista, para así poblar su mundo geométrico. Esta idea de finitud se hace presente en las definiciones que figuran en los elementos, como la definición 14, que dice: «Figura es lo comprendido por un límite o por varios»; y en las proposiciones mismas (teoremas), que tratan de figuras en este preciso

[11] *V.* Euclides, 1992, Introducción filosófica de Juan David García Bacca.

[12] De este horror al infinito y a lo indeterminado casi nada queda en la geometría actual, que, por el contrario, pareciera tomarlos como punto de partida. Por ejemplo, en la geometría analítica, que ya no exige visualidad alguna, una línea recta es simplemente una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, donde lo más relevante respecto a ella es precisamente la indeterminación de sus variables. En cuanto a la ecuación, ningún valor concreto de las variables (ningún *punto*) tiene un privilegio especial. Poner dos puntos en la recta para delimitar un segmento carece en sí de valor, y equivale a la operación ordinaria de dar valores específicos a las variables.

sentido (triángulos, rectángulos, paralelogramos, círculos, rectas, esferas, poliedros, etc.), es decir, de figuras siempre bien circundadas por límites.[13]

4) Las nociones comunes son, en la concepción helénica, principios del conocimiento demostrativo propios del entendimiento. Esto significa que su justificación no tiene como base la evidencia externa, sino la interna. Estas nociones son tan fundamentales que no sólo intervienen en la geometría, sino en varias otras ciencias (p. ej. la astronomía y la lógica) e incluso en la vida práctica, y se les puede usar con la misma seguridad que los órganos sensibles. Se les llama "comunes" porque pertenecen a todos los hombres, o, al menos, son de tal naturaleza que cualquier hombre puede llegar a apropiarse de ellas y usarlas como suyas. Aristóteles se refiere a ellas como *axiomas*, usando al parecer el mismo vocablo que Pitágoras, habiendo sido los estoicos los primeros en utilizar la expresión «nociones comunes».[14]

5) Además de su función instrumental, las nociones comunes desempeñan en el aparato euclidiano una función lógica, y pueden intervenir en las demostraciones de dos maneras:

i) como premisas de un argumento. Por ejemplo,

Cosas iguales a una y la misma cosa son iguales entre sí	(NC1, primera premisa)
Las cosas A y B son iguales a la cosa C	(segunda premisa)
luego, Las cosas A y B son iguales entre sí	(conclusión)

ii) como argumentos no proposicionales, en los que la noción común no es una de las premisas, sino todo el argumento y establece relaciones de igualdad o desigualdad entre las cosas. Por ejemplo,

A es igual a B	(primera premisa)
B es igual a C	(segunda premisa)
luego, A es igual a C	(conclusión)

6) Tal como fueron entendidas es su momento, las proposiciones que figuran en la geometría de Euclides son plenamente significativas y verdaderas, pues están referidas a objetos cuya realidad es manifiesta y cuyas propiedades expresan los postulados. Dichas proposiciones se pueden dividir en dos clases: constructivas, que afirman la posibilidad de una construcción geométrica que hace visible un objeto (v. gr., la proposición I.1: *Dada*

[13] El abandono de la norma helénica de llamar "figura" solamente a los objetos geométricos que están cerrados y comprendidos por límites fue algo tardío, y está relacionado con la admisión de curvas arbitrarias representadas por ecuaciones y la introducción de procesos infinitos como el paso al límite. De las curvas fractales ni hablar.

[14] El conocimiento que tenemos de los *Elementos* es a través de traducciones al árabe y versiones en griego posteriores a la época en que vivió Euclides, y entre los varios escritos hay ciertas diferencias que dejan ver que su contenido fue modificado con el paso del tiempo, por lo que no podemos decir que la expresión «nociones comunes» sea la utilizada por él. De la vida de Euclides casi no tenemos noticias, salvo que vivió en Alejandría alrededor del año 300 a. C., e ignoramos cuál fue la forma precisa que le dio a la geometría. Al respecto, algunos autores sugieren que se trata de una obra colectiva en la que los griegos compendiaron parte de sus conocimientos geométricos y que por costumbre atribuimos a un solo autor, algo así como un Bourbaki del pasado.

una recta delimitada construir sobre ella un triángulo equilátero), y demostrativas, en las que se afirma o niega algo de alguna cosa (v. gr., la proposición I.6: *Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados subtendidos bajo tales ángulos serán también iguales*). En este sentido, las proposiciones demostrativas no enuncian atributos de objetos hipotéticos, sino que ponen al descubierto las propiedades de una sustancia cuya realidad es innegable y son, por ello, verdaderas.

7) Un postulado es una proposición que se admite, o se requiere sea admitida, a fin de hacer posible una demostración. Respecto a su utilización por parte de Euclides, hay dos puntos de vista divergentes en cuanto a su propósito. Son los siguientes:

i) Uno que sostiene que, a diferencia de las nociones comunes que deben ser admitidas por necesidad, los postulados expresan lo que se quiere admitir y conciernen a la existencia de determinados elementos geométricos. Así, por ejemplo, el postulado 1, «Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera» asienta la existencia de líneas rectas. Esta necesidad se debe, entre otras cosas, a que la definición de «línea recta» no demuestra su existencia, pues lo único que hace es declarar su esencia.[15]

ii) Otro que sostiene, en contra de lo dicho en el inciso anterior, que la construcción no es para el matemático griego un medio de hacer existir los objetos geométricos (no es una "prueba de existencia", como decimos ahora), sino que tiene como propósito hacer visible aquello que no lo es de inmediato. Por ejemplo, en el postulado 1, el "visual" Euclides postula (pide) aquello que la intuición no le proporciona sin más: trazar una línea recta de un punto a otro punto para que éstos, los puntos, dejen ver un objeto perfectamente visible que no surge de ninguna figura. Algo semejante se puede decir de los postulados 2 y 3. Por ejemplo, en el postulado 3 Euclides pide convertir cada punto en el centro de la figura perfecta por excelencia, el círculo, y hacer de cada recta el radio de la figura perfecta.

En breve: Con los postulados, Euclides pide que aceptemos cosas que visualmente no son evidentes, como, por ejemplo, que dos rectas que cumplen con ciertas condiciones se cortarán al ser prolongadas al infinito (postulado 5), o que los ángulos se pueden transportar sin alterarlos (postulado 4).[16] Éste sería nuestro punto de vista.

---

[15] Por ejemplo, la definición de *unicornio* como «animal con figura de caballo y un cuerno recto en la mitad de la frente» sólo fija aquello que hace de un animal un unicornio, mas no dice nada acerca de su existencia.

[16] En cuanto a los posibles motivos que tuvo Euclides para pedir los postulados 4 y 5, véase el detallado análisis que hace Juan David García Bacca en [Euclides, 1992, pp. LXXVII-LXXXI], que omitimos por motivos de espacio, pero con el que en principio estamos de acuerdo.

En los libros de los *Elementos* figuran un total de 465 proposiciones ¿Cómo las demuestra Euclides? En general siguiendo dos procedimientos: la demostración directa y la que procede por reducción al absurdo. Lo que sí es un hecho es que no hay satisfacción de la exigencia aristotélica de que la demostración "aceptable" es la efectuada por silogismo. Las demostraciones euclidianas se pueden dividir, al igual que las proposiciones, en dos clases: constructivas y apodícticas. Las primeras tendrían como propósito hacer visibles las cosas que no lo están de inmediato (triángulos, segmentos, mitades de un ángulo, punto medio de un segmento, perpendicular a una recta desde un punto dado, triángulos con tres lados predeterminados, etc.); las segundas, mostrar las relaciones existentes entre distintas configuraciones geométricas con base en los postulados. Las demostraciones de este último tipo son lo que podríamos llamar *argumentos matemáticos*, y no necesariamente cumplen con la definición de «demostración» dada por Aristóteles o, para el caso, en cualquier manual de lógica. Su papel es el de propagar la verdad de los postulados a los teoremas, sin apelar a la experiencia o a una intuición cualquiera (lo que, a decir verdad, no siempre se cumple: está visto que las figuras suelen influir en las demostraciones euclidianas, haciéndonos aceptar como cierto algo que está sugerido o dado en ellas).

1.1.3 El concepto de teoría axiomática intuitiva o material

La forma dada por Euclides a la geometría fue, por mucho tiempo, modelo insuperable de teoría deductiva. Sus teoremas estaban ligados a los postulados mediante una relación de aparente necesidad lógica y, hasta mediados del siglo diecinueve, se creyó que eran verdades universales igualmente necesarias acerca del espacio físico.

El modelo que sigue Euclides para organizar el conocimiento geométrico es lo que hoy llamamos *axiomática intuitiva* o *material* y lo podemos resumir así:[17]

1. Ciertos *términos iniciales* se definen a fin de establecer qué es lo que se pretende significar con ellos en el discurso.
2. Cualquier otro *término técnico* del discurso se define a partir de los términos iniciales. Es condición que toda definición se exprese en términos de cosas anteriores y mejor conocidas que aquello que se define.

[17] Obviamente, el esquema se obtiene al abstraer de la geometría euclidiana su contenido específico y examinar la forma en que procede. No obstante, en el texto no queremos decir que Euclides fue el primero en proceder de esta manera, cosa que ignoramos; más bien, estaríamos inclinados a pensar que procedió con base en las ideas expuestas por Aristóteles en la *Analítica posterior*.

3. Ciertas proposiciones tenidas por ciertas a partir del significado de los términos iniciales se enuncian sin demostración. A estas proposiciones se les llama *axiomas* o *postulados.*[18]

4. Cualquier otra proposición de la teoría se demuestra a partir de los axiomas. A tales proposiciones se les llama *teoremas*.

Básicamente, el procedimiento consiste en aislar un grupo de conceptos y proposiciones que sirven como fundamento de todo lo demás. Vale considerar a los términos iniciales como datos intuitivos y a los axiomas como evidencias. Esta separación introduce un orden entre las proposiciones de la teoría conforme al cual se procede de los axiomas a los teoremas siguiendo el sendero de la lógica natural.[19] Esto último significa que las formas de deducción sobre las que se apoya el razonamiento son las de la argumentación ordinaria.[20]

---

[18] En la concepción moderna no se establece ninguna distinción entre axiomas y postulados, por lo que estos términos son tratados como sinónimos.

[19] Lo ideal sería que los axiomas fueran siempre mejor conocidos que lo que se demuestra a partir de ellos, mas esto no siempre es así. Por ejemplo, la proposición I.5 de los elementos, *En todo triángulo isósceles los ángulos situados en la base son iguales entre sí*, necesita para su demostración algo que es menos evidente que ella, a saber, que *dos rectas no circundan región*.

[20] Es presumible que tanto los geómetras griegos como muchos otros matemáticos a lo largo de la historia, estaban convencidos de que sus demostraciones podían convertirse a la forma silogística. No obstante, salvo en casos muy simples (que es donde menos se requiere), esto no se ha llevado a la práctica, y se antoja muy difícil de lograr, no sólo por la incomodidad que presupone la forma dada a la proposición por Aristóteles, sino por la forma que adopta la "demostración" en matemáticas, que en más de un sentido pareciera no acoplarse con el rigor que exige la lógica formal.

1.2 Las geometrías no euclidianas

No es nuestro propósito examinar el contenido específico de la geometría euclidiana. En vez de ello, nos limitáremos a señalar algunos acontecimientos notables que influyeron en el desarrollo del método axiomático (tema central de este capítulo) y que se relacionan con sus postulados. En la primera parte nos referiremos a algunos intentos por demostrar el quinto postulado y al descubrimiento de nuevas geometrías; en la segunda, consideraremos el estado de cosas a que todo esto condujo, sobre todo en lo concerniente al cambio en el punto de vista respecto al vínculo entre la geometría y la realidad o, si se prefiere, entre las teorías matemáticas y la realidad.

1.2.1 El problema del quinto postulado

La situación de los postulados de Euclides fue, hasta comienzos del siglo diecinueve, la ya descrita: principios ciertos más allá de los cuales no se intentaba ir. No obstante, había entre ellos uno, el quinto, que siempre pareció más complicado que los demás: no arrojaba la misma evidencia intuitiva que éstos, ni parecía ser más simple o mejor conocido que lo que se demostraba a partir de él.[1] Más parecía una proposición que un postulado y pronto comenzaron los esfuerzos por demostrarlo como un teorema a partir de los otros postulados o, al menos, reemplazarlo por un equivalente más aceptable. Tales esfuerzos concluyeron en el siglo diecinueve con el surgimiento de las geometrías no euclidianas.

De la historia del quinto postulado de Euclides sólo queremos destacar a manera de ejemplo uno de los muchos intentos que se hicieron por demostrarlo —el de Girolamo Saccheri en el siglo dieciocho—, y enumerar algunas proposiciones que le son equivalentes.[2]

La idea de que el quinto postulado se ha de poder demostrar se refuerza al observar que es el recíproco de la proposición I.17, la cual se prueba con base en los cuatro primeros postulados. Se trata de la siguiente proposición:

---

[1] Hay quienes sostienen que el mismo Euclides no se sintió cómodo con este postulado, al punto de no recurrir a él hasta que esto le resultó inevitable, y toman como evidencia el hecho de que la primera aplicación del postulado se da hasta la proposición I.29.

[2] No se sabe si Euclides fue el primer geómetra que trató de probar el quinto postulado. Lo que sí se le reconoce es haber sido el primero en advertir que se trataba de un principio indispensable para edificar la geometría. Al respecto, en su estudio sobre los *Elementos*, Thomas L. Heath se refiere a Euclides con las siguientes palabras: «Cuando consideramos los innumerables intentos que se hicieron durante más de dos mil años por demostrar el postulado, muchos de ellos realizados por hábiles geómetras, no podemos sino admirar el genio de un hombre que concluyó que tal hipótesis, que encontró necesaria para la validez de todo su sistema geométrico, era en verdad indemostrable.».Heath, 1956, p. 202.

I.17. *En todo triángulo, dos ángulos cualesquiera tomados a la vez son menores que dos rectos.*

El recíproco de esta proposición es: «*Si una recta incidente sobre otras dos hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán, formando con la primera un triángulo*», que no es sino una reformulación del quinto postulado.

A. De Euclides al siglo dieciocho

A ciencia cierta no sabemos en qué momento comenzaron los intentos por demostrar el quinto postulado de Euclides, e incluso se piensa que fue Euclides mismo el primero en intentarlo. Sabemos por Proclo (410-485 d. C.) que desde un principio el postulado fue cuestionado como tal y que se llevaron a cabo intentos por demostrarlo o deshacerse de él adoptando otras definiciones de paralelismo. En cuanto a intentos de prueba históricamente documentados tenemos, entre otros, los de Claudio Ptolomeo (100-178), el propio Proclo, Nasîradîn at-Tusî (1201-1274), John Wallis (1616-1703), Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777) y Adrien-Marie Legendre (1752-1833).[3]

Salvo por los intentos de Saccheri y Lambert, en todos los casos la "demostración" se apoyaba, implícita o explícitamente, en alguna suposición equivalente al quinto postulado. Ejemplos de ello son las siguientes proposiciones, que fueron utilizadas en su momento:

1) *Hay al menos un triángulo en el que los ángulos internos suman dos rectos.*
2) *Existe un par de triángulos similares que no son congruentes.*
3) *Existe un par de líneas rectas igualmente distantes entre sí en todos sus puntos.*
4) *Dados tres puntos no colineales, hay una circunferencia que incide con ellos.*
5) *Por cualquier punto dentro de un ángulo de 60° se puede trazar una línea recta que intercepta ambos lados del ángulo.*
6) *Dada un área arbitraria, hay un triángulo rectángulo con un área mayor.*
7) *Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto ángulo también es recto.*

De los muchos sustitutos propuestos del quinto postulado, el más conocido en los tiempos modernos es el del matemático escocés John Playfair (1748-1819):

---

[3] Cf. Heat, 1956, pp. 204-219.

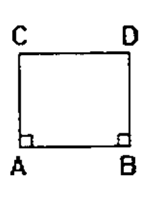
8) *Por un punto dado sólo se puede traza una línea paralela a una línea dada.*[4]

Esta forma del quinto postulado es muy útil para exponer lo que habría de ser uno de los más grandes descubrimientos matemáticos de todos los tiempos: la existencia de otras geometrías, en las que el postulado no se cumple, sino alguna de sus negaciones.[5]

B. Saccheri

A diferencia de sus predecesores, que intentaron una prueba directa del quinto postulado, en el siglo dieciocho un sacerdote jesuita y profesor de la Universidad de Pavia, Girolamo Saccheri (1667-1733), adoptó una nueva estrategia: había que proceder por reducción al absurdo, es decir, demostrar la imposibilidad de su negación, pues ésta conduciría a una contradicción.

En un libro publicado en 1733, *Euclides ab omni naevo vindicatus*[6] (Euclides libre de toda mancha), Saccheri pretende deducir el quinto postulado de su opuesto, es decir, asumir la contradictoria de este postulado y deducirlo de ella por demostración directa. Este elegante método de razonamiento, ya practicado por Euclides [prop. IX.12],[7] recibe el nombre de *consequentia mirabilis* y se puede enunciar así: suponiendo como hipótesis que la proposición que se quiere demostrar es falsa, uno se ve llevado a la conclusión de que es verdadera. Adoptando esta idea, Saccheri asume como hipótesis que el quinto postulado es falso, pero acepta como verdadera toda proposición de los *Elementos* que no dependa de él. Entre las consecuencias de estas suposiciones busca una proposición que le dé el derecho a decir que el postulado es verdadero.



A fin de resaltar la estructura lógica del problema, Saccheri considera una figura que ahora lleva su nombre: el *cuadrilátero de Saccheri*. Por los extremos A y B de un segmento levanta dos perpendiculares AC y BD de igual longitud, y une los puntos C y D con una línea recta y, tomando como base los postulados I-IV, demuestra que $\angle C = \angle D$, habiendo de este modo tres posibilidades mutuamente excluyentes para los ángulos C y D en la cúspide del cuadrilátero: **(1)** son rectos, **(2)** son obtusos, **(3)** son agudos. Saccheri llama estas posibilidades *hipótesis del ángulo recto*, *hipótesis del ángulo obtuso* e *hipótesis del ángulo*

[4] La existencia de al menos una paralela es consecuencia de la proposición I.27 si se asume, como lo hace Euclides, que la línea recta tiene una extensión infinita. Esta suposición es falsa en el caso de la geometría de la esfera, donde «línea recta» significa «geodésica» o círculo máximo.
[5] Hay dos formas de negar el postulado: rechazando la existencia alguna paralela, o aceptando la existencia de más de una paralela.
[6] Saccheri, 1733.
[7] Véase el apéndice 2.

agudo y demuestra que si una de ellas se cumple para un cuadrilátero, se cumple para todos. Más adelante, en la proposición 9, demuestra lo siguiente:

- en la hipótesis del ángulo recto la suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo es igual a dos ángulos rectos.
- en la hipótesis del ángulo agudo la suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo es menor que dos ángulos rectos.
- en la hipótesis del ángulo obtuso la suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo es mayor que dos ángulos rectos.

Tenía de este modo tres proposiciones mutuamente excluyentes demostradas a partir de tres hipótesis también excluyentes entre sí. En la proposición 13, demuestra que:

- en la hipótesis del ángulo recto el quinto postulado es verdadero.
- en la hipótesis del ángulo obtuso el quinto postulado es verdadero.

Este último resultado permitió a Saccheri concluir que la hipótesis del ángulo obtuso es falsa, pues de ella se sigue una contradicción: los ángulos del cuadrilátero fundamental sumarían a la vez cuatro ángulos rectos y más de cuatro ángulos rectos.[8]

A fin de eliminar la hipótesis del ángulo agudo, Saccheri exploró las consecuencias de esta suposición en busca de una contradicción. Nunca la encontró: lo único que halló fueron resultados extraños a sus ojos que diferían notablemente de aquéllos de la geometría euclidiana. Cansado, en la proposición 33 de su libro, se refugia en el débil terreno de la intuición geométrica y concluye que «la hipótesis del ángulo agudo es falsa, pues es repugnante a la naturaleza de la línea recta.».

La razón para destruir tal hipótesis es que su aceptación implicaría la existencia de dos líneas rectas coplanares que, prolongadas *infinitamente* en la misma dirección, deberían correr juntas en una sola recta, recibiendo en un punto infinitamente distante una perpendicular común. Dicha perpendicular común mostraría que el ángulo de intersección entre las líneas es nulo, lo cual encuentra inadmisible, pues dos rectas que se interceptasen con un ángulo nulo debería "colapsarse" en una sola, mientras que estas dos líneas serían a todas luces distintas. Y esto, como dice Saccheri, sería repugnante a la naturaleza de la recta.

---

8 Hay un error que invalida la demostración de Saccheri: asume, al igual que Euclides en la demostración de la proposición I.16, que la línea recta es infinita en extensión. Aunque él no lo supo, esta suposición es falsa en el caso de la hipótesis del ángulo obtuso. Véase el apéndice 1.

En realidad, lo que Saccheri descubrió fue que bajo la hipótesis del ángulo agudo hay rectas que, sin llegar a tocarse, se acercan ilimitadamente entre sí (es decir, son asintóticas), resultado que en sí es insuficiente para destruir la hipótesis. Pero él, en vez de aceptar este hecho, decidió ponderar sus consecuencias y llegó a una conclusión que le pareció detestable: en su prolongación infinita (cualquier cosa que esto signifique), dichas rectas se encuentran.

Hoy sabemos, en contra de la opinión que él tenía, que ninguna contradicción se puede deducir de la hipótesis del ángulo agudo, que ésta da lugar a una geometría muy distinta de la de Euclides, pero tan coherente como ella. Al revelar las consecuencias de la hipótesis del ángulo agudo, Saccheri desarrolló, sin darse cuenta, una nueva geometría. Creyó descubrir un camino que conducía al quinto postulado, cuando en realidad lo que hizo fue descubrir inadvertidamente un nuevo mundo.[9]

Desde el punto de vista de la lógica, Saccheri basó su intento por demostrar el quinto postulado en el siguiente principio: si una proposición es una verdad necesaria, su negación es lógicamente imposible. No obstante, la aceptación del quinto postulado se debe no a su necesidad lógica, sino a su evidencia intuitiva; en este sentido, la matemática del siglo diecinueve nos tenía reservada una sorpresa: una proposición puede ser evidente sin que ello signifique la imposibilidad de su negación. La verdad y la demostrabilidad estaban en vías de separación, y la geometría euclidiana era un buen sitio para comenzar.

1.2.2 El advenimiento de nuevas geometrías

Los primeros en concebir claramente la posibilidad de geometrías distintas a la euclidiana, en las que el quinto postulado se sustituye por su negación, fueron Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860) y Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856).[10]

Gauss llamó *no euclidiana* a la geometría que resulta de asumir, en vez del axioma de Playfair (ya mencionado al comienzo de esta sección), parte de su negación: *por un punto fuera de una línea recta más de una paralela a ella se puede trazar*. Hoy en día también se

9 Saccheri no se dio cuenta de que lo que tenía ante sí era una nueva geometría porque para él, como para todos los geómetras desde Euclides hasta Legendre, la euclidiana era la única geometría racionalmente posible. Liberarse de esta creencia fue una conquista para la que el escenario aún no estaba preparado.

10 De los tres, Gauss fue el primero en explorar las consecuencias de asumir como axioma, no el quinto postulado, sino una de sus negaciones, la correspondiente a la hipótesis del ángulo agudo. No obstante, como en su vida no publicó nada sobre el tema, el honor del descubrimiento de la geometría no euclidiana lo comparte con Lobachevsky y Bolyai, quienes en los años 1829-1832 publicaron resultados semejantes.

da este nombre a la geometría que resulta de asumir la otra parte de la negación del quinto postulado: *por un punto fuera de una línea recta ninguna paralela a ella se puede trazar.*[11]

La consideración de estas alternativas no se dio sin enfrentar el peso de la tradición, que podemos resumir en las siguientes máximas: *Dios siempre geometriza,* y *Dios siempre geometriza con apego a los* Elementos *de Euclides.*[12] En una carta escrita en 1824 a Franz Adolf Taurinus, dice Gauss:

> [...] la suposición de que la suma de ángulos [de un triángulo plano] es menor [que dos ángulos rectos] lleva a una curiosa geometría, distinta de la nuestra (la euclidiana), pero totalmente consistente, misma que he desarrollado a mi entera satisfacción. [...] Los teoremas de esta geometría tienen la apariencia de ser paradójicos y, para el no iniciado, absurdos. No obstante, una reflexión serena nos muestra que no contienen nada que sea imposible.[13]

y más adelante añade: «Considera ésta una comunicación privada de la que ningún uso público, o uso que conduzca a la publicidad, se puede hacer.».[14] Tal era el peso de la tradición.

Al poco tiempo, en febrero de 1832, Gauss recibió una carta de Wolfgang Bolyai que contenía un apéndice escrito por su hijo Johann en el que éste describía muchos teoremas de la geometría no euclidiana. A su vez, en la lejana ciudad de Cazán, Lobachevsky publicaba casi los mismos resultados, sin que los Bolyai tuvieran conocimiento de ello.[15] Es sabido que el texto de Lobachevsky atrajo muy poca atención en Rusia, y como estaba escrito en lengua vernácula, casi ninguna fuera de ese país. Es más, hasta poco antes de 1860 sus trabajos fueron prácticamente ignorados, y quienes los conocieron vieron en ellos fantasías sin serias implicaciones, no una parte legítima de las matemáticas. Pero eso era lo de menos: el muro euclidiano ya se había socavado.[16]

---

[11] La nueva geometría surgió, no como una crítica de la geometría euclidiana ni como extensión de un intento fallido por demostrar el quinto postulado, sino por el afán de discutir esa exigencia básica de ser la única geometría posible.

[12] Ciertamente este aforismo es una exageración, sobre todo si pensamos que la idea de Dios no tiene por qué ser considerada en este contexto. No obstante, ilustra muy bien el espíritu de una época en la que la física de Newton dominaba el horizonte (es decir, el espacio de la física era el euclidiano) y en la que Kant proporcionó una sólida justificación filosófica del tiempo y el espacio absolutos de la física newtoniana. Si lo que molesta en el aforismo es la referencia a Dios (que le da toda su fuerza literaria), podríamos decir lo siguiente: *el espacio se estructura con apego a los* Elementos *de Euclides*, así, poniendo en primer lugar a los *Elementos*, no al espacio.

[13] Tomado y traducido de DeLong, 1971, pp. 46-47.

[14] *Ibid.*

[15] El texto de Lobachevsky data de 1829, y los Bolyai no supieron de él sino hasta 1848.

[16] La información sobre estos descubrimientos se difundió lentamente. Johann Bolyai dio a conocer sus resultados en 1832 como un apéndice a un trabajo de su padre, y nunca volvió a publicar nada más sobre el tema, mientras que Lobachevsky tuvo que hacer una presentación en alemán en 1840, y otra en francés en 1855 para divulgar su trabajo. En el apéndice 3 se halla un comentario sucinto sobre esta geometría.

El derrumbe de la geometría euclidiana como única posibilidad se consumó con la aparición en escena de un tercer tipo de geometría, ésta basada en la siguiente hipótesis: *por un punto fuera de una línea recta ninguna paralela a ella se puede trazar*. Esta posibilidad, equivalente a la hipótesis del ángulo obtuso, fue descartada inicialmente porque contradecía la idea de que la línea recta tiene una longitud infinita. No obstante, en 1854 Bernhard Riemann (1826-1866), en su habilitación como profesor de la Facultad de Filosofía de Göttingen, mostró, al establecer la diferencia entre *infinito* e *ilimitado*, la posibilidad de desarrollar una geometría basada en esta hipótesis modificando los postulados 1, 2 y 5 de Euclides del siguiente modo:

1') Dos puntos distintos determinan al menos una línea recta.
2') Toda línea recta es ilimitada.
3') Todas las líneas rectas pertenecientes a un mismo plano se cortan.

Este trabajo de Riemann[17] se considera el punto de partida de la investigación geométrica moderna y tuvo una influencia decisiva en el desarrollo de teorías como la geometría diferencial y el cálculo tensorial, y en la elaboración del concepto de espacio con un número arbitrario de dimensiones. Una de sus características es que substituye los arcaicos métodos sintéticos de Euclides con los métodos de la geometría diferencial. Este giro permitió generalizar el concepto de espacio y elaborar una nueva teoría de los espacios abstractos, misma que más tarde se aplicó con éxito en la teoría de la relatividad. Literalmente, grandes porciones de la matemática moderna tienen su origen en este notable trabajo, que no sólo selló el fin del imperio euclidiano, sino que proclamó la libertad de crear los espacios de los que se habrá de ocupar la geometría, es decir, reivindicó el derecho de las matemáticas a elegir libremente su objeto de estudio.[18]

Para concluir diremos lo siguiente. En nuestros días lo correcto es preguntar, no cuál es la geometría *verdadera*, sino cuál se ajusta mejor a la naturaleza del problema considerado. Ciertamente, para dibujar y construir edificios y puentes o para medir áreas en la superficie terrestre, la geometría euclidiana es tal vez la más pertinente, por la sencilla razón de que es la más simple.[19] En cuanto a la relación entre la geometría y el espacio físico, este problema

---

[17] *V.* Riemann, 1968: *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría.*
[18] Para un comentario sucinto sobre la geometría esférica, véase el apéndice 3.
[19] Veamos el significado de esto último con un ejemplo. Supongamos que para calcular el área de un triángulo sobre la superficie terrestre preferimos recurrir a la geometría esférica en vez de la habitual geometría euclidiana. La fórmula para el área es en este caso $[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi] \cdot r^2$, donde α, β y γ son los ángulos del triángulo (cuya suma, sabemos, es mayor que π) y r es el radio de la esfera. Como el radio terrestre es aproximadamente igual a 6500 km, la fórmula del área se transforma en $6500 \cdot [(\alpha + b + \gamma) - \pi]$. Por comodidad, supongamos que los tres ángulos son iguales, y que los lados del triángulo miden 100 km cada uno. Para calcular el valor del ángulo $\alpha = \beta = \gamma$ recurrimos a la siguiente

ya no se considera asunto de las matemáticas, sino de la física o de las ciencias experimentales, limitándose la necesidad de los enunciados geométricos a su entorno axiomático y la actividad del geómetra a la confección de distintos modelos.

1.2.3 La consistencia de las geometrías no euclidianas

Aunque Lobachevsky, Bolyai y Riemann no encontraron contradicciones al explorar las nuevas geometrías y confiaban en que eso jamás sucedería, nada garantizaba este hecho. ¿Eran no contradictorias las nuevas teorías? Ésta era una pregunta novedosa, pues hasta aquella época nadie se había planteado este problema: los axiomas de la geometría eran verdaderos y todo sistema de proposiciones verdaderas es de suyo *consistente*.[20] No obstante, entre los sistemas rivales, sólo uno de ellos podría ser verdadero acerca del espacio físico, por lo que nada aseguraba que los tres fueran consistentes, aunque así se creyera. ¿Cómo probar este hecho? Sobre la base de la lógica tradicional no se podía dar una respuesta definitiva: el hecho de que no se hubiera encontrado ninguna contradicción no garantizaba nada, a lo más era una evidencia empírica. ¿Había alguna manera de decidir la cuestión?

En 1868 Eugenio Beltrami (1835-1899) publicó un artículo en el que dio finalmente una respuesta parcial al problema de la consistencia de la nueva geometría. En él demuestra que la geometría de Lobachevsky se puede interpretar como la geometría sobre cierta clase de superficies en el espacio euclidiano tridimensional.[21] Con ello dejó ver que cualquier inconsistencia en la nueva geometría se traduciría en una inconsistencia en la geometría euclidiana. Resulta así que aquélla es tan consistente como ésta. Tiempo después Poincaré descubrió algo similar: la geometría que resulta de suponer que por un punto fuera de una línea recta más de una paralela a ella se puede trazar, se puede interpretar como la

fórmula, válida en la trigonometría esférica: $\cos\alpha \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c = \cos a - \cos b \cdot \cos c$, donde a, b y c son los lados del triángulo. En este caso el resultado es $\cos\alpha \approx 0.49997041$, de donde resulta que $\alpha \approx 1.04723171$ radianes, 60° 0' 8", aproximadamente (en la geometría euclidiana, $\alpha = 60°$). Sustituyendo en la fórmula resulta que $A \approx 4330.25$ km^2. Si ahora calculamos el área con la tradicional fórmula euclidiana, $A = (\textit{base} \times \textit{altura}) \cdot \frac{1}{2}$, el resultado es $A \approx (100 \times 86.60254037) \cdot \frac{1}{2} \approx 4330.13$ km^2, con una diferencia de 0.12 km.^{2}, es decir, un margen de error menor que el 0.003%.

[20] Consistente: que de sus principios no se puede deducir ninguna contradicción. Dos proposiciones contradictorias entre sí no pueden ser verdaderas a la vez, ya no digamos acerca del espacio físico, sino acerca de nada en absoluto. El supuesto tácito en estas consideraciones es el siguiente: *un conjunto de proposiciones verdaderas no puede ser contradictorio, pues aquello acerca de lo que son verdaderas no obedecería el principio aristotélico de no contradicción*. Este principio dice que *Nada puede ser y no ser simultáneamente*. El recíproco de este supuesto (i. e., que *si un conjunto de proposiciones es consistente, es verdadero*) no es necesariamente cierto. Para empezar, la cuestión está mal planteada, pues la consistencia es una propiedad formal, mientras que la verdad es una cuestión semántica, externa al sistema (es decir, si no se ha especificado el objeto del discurso, ¿acerca de qué sería verdadero el conjunto de proposiciones?).

[21] Es decir, que dichas superficies son un *modelo* de la geometría de Lobachevsky, donde por *modelo* se entiende una interpretación que hace verdaderos los axiomas.

geometría de ciertos puntos y semicírculos en el plano euclidiano. El resultado es el mismo: toda contradicción en esta geometría no euclidiana se transformaría en una contradicción en la euclidiana (lo que resultaría en la imposibilidad de esta última). En cuanto a la geometría de Riemann, ésta también se puede interpretar como la geometría de la superficie de una esfera euclidiana definiendo adecuadamente los conceptos de punto y línea recta.[22]

La existencia de modelos euclidianos de las nuevas geometrías no demuestra que éstas sean consistentes, sino que lo son en la medida en que la euclidiana lo sea. En efecto, si, por ejemplo, la geometría de Riemann fuera inconsistente, esto permitiría demostrar en ella dos proposiciones, una la negación de la otra, que serían verdaderas acerca de la esfera euclidiana que sirve como modelo de dicha geometría. Por lo tanto, la geometría euclidiana también sería inconsistente, pues de los postulados que sirven como base para la construcción de la esfera se deducirían contradicciones. Se concluye que si la geometría de Riemann es inconsistente, la euclidiana también lo es o, recíprocamente, que si la geometría euclidiana es consistente, la geometría de Riemann también lo es.

Como veremos, la cuestión de la consistencia terminó siendo el punto central de las investigaciones de Hilbert en torno a los fundamentos de la matemática. La respuesta que en breve daremos para el caso de las geometrías no es sino parcial y no lleva a un solución definitiva del mismo. El mérito de Hilbert consiste en haber diseñado más tarde un método original para atacar el problema, cuya dificultad correspondió a Gödel aclarar.

La mutua dependencia lógica entre las distintas geometrías puso en evidencia que el quinto postulado de Euclides era independiente y por lo tanto un verdadero postulado, pues no se le podía demostrar a partir de los otros cuatro.

En efecto, si el postulado fuera un teorema en el sentido indicado, la propiedad enunciada por él se habría de cumplir en todas las interpretaciones legítimas de los cuatro primeros postulados. No obstante, en algunas de ellas (como, por ejemplo, las superficies de Beltrami), lo que prevalece es la negación del quinto postulado, hecho que muestra su independencia en relación a los demás. Ahora sabemos por qué tantos y tan notables geómetras no pudieron demostrar el quinto postulado: porque esto resulta imposible.

Desde una perspectiva más amplia, el descubrimiento de las geometrías no euclidianas trajo consigo un nuevo modo de ver la matemática en general. En particular, la idea de que la geometría euclidiana es inherente a la naturaleza y sus proposiciones verdades necesarias,

[22] En el apéndice 3 el lector encontrará una exposición más o menos detallada de sendos modelos euclidianos para las geometrías de Lobachevsky y de Riemann.

fue abandonada.[23] Hoy en día es difícil valorar la importancia de estos descubrimientos. En su momento fueron aclamados como *preeminentes en la emancipación del intelecto humano* y *el más notable y sugestivo logro del siglo diecinueve*. Su efecto fue inmediato: en todos los campos del conocimiento, los axiomas dejaron de ser "verdades evidentes" para convertirse en hipótesis cuyo carácter descriptivo de algún tipo de estructura (por ejemplo, la del espacio físico) habría que comprobar (lo que, por otra parte, ya no concernía a la matemática).[24]

Este cambio no se dio en forma aislada. En general, la matemática dejó de depender de la existencia y propiedades de los objetos sobre los que versan sus teorías y pasó a ser una inmensa construcción racional. Desde esta perspectiva, cada teoría se puede entender como un entramado de relaciones que no necesita para su edificación sino de su consistencia interna, y en la que incluso pueden coexistir teorías rivales en pie de igualdad.[25]

En efecto, desde el momento en que todas las geometrías comenzaron a ser tratadas por igual se abrió un novedoso panorama, según el cual el criterio de aceptabilidad de una teoría matemática es sólo uno: su coherencia interna. Esto no podía ser de otro modo: si la validez de una teoría geométrica ya no dependía del hecho de que fuera descriptiva de la estructura del espacio físico (para lo que había más de una candidata), su condición de teoría matemática pasó a depender de su coherencia interna, es decir, de su posibilidad lógica. Y si bien las ciencias, principalmente la física, siguieron siendo una fuente inagotable de problemas para la matemática, ésta dejó de fundamentarse en el mundo externo. En adelante, para admitir sus teorías no era necesario explicar ni su origen ni su propósito, prevaleciendo como única condición la consistencia. Virtualmente, esta condición se convirtió en manos de Hilbert en el único criterio para aceptar una teoría, (es decir, en su *fundamento*)[26], y la matemática dejó de ser la *ciencia de la cantidad y la extensión* de los antiguos, para convertirse en la *ciencia de lo posible*, donde por «posible» se entiende aquello que no conduce a contradicción.

En cuanto a la consistencia, ésta es una propiedad lógica, no ontológica, y al adoptarla como único criterio de validez de sus teorías, la matemática se liberó de la obligación de ser

---

[23] Es decir, la geometría abandonó toda pretensión de tener un fundamento en lo real, de ser descriptiva de relaciones entre objetos predeterminados.

[24] Riemann diría que los postulados de Euclides no son necesarios, sino hipótesis que se pueden justificar empíricamente hasta cierto punto. Cf. Riemann, 1968, p. 281.

[25] Como veremos, en la misma época el álgebra se liberó del concepto de *cantidad*, abriendo las puertas a la consideración de una multitud de operaciones que dependían más que nada de su representación simbólica.

[26] Es decir, el único *fundamento* de una teoría sería la propiedad formal de ser no contradictoria o consistente, lo cual no requiere que se exhiba un sistema de objetos acerca del cual la teoría es verdadera.

descriptiva de un "mundo externo".[27] Esta idea de ya no "referirse al mundo externo" se hizo presente incluso al investigar la consistencia de las geometrías no euclidianas, pues todos los modelos que de ellas se dieron fueron construcciones al interior de la geometría euclidiana. Como veremos, lo mismo ocurrió al investigar la consistencia de esta última, para la que lo único que se pudo ofrecer fue un modelo algebraico.

En este sentido, el nacimiento de las geometrías no euclidianas significó el derrumbe de la matemática como disciplina descriptiva de las propiedades necesarias del espacio, y la pérdida de la unidad en el conocimiento del mundo. La que fuera verdad inamovible acerca de la estructura del espacio físico se quebrantó desde sus cimientos, y junto con ella la seguridad de que la matemática es conocimiento de lo real y encierra firmes verdades acerca del universo.

No pudo haber mejor culminación de la matemática decimonónica que el replanteamiento de la naturaleza de la matemática misma e, indirectamente, del método axiomático. A su vez, este cambio en el punto de vista en torno al significado de las teorías matemáticas —según el cual éstas ya no representan una verdad inamovible— modificó la relación entre las nociones de verdad y demostrabilidad que, como veremos, siempre estuvo en el centro de las consideraciones de Gödel.

---

27 La consistencia, repetimos, es una propiedad formal, que no depende del significado que se les dé a los conceptos básicos, y puede por lo mismo ser investigada sin recurrir a nada externo al sistema axiomático. Esta posibilidad será la base del llamado *Programa de Hilbert* que habremos de considerar más adelante.

1.3 Un cambio en el concepto: la axiomática formal

La existencia de modelos euclidianos de las nuevas geometrías hizo ver que éstas son tan posibles como la euclidiana y no meras curiosidades teóricas, quizá inconsistentes. Este descubrimiento trajo consigo dos problemas: primero, el de la relación entre la geometría euclidiana y el espacio físico; segundo, el de la consistencia de la geometría euclidiana, pues de la solución favorable de este problema dependía la consistencia de las otras geometrías. Para ello fue menester un cambio: había que exponer la geometría como un sistema de proposiciones desligado de toda representación, es decir, reconstruirla de manera rigurosa, para así investigar sus propiedades lógicas.[1]

No deja de ser sorprendente el hecho de que las distintas geometrías son incompatibles entre sí sólo en el sentido de que no pueden ser simultáneamente verdaderos sus axiomas. Cada una de ellas, tomada por separado, es un cuadro distinto del espacio, mas esto no significa que la concordancia de una de ellas con el espacio físico haga imposibles a las demás. De hecho, lo que sucede es lo contrario: la existencia de modelos de las unas en las otras muestra su mutua posibilidad, en el sentido de que si una de ellas es verdadera respecto a un sistema de objetos, con ellos se pueden construir otros sistemas de objetos acerca de los cuales sería verdadera alguna de las otras, de modo que la inconsistencia de cualquiera de ellas equivale a la inconsistencia de las demás, quedando en evidencia su mutua posibilidad lógica.

1.3.1 La axiomática de Hilbert

Entre 1882 y 1899 fueron propuestas diversas axiomatizaciones para la geometría elemental, entre las que se cuentan la de Moritz Pasch (1843-1930), la de Giuseppe Peano (1858-1932) y la de David Hilbert (1862-1943). Fue también en este período que el método axiomático encontró su expresión moderna y tomó la forma con que se le conoce hoy en día. El tratado *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la geometría) de David Hilbert es quizá la mejor presentación del nuevo enfoque y la mejor exposición moderna de las bases de la geometría euclidiana; es además la más conocida de todas y la única que consideraremos en este texto. Tiene la virtud de estar expuesta en un lenguaje sumamente accesible y de que en ella se vislumbra la postura de Hilbert ante la matemática.

[1] Esto no significa que no había de tenerse en mente ninguna representación de la teoría al momento de su reconstrucción axiomática, sino que ni el despliegue de la teoría ni su prueba de consistencia se habría de apoyar en dicha representación, por demás un tanto incierta.

El texto fue el resultado de un curso que Hilbert impartió en la Universidad de Göttingen en 1898-1899, consagrado al análisis axiomático de la geometría. Dicha obra pronto se convirtió en un clásico en su campo y en su momento hizo más que cualquier otra para promover el método axiomático moderno y establecer un nuevo estilo de presentar las teorías matemáticas.

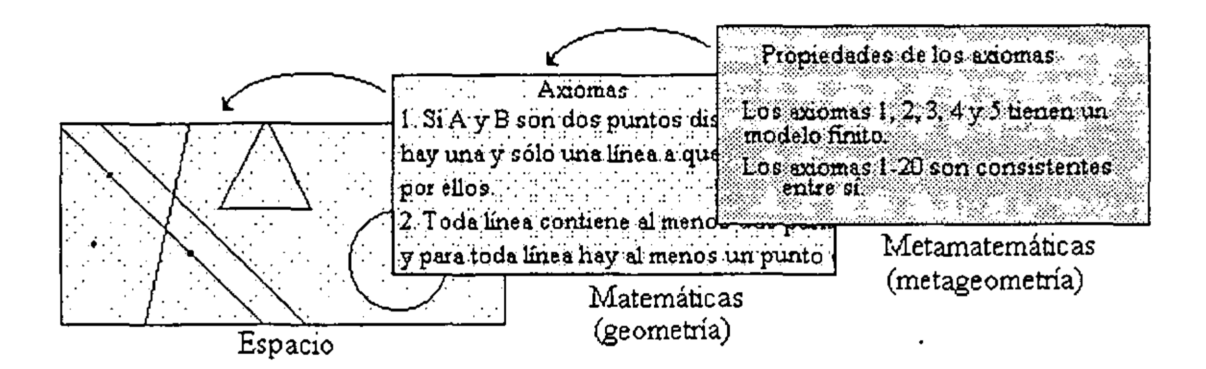
Mediante un reducido número de postulados para la geometría euclidiana sólida y plana, y utilizando para ello un mínimo de símbolos, Hilbert tuvo éxito al convencer a los matemáticos de la naturaleza hipotético-deductiva de la geometría. Pero el efecto del trabajo fue más allá de esto, pues sirvió como punto de partida para implantar el método axiomático no sólo en la geometría, sino en prácticamente todas las ramas de la matemática moderna. El impulso que dio este pequeño libro a las investigaciones en torno a los fundamentos de la matemática no se puede subestimar, pudiéndose considerar que el *programa de Hilbert*, que más adelante veremos, fue una secuela del mismo. Hermann Weyl se expresa de esta obra con las siguientes palabras:

> La tierra estaba preparada, principalmente por la escuela italiana de geómetras. Aun así, parecía como si en el horizonte, donde un puñado de hombres con un fino sentido de la orientación se habían abierto camino en el crepúsculo, hubiese aparecido de súbito el Sol. Con toda claridad y firmeza vemos establecerse el concepto axiomático, según el cual toda la geometría es un sistema hipotético-deductivo: depende de las definiciones implícitas de los conceptos de los objetos espaciales y de relaciones que contienen los axiomas, no de la descripción de su contenido intuitivo. En él se levanta un sistema de axiomas geométricos completo y natural. Se les exige que satisfagan los requisitos lógicos de consistencia, independencia y completud, y por medio de unas cuantas geometrías muy peculiares, construidas *ad hoc*, la prueba de independencia se logra en detalle.[2]

Al comienzo del libro Hilbert fija con todo rigor las bases del tratamiento axiomático de la geometría, sin la ayuda de ningún simbolismo especial y en un lenguaje no más técnico que el de Euclides. Algo novedoso en el texto es que parte de la obra está dedicada a investigar cuestiones que hoy en día se denominan *metamatemáticas*, en las que el objeto de estudio ya no son los puntos, las líneas y los planos, sino la geometría misma, es decir, sus axiomas. De estas investigaciones, la primordial es la destinada a establecer la consistencia de los axiomas, en tanto que las otras se centran principalmente en el estudio de la dependencia lógica entre proposiciones —por ejemplo, qué teoremas se deducen de qué axiomas, o si los axiomas son independientes entre sí. De éstas, la de menor relevancia es la cuestión de la

[2] Weyl, 1944, p. 500

independencia, que más que nada se relaciona con la elegancia en la exposición, y cuya inobservancia no afecta el contenido de la teoría.[3]



Esquema de la actividad metamatemática

Mientras que Euclides distingue entre axiomas y postulados, en los *Grundlagen* ambos términos se consideran sinónimos y designan las proposiciones que se toman como punto de partida de la demostración. Esto significa, entre otras cosas, que ya no vale considerar los términos iniciales como datos intuitivos, ni los axiomas como evidencias: para los fines de la demostración es irrelevante el significado que pudieran tener los axiomas, pues lo único que importa es el entramado de relaciones a que dan lugar. Por tanto, los términos iniciales, junto con las relaciones básicas, permanecen indefinidos, impidiéndose de esta manera que en las demostraciones intervengan elementos extraños a la teoría, como sucede, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides, donde el significado de los términos iniciales lleva a conclusiones que no se siguen de los postulados. En este sentido, la obra de Hilbert se debe considerar como una continuación de la Euclides, en la que los defectos de su construcción habrían de se corregidos.

En cuanto al lenguaje, Hilbert podría haber escrito las proposiciones geométricas en la notación simbólica desarrollada por Peano y su escuela, pero no lo quiso hacer. Por ejemplo, en vez del enunciado «los puntos A y B están en la recta a» pudo escribir simplemente $\phi(A, B, a)$, de modo que la expresión misma no hiciera referencia a ningún tipo de relación en su escritura. Una fórmula como $\phi(A, B, a)$ representaría en general una relación entre ternas de objetos, de la que lo único que sabríamos sería lo que especificaran los axiomas. No obstante, Hilbert prefirió no recurrir a un simbolismo de esta naturaleza por razones que expondremos más adelante.

[3] En la metamatemática lo que se estudia son las propiedades de los sistemas deductivos (v. gr., su consistencia), o la manera en que sus axiomas se relacionan entre sí, lo cual, en el caso de la geometría, no atañe a puntos, líneas y triángulos, sino a los enunciados con los que no referimos a ellos (un segundo nivel de abstracción).

La exposición axiomática en los *Grundlagen* comienza con las siguiente palabras:

> *Aclaración.* Pensemos en tres clases diferentes de objetos. Llamemos a los objetos del primer sistema *puntos* y designémoslos con A, B, C, ...; llamemos a los objetos del segundo sistema *rectas* y designémoslas con a, b, c, ...; a los del tercer sistema llamémoslos *planos* y designémoslos con α, β, γ, ... Los puntos se llaman también *elementos de la geometría lineal*, puntos y rectas se llaman *elementos de la geometría plana*; y puntos, rectas y planos se llaman *elementos de la geometría espacial* o del *espacio*.
>
> Supongamos que puntos, rectas y planos están en ciertas relaciones mutuas que designaremos con las palabras «estar en», «entre», «paralelo», «congruente» y «continuo», cuya exacta y completa descripción se logrará por medio de los *axiomas de la geometría*.[4]

Todo lo anterior significa que en los *Grundlagen* los objetos y las relaciones geométricas se definen de manera implícita por medio de los axiomas, siendo irrelevante el significado que pudieran tener al margen de ella, pues en su desarrollo sólo se habría de apelar a la lógica.[5] Si alguien preguntase ¿qué son los puntos?, ¿qué son las líneas rectas? la única respuesta sería "cualquier sistema de objetos y relaciones entre ellos que satisfaga estos postulados" y se le mostraría la lista de axiomas que estamos a punto de enumerar. Esta postura, que evita asumir la existencia extramatemática de los objetos considerados, no fue del agrado de todos. Por ejemplo, Frege le reprocha a Hilbert que con base en sus postulados, él (Frege) no puede saber si su reloj de bolsillo es un punto, pues en ningún sitio se da una definición explícita de este concepto.[6] Aun así, una respuesta a tal pregunta es que su reloj de bolsillo será un *punto* en caso de que forme parte de un sistema de objetos que satisfagan los axiomas. Hay otra razón para dejar indefinidos ciertos términos: así como no todo se puede demostrar en un sistema deductivo, también debe haber términos indefinidos para evitar un recurso al infinito o un procedimiento circular.

Hilbert distribuye los axiomas de la geometría en cinco grupos, cada uno de los cuales expresa, según dice, «ciertos hechos, conexos entre sí y fundamentales, de nuestra intuición.».[7] Tales grupos de axiomas los llama de la siguiente manera: Grupo I, axiomas de

---

[4] Hilbert 1903, p. 1.

[5] En los *Grundlagen*, los conceptos denotados por los términos geométricos no son entidades intuitivas (aunque se hayan originado de esa manera), ni entes cuyas propiedades dependan del hecho de ser idealizaciones de algo dado en la intuición. Por el contrario, se trata de objetos de los que lo único que "sabemos" es lo enunciado por los postulados. En este sentido, nada podemos saber acerca de tales objetos que no se deduzca de los axiomas, evitándose de esta manera toda referencia a algo externo al sistema. De la misma manera, como se trata de desarrollar la teoría al margen de la intuición, los axiomas no se pueden justificar apelando a su evidencia.

[6] Frege, 80, pp. 31-51. La cita textual es: «Dadas sus definiciones, no sé cómo decidir la cuestión de si mi reloj de bolsillo es un punto.»..

[7] Hilbert 1903, p. 1.

incidencia; grupo II, axiomas de *orden*; grupo III, axioma de *paralelismo*, (axioma de Euclides), grupo IV, axiomas de *congruencia* y grupo V, axiomas de *continuidad*.

Lo que sigue es una presentación de los axiomas para la geometría plana, tomados, con ligeras modificaciones, de la edición de 1899.[8]

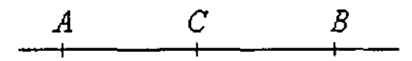
Axiomas de incidencia

I.1 Si A y B son dos puntos distintos dados, hay una y sólo una línea a que pasa por ellos.

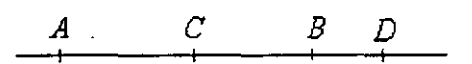
I.2 Toda línea contiene al menos dos puntos y para toda línea hay al menos un punto que no está en ella.

Axiomas de orden

II.1 Si el punto C está entre A y B, entonces A, B y C están en una misma línea, C está entre B y A, B no está entre A y C, y A no está entre B y C.



II.2 Si A y B son dos puntos distintos dados, hay un punto C que está entre A y B, y un punto D tal que B está entre A y D.



II.3 Si A, B y C son tres puntos distintos en una misma línea, entonces uno de ellos está entre los otros dos.

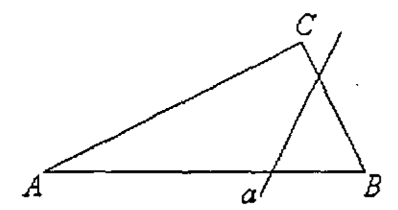
Definiciones. Por el *segmento AB* se entiende los puntos A y B y todos los que están entre A y B. Los puntos A y B se llaman *extremos* del segmento. Un punto C se dice que está *sobre* el segmento si es alguno de sus extremos o está entre A y B.

Definición. Dos líneas, una línea y un segmento, o dos segmentos, se dice que se *cortan* si hay un punto que está en ambos.

Definición. Sean A, B y C tres puntos que no están en una misma línea. Por el *triángulo ABC* se entiende los tres segmentos AB, BC y CA. Se dice que estos segmentos son los *lados* del triángulo, y los puntos A, B y C se llaman *vértices* del triángulo.

II.4 (Postulado de Pasch) Una línea que corta un lado de un triángulo y que no pasa por ninguno de sus vértices deberá cortar también otro lado del triángulo.

[8] Si el lector lo considera pertinente, puede de momento omitir la lectura de los axiomas.

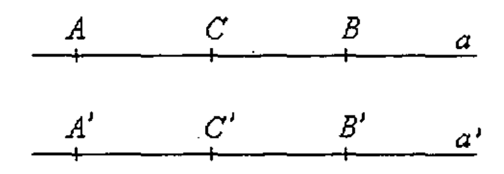


Axiomas de congruencia

III.1 Si A y B son dos puntos distintos, y si A' es un punto en una línea m, entonces hay exactamente dos puntos B' y B'' en m tales que el par de puntos A', B' es congruente con el par de puntos A, B, y el par de puntos A', B'' es congruente con el par de puntos A, B; además, A está entre B' y B$''$.

III.2 Si dos pares de puntos son congruentes al mismo par de puntos, entonces son congruentes entre sí.

III.3 Si el punto C está entre A y B, y el punto C' está entre A' y B', y si el par de puntos A, C es congruente con el par A', C' y el par de puntos C, B es congruente con el par C', B', entonces el par de puntos A, B es congruente con el par A', B'.



Definición. Dos segmentos se dice que son *congruentes* si los puntos extremos de los segmentos son pares de puntos congruentes.

Definiciones. Por el *rayo AB* se entiende el conjunto de todos los puntos que están entre A y B, B mismo, y todos los puntos C tales que B está entre A y C. Se dice que el rayo AB *emana* del punto A.

Teorema. Si B' es un punto del rayo AB, entonces los rayos AB y AB' son idénticos.

Definición. Por *ángulo* se entiende un punto (llamado *vértice* del ángulo) y dos rayos (llamados *lados* del ángulo) que emanan del punto.

En virtud del teorema anterior, si el vértice de un ángulo es un punto A, y si B y C son dos puntos distintos de A en los dos lados del ángulo, podemos sin ambigüedad hablar del ángulo BAC (o CAB).

Definición. Si ABC es un triángulo, entonces los tres ángulos BAC, CBA y ACB son llamados *ángulos del triángulo*. El ángulo BAC se dice que está *incluido* por los lados AB y AC del triángulo.

III.4 Si BAC es un ángulo cuyos lados no están en la misma línea y si A' y B' son dos puntos distintos, entonces hay dos y sólo dos rayos distintos $A'C'$ y $A'C''$ tales que el ángulo $B'A'C'$ es congruente con el ángulo BAC y el ángulo $B'A'C''$ es congruente con el ángulo BAC; además, si D' es cualquier punto sobre el rayo

$A'C'$ y D'' es cualquier punto sobre el rayo $A'C''$, entonces el segmento $D'D''$ corta la recta determinada por A' y B'.

III.5 Todo ángulo es congruente consigo mismo.

III.6 Si dos lados y el ángulo comprendido por ellos de un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados y el ángulo comprendido por ellos de otro triángulo, entonces cada uno de los ángulos restantes del primer triángulo es congruente con el ángulo correspondiente del otro triángulo.

Axioma de las paralelas

IV.1 (Postulado de Playfair) Por un punto dado A que no está en una recta m, pasa a lo más una recta que no corta a m.

Axiomas de continuidad

V.1 (Postulado de Arquímedes) Si A, B, C y D son cuatros puntos distintos, entonces hay en el rayo AB un conjunto finito de puntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que

(1) Cada uno de los pares $A, A_1; A_1, A_2; \ldots; A_{n-1}, A_n$ es congruente con el par CD, y
(2) B está entre A y A_n.

A A_1 A_2 A_3 A_4 A_{n-1} B A_n

V.2 (Postulado de completud) Los puntos de una línea constituyen un sistema de puntos tal que no se pueden añadir nuevos puntos a la línea sin transgredir al menos uno de los nueve postulados I.1, I.2, II.1, II.2, II.3, II.4, III.1, III.2 o V.1.

Estos quince axiomas son la base de toda la geometría euclidiana plana. Si el lector está interesado en saber cómo se deducen algunos teoremas básicos en esta teoría, puede consultar el texto original. Al hacerlo verá que tras la aparente informalidad en la exposición, Hilbert desarrolla la geometría con todo rigor. En cuanto a la obra en su conjunto, nos limitaremos a señalar algunos aspectos que consideramos relevantes.

1) El manejo que Hilbert hace del lenguaje es tan desenvuelto, que doquiera que éste ofrece un sinónimo adecuado lo utiliza libremente para denotar el mismo concepto abstracto. Así, por ejemplo, en vez de la expresión «el punto A está en la recta a» simplemente dice «la recta *a pasa* por el punto A» y cosas por el estilo. Este manejo un tanto informal del lenguaje no significa que esté faltando al rigor, sino que éste se puede alcanzar incluso en el ámbito del lenguaje ordinario. Hilbert tuvo sus razones para preferir este modo de expresión sobre el más preciso simbolismo lógico desarrollado por Peano: quería que su trabajo se viera como una continuación de esa larga tradición que se inicia con los griegos, consistente en construir una teoría racional de la estructura del espacio en la que, sin embargo, todos

saben de qué es de lo que se está hablando. De ahí que eligiera un conjunto de términos rayanos con la intuición.

2) Los axiomas del grupo I definen implícitamente la noción de «estar en», y establecen un vínculo entre los conceptos de *punto* y *línea* mediante relaciones de incidencia.

3) Los axiomas del grupo II, ya estudiados por Pasch, definen implícitamente el concepto de «estar entre». En particular, aseguran la existencia de un número infinito de puntos en una línea, y el hecho de que una línea no termina en ningún punto. También garantizan que el orden de los puntos en una línea no es cíclico, sino serial. El axioma II.4 (postulado de Pasch) difiere de los demás en el hecho de que no sólo trata de puntos en una línea, sino que nos informa acerca del plano como un todo. Estos axiomas de orden tienen importancia histórica en la medida en que Euclides no fue capaz de reconocer ninguno de ellos, pues sus argumentos respecto al orden entre los puntos tenían como base la evidencia de las figuras.

4) Los axiomas del grupo III definen implícitamente la noción de «congruencia» en relación a segmentos y ángulos. Estos axiomas tienen como propósito evitar el uso del concepto de movimiento, que algunos geómetras como Mario Pieri (1860-1904) habían utilizado con anterioridad. Por ejemplo, es interesante ver como con el axioma III.6 Hilbert introduce la congruencia de triángulos sin recurrir al método de superposición de Euclides.

5) El axioma IV.1, único de su grupo, es equivalente al quinto postulado de Euclides bajo la hipótesis de que la línea recta es infinita en su extensión. Dado que con base en los axiomas de los tres primeros grupos se puede demostrar que hay al menos una línea por el punto A que no intersecta a m, el papel del postulado de Playfair es asegurar que la paralela es única.

6) En cuanto al postulado de Arquímedes (axioma V.1), éste corresponde al habitual proceso de estimar la distancia de un punto a otro utilizando un patrón de medida (una *unidad*). Este axioma garantiza que si se comienza en uno de los puntos y se tiende hacia el otro una sucesión de distancias iguales al patrón de medida, eventualmente se sobrepasará al segundo. Este postulado es la base de toda la teoría de la medida y, en particular, de la teoría de las proporciones que Euclides desarrolla en los libros 5 y 6 de los *Elementos*. Por último, el axioma V.2 (postulado de completud) no es necesario para la deducción de los teoremas de la geometría euclidiana, pero permite establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de cualquier línea con los números reales, y es indispensable para introducir el sistema de estos números en la geometría analítica.

Tomando como base los axiomas de los grupos I-IV, se puede demostrar que los axiomas del grupo V son en conjunto equivalentes al axioma de Dedekind que caracteriza al sistema de los números reales. Por tanto, los axiomas del grupo V se pueden reemplazar por este último. Para enunciar el axioma necesitamos de la siguiente definición:

Definición. Considérese un segmento AB. Llamemos a uno de sus extremos, digamos a A, el *origen* del segmento, y al otro su *extremidad*. Dados dos puntos P y Q de AB, decimos que *P precede* a Q (o que *Q sucede* a P) si P coincide con el origen A o está entre A y Q. Un segmento AB considerado de esta manera se dice que es un segmento *ordenado*.

El axioma de Dedekind es el siguiente:

V'.1 (Postulado de Dedekind) Si los puntos de un segmento ordenado con origen A y extremidad B están separados en dos clases de modo que:

1) cada punto de AB pertenece a una y sólo una de las clases,
2) Los puntos A y B pertenecen a clases diferentes (que llamaremos la *primera* clase y la *segunda* clase), y
3) cada punto de la primera clase precede a cada punto de la segunda clase,

entonces hay un punto C de AB tal que todo punto de AB que precede a C pertenece a la primera clase y todo punto de AB que sucede a C pertenece a la segunda clase.

A la pareja formada por la primera y la segunda clase se le llama *cortadura de Dedekind*. Lo que el axioma establece es que toda cortadura en un segmento es producida por un punto del mismo, es decir, que no hay "huecos" o "agujeros" en el segmento. Esto permite establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de una línea recta y los números reales. En la sección **2.6** habremos de volver a este concepto.

Por último, algunos comentarios en los que de manera insistente se compara la exposición de Hilbert con la de Euclides, con especial énfasis en la pretendida "verdad" del discurso matemático.

7) En los *Grundlagen*, Hilbert abandona toda pretensión de fundar la geometría en lo real, es decir, la convicción de que la geometría describe relaciones entre objetos predeterminados. Ya no se tiene, como con Euclides, un conjunto de objetos geométricos privilegiados de cuya realidad se está convencido, ni proposiciones en el sentido clásico del término, que enuncian un contenido y se afirman a título de verdades.

8) En los *Elementos*, Euclides define explícitamente un conjunto de objetos geométricos fundamentales (punto, línea, superficie) con palabras claras y distintas porque ante el

entendimiento, y aun ante la vista, tales objetos se presentan clara y distintamente. Estos objetos, y las figuras derivadas de ellos (cual los polígonos construidos por rectas), son los principales protagonistas de sus teoremas.

En cambio en los *Grundlagen*, lo único que sabemos de los objetos considerados es lo que establecen los axiomas, es decir, hay un predominio de las relaciones sobre los objetos o, dicho en la jerga filosófica tradicional, prevalece la relación sobre la sustancia. En este sentido, como ya lo hemos señalado, ya no viene al caso preguntar ¿qué son los puntos y las líneas?, sino ¿qué propiedades tienen los puntos y las líneas? Por ello es que Hilbert procede de inmediato a demostrar que tales proposiciones no encierran contradicción, pues la teoría ya no se apoya en la supuesta existencia de un sistema de objetos que satisfacen los axiomas, pudiéndose dar el caso que sean varios sistemas los que lo hagan.[9]

9) Con base en lo anterior podemos decir que las proposiciones que figuran en los *Elementos*, lo son en el sentido clásico: no sólo enuncian un contenido, sino que afirman ser verdaderas o falsas. Esto es así porque en la base del sistema se ha colocado un conjunto de objetos de cuya realidad se está convencido y de los que se van descubriendo nuevas propiedades mediante la demostración.

En cambio en los *Grundlagen* no hay, en rigor, proposiciones, pues no hay objetos definidos explícitamente acerca de los cuales se pueda predicar nada preciso. De las proposiciones lo único que queda es su forma lógica: enuncian relaciones entre objetos indefinidos y lo enunciado no puede, por lo mismo, ser calificado de verdadero o falso. En otras palabras, en los *Grundlagen* lo único que se tiene es un sistema de enunciados formales —axiomas de enlace, de orden, de paralelismo, etc.— cuyo sentido no deriva del hecho de que se refieran a objetos claros y distintos (pues sólo necesita de ellos bajo la forma de constantes y variables), sino de que no se contradigan entre sí. Una construcción hipotética pura, independiente de la estructura en la que se origina, y en la que la verdad de los teoremas está condicionada a la de los axiomas (la cual, a su vez, está condicionada a la interpretación que se dé de los términos primitivos).

Este abandono de la proposición tradicional condujo eventualmente al desarrollo de la lógica general de relaciones (expuesta en lo que hoy se llama *lógica* o *cálculo de predicados*), con el consiguiente abandono de la proposición categórica propia de

[9] Véase el comentario (1) a los *Elementos* de Euclides de la sección 1.2.2.

Aristóteles (basada en la forma gramatical sujeto-predicado) y su substitución por la noción moderna de función proposicional.[10]

10) El uso que Hilbert hace de los términos primitivos en los *Grundlagen* deja ver que en el nuevo tratamiento axiomático de la geometría, su significado ya no desempeña ningún papel en la demostración. Hilbert gustaba de expresar esta idea diciendo que se podían reemplazar las palabras *"punto"*, *"línea"* y *"plano"* por *"mesa"*, *"tarro de cerveza"* y *"silla"* sin cambiar en nada la estructura formal de la geometría. Así, por ejemplo, los axiomas I.1 y I.2 de la "geometría" serían los siguientes:

> **I.1'** Si *A* y *B* son dos mesas distintas dadas, hay uno y sólo un tarro de cerveza *a* que pasa por ellas.
>
> **I.2'** Todo tarro de cerveza contiene al menos dos mesas, y para toda mesa hay al menos un tarro de cerveza que no está en ella.

Ciertamente, uno no deja de impacientarse cuando se ve expuesto a tales postulados, mas ello se debe a que éstos evocan ideas o imágenes que parecen absurdas o descabelladas. No obstante, desde un punto de vista formal, expresan exactamente lo mismo que los axiomas I.1 y I.2 de los *Grundlagen*, y no se podría hacc más geometría con unos que con los otros.

Para concluir este apartado queremos señalar que desde un principio la postura axiomática de Hilbert no contó con una aceptación unánime. Por ejemplo, Henri Poincaré (1854-1912), al comentar los *Grundlagen*, arremete contra la pretensión de no saber más allá de los axiomas qué son los puntos, las líneas y los planos con las siguientes palabras: «¿Qué son estas cosas? No solamente no sabemos nada —añade con ironía—, sino que tampoco debemos tratar de saberlas. No tenemos necesidad, y cualquiera que no hubiera visto jamás ni un punto, ni una línea, ni un plano, podría hacer tanta geometría como hacemos nosotros. De esta manera, para demostrar un teorema no es útil ni necesario lo que quiere decir.».[11] Más adelante Poincaré muestra sus reservas en torno al carácter puramente formal que se le ha impreso a la nueva matemática: «Lo que Hilbert había hecho para la geometría otros lo han querido para la aritmética y para el análisis. Si hubiesen tenido éxito, ¿estarían los kantianos condenados definitivamente al silencio?».[12] Aquí el problema que se ventila es el

---

[10] Llámase en general *categórica* a una proposición no limitada por condiciones. Esta terminología se empezó a aplicar al silogismo aristotélico después de que los estoicos desarrollaron el razonamiento hipotético. A las proposiciones del tipo *'si es de día, hay luz'* los griegos las llamaron hipotéticas. En ellas el enunciado tiene tan sólo un carácter condicional, (en el ejemplo no se afirma que haya luz, sino que la habrá en caso de que sea de día). A diferencia de esta clase de proposiciones, las llamadas categóricas se enuncian sin ninguna condición, son absolutas (v. gr., *'Sócrates es mortal'*).

[11] Poincaré, 1908. Cita tomada de la traducción al español, p. 114.

[12] *Op. cit*, p. 115. Poincaré se refiere a la tesis Kantiana de que la matemática se constituye de juicios sintéticos a priori, juicios no reducibles a identidades ni demostrables analíticamente. Russell, yendo más allá, trata de mostrar el carácter no ya analítico, sino tautológico de la matemática.

siguiente: ¿es posible eliminar la intuición, el contenido de las proposiciones en la matemática? o, como lo plantea Poincaré: «Pues bien, lo que quiero averiguar es si es verdadero que una vez admitidos los principios lógicos se pueden, no digo descubrir, sino demostrar todas las verdades matemáticas, sin llamar de nuevo a la intuición.».[13] Como veremos, a la luz de las investigaciones modernas en torno a los fundamentos de la matemática las dudas de Poincaré tuvieron un sentido premonitorio.

1.3.2 El concepto de teoría axiomática formal

Como hemos visto, y a diferencia de la geometría clásica, la matemática moderna ya no presupone un objeto de estudio cuyas propiedades quedan expresadas por definiciones unívocas y axiomas evidentes. Por el contrario, desde el punto de vista contemporáneo los axiomas son simplemente el punto de partida de la demostración y sólo por ello se les debe admitir. Y así como debe haber axiomas en cualquier sistema deductivo, también debe haber términos indefinidos para evitar un recurso al infinito o un procedimiento circular. Este rechazo de toda noción semántica fue la vía por la cual se transitó de la axiomática intuitiva de los griegos a la axiomática formal de nuestro tiempo y que podemos resumir así:

1. Ciertos términos iniciales se seleccionan deliberadamente como indefinidos. Se les llama *términos primitivos*.
2. Cualquier otro término técnico de la teoría se define por medio de los términos primitivos. A éstos se les llama *términos definidos*.
3. Ciertas proposiciones relativas a los términos primitivos o definidos se enuncian sin demostración. A estas proposiciones se les llama *axiomas* o *postulados*.
4. Cualquier otra proposición relativa a los términos primitivos o definidos, para pertenecer a la teoría se ha de deducir de los postulados. A estas proposiciones se les llama *teoremas*.[14]

Como se ve, en una teoría formal los postulados se admiten sólo por razones de procedimiento y no pueden decirse ni verdaderos ni falsos. Son, por así decirlo, un simple comienzo de la deducción. La indefinición de algunos de sus términos tiene como fin liberar la demostración del significado que a éstos se les pueda atribuir. En este sentido lo que se pretende es que la deducción sea formal e independiente de tales significados, como lo debe de ser de diagramas, figuras y otros recursos visuales. Sin embargo, salvo por Frege esta pretensión de formalizarlo todo no incluye los procedimientos de demostración, entre cuyos

[13] *Ibid.*
[14] En el apéndice 4 ilustramos el concepto de teoría axiomática formal con un ejemplo de geometría finita: la *geometría proyectiva de los siete puntos de Fano.*

principios se encuentran el de no contradicción y el del tercero excluido, por lo que en la axiomática formal éstos siguen sometidos a los dictados de la intuición. Esta omisión debió aguardar algunos años hasta que en el período 1910-1922 Bertrand Russell (1872-1970), Alfred N. Whitehead (1861-1947) y el mismo Hilbert propusieron los medios para subsanarla.

1.3.3 Propiedades de las teorías axiomáticas

La axiomática formal trajo consigo varios problemas que la antigua axiomática no conoció. Mientras los axiomas fueron evidentes, estaba implícito en la naturaleza de la lógica el que, al deducir correctamente a partir de ellos, no se podía ir a parar a contradicciones. Pero cuando los axiomas pasaron a ser simples suposiciones ni verdaderas ni falsas, no pudo excluirse la posibilidad de que apareciesen contradicciones en la teoría. ¿Cómo asegurarse, pues, de la consistencia de un sistema axiomático? En segundo lugar, al axiomatizar una teoría dada intuitivamente ¿cómo garantizar que toda proposición de la teoría es demostrable a partir de los axiomas adoptados (problema de la saturación o completud semántica)? Éstos fueron los problemas más importantes que el nuevo enfoque trajo consigo. Lo que sigue es un comentario más extenso de estas y otras nociones relacionadas.

1.3.3 Propiedades de las teorías axiomáticas

Modelos. Los postulados de una teoría axiomática formal carecen de significado por sí mismos. Si a los términos indefinidos se les asignan significados de modo que los axiomas devienen en proposiciones verdaderas, se dice que se tiene un *modelo* de la teoría. En tal caso los teoremas deducidos también devienen en proposiciones verdaderas, pues éste es precisamente el sentido que tiene la *deducción lógica*: el de inferir de premisas verdaderas, conclusiones verdaderas.

Consistencia. Un conjunto de axiomas es *consistente* si no es posible deducir de él un teorema que contradiga algún axioma u otro teorema. ¿Cómo se puede asegurar que un conjunto de axiomas jamás nos llevará a una contradicción? Una respuesta tentativa es la siguiente: exhibiendo un modelo del sistema. Sin embargo, este método no es del todo satisfactorio: puede ser el caso que el 'modelo' y sus propiedades se hayan determinado suponiendo la consistencia de otro sistema axiomático, en cuyo caso sólo se habrá logrado una prueba de consistencia relativa. Por ejemplo, la geometría analítica nos provee un modelo aritmético del espacio euclidiano, al mostrar que la geometría euclidiana no es más que una expresión distinta de los hechos del álgebra lineal y de la teoría de las ecuaciones lineales (esto lo veremos más adelante). Si una contradicción fuese deducible de los postulados de Euclides, una contradicción sería deducible de los axiomas para los números

reales. Resulta de ello que los postulados de la geometría clásica son consistentes en caso de que aquellos axiomas lo sean, lo que nos da una prueba de consistencia relativa, mas no absoluta. Este ejemplo deja ver que el método de los modelos no siempre da una respuesta concluyente a la pregunta por la consistencia.

La situación anterior no se presenta cuando el modelo se obtiene considerando sólo un número finito de objetos y relaciones entre ellos. En tal caso la "verdad" de los axiomas se puede establecer por inspección directa y ya nada nos puede hacer dudar: la prueba de consistencia es absoluta. La idea subyacente es que los eventos no se pueden contradecir entre sí, sólo las proposiciones: si los axiomas reflejan la verdad con respecto a cierto campo de objetos, no puede haber ninguna duda sobre su no contradicción.

Independencia. Una proposición es *independiente* de un conjunto de axiomas cuando no es deducible de los mismos. Un conjunto de postulados es *independiente* si cada axioma es independiente de los demás. Esta propiedad guarda una estrecha relación con la de consistencia: una proposición Q es independiente de un conjunto de postulados P si y sólo si su negación $\neg Q$ es consistente con P. Se ofrecen así dos caminos para establecer la independencia de una proposición Q respecto de un conjunto de postulados P:

(1) Exhibir un modelo de $P \cup \{\neg Q\}$.

(2) garantizar que ninguna combinación de inferencias puede producir la proposición Q como teorema.

La primera de estas posibilidades fue la que se utilizó al demostrar la independencia del quinto postulado de Euclides. La segunda, en cambio, no se puede llevar a cabo sin antes dar una enumeración completa de las reglas deductivas del sistema, i.e. definir en forma precisa el concepto de demostración.[15]

Completud. Un conjunto de axiomas es *completo* cuando no se le puede agregar ninguna proposición indemostrable sin incurrir en inconsistencia. Cuando un conjunto de axiomas es completo, cualquier proposición correctamente expresada en los términos del sistema es demostrable o *refutable* en él,[16] lo que quiere decir que cualquier proposición del sistema se puede decidir verdadera o falsa en relación con sus axiomas. Por ejemplo, los postulados de Euclides constituyen un sistema incompleto, pues hay proposiciones geométricas que no

[15] Todo sistema axiomático dependiente se puede simplificar eliminando los axiomas redundantes (ésta era la intención de Saccheri cuando trató de demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los demás). No es indispensable que un sistema de axiomas cumpla con esta propiedad, que tiene que ver más que nada con cuestiones estéticas: un sistema axiomático *elegante* no debe servirse de axiomas innecesarios.

[16] *Refutable* significa que la negación es demostrable.

son ni demostrables ni refutables a partir de ellos, v.g. "Dos círculos que inciden uno con el centro del otro, se intersectan."

Categoricidad. Un conjunto de axiomas es categórico cuando todos sus modelos son isomorfos entre sí, es decir, cuando los objetos y las relaciones de dos modelos cualesquiera se pueden poner en correspondencia biunívoca de modo que las relaciones correspondientes se cumplen o no a la vez en ambos modelos para los objetos correspondientes. Se puede decir que dos modelos isomorfos poseen una misma estructura, y que un conjunto categórico de axiomas tiene, en esencia, un sólo modelo.

Cabe señalar que no siempre se considera lo mejor el que un conjunto de axiomas sea categórico. Es más, en ocasiones conveniente que no lo sea, como en el caso de la teoría de grupos, en la que con un sólo sistema de axiomas se determinan propiedades comunes a una extensa variedad de estructuras diferentes entre sí.

En el apéndice **4** examinamos a manera de ejemplo algunas propiedades metamatemáticas de la *geometría proyectiva de los siete puntos de Fano*, entre las que se encuentran la consistencia, la independencia y la categoricidad de sus axiomas. Dicho estudio deja ver con toda claridad que los axiomas, aunque representen hechos fundamentales de nuestra intuición, pueden muy bien corresponder a situaciones no contempladas en un principio, pues a fin de cuentas lo único que se tiene a la mano es un conjunto de proposiciones que "reproduce" de manera imperfecta el contenido de nuestra intuición, pudiendo muy bien haber otros dominios que correspondan a la descripción. Si se nos permite utilizar una metáfora pictórica, podemos decir que el cuadro axiomático de lo dado en el ámbito de la intuición no es tan exacto como para que no haya otras situaciones radicalmente distintas que podamos considerar representadas por el mismo cuadro (es decir, que el cuadro no es tan preciso como para que no pueda ser el retrato de otro paisaje).

Se puede aducir con justa razón que esta limitación no es propia de toda teoría axiomática y que muy bien puede ser el caso que haya teorías matemáticas significativas que admitan una completa formalización. Esto, sabemos, es cierto sólo para un número muy reducido de teorías (uno de cuyos ejemplos es la geometría proyectiva de los siete puntos de Fano). En general, las teorías axiomáticas más poderosas están sujetas a limitaciones que no obedecen a errores u omisiones, sino a su propia naturaleza. Tales hechos limitativos tienen nombre: son los *teoremas de Gödel, Tarski y Church*, y para exponerlos requerimos del concepto de *sistema formal* que introduciremos en el capítulo **3**. Mas antes de hacerlo es necesario explicar las circunstancias que condujeron a la introducción de este concepto y situarlo en relación a las teorías axiomáticas. Para ello, nos habremos de referir al problema de los fundamentos de una matemática que con mucho habia rebasado los límites impuestos por la

intuición sensible o la intuición pura, y al modo en que Hilbert y otros investigadores trataron de darle solución.

Un primer paso en esta dirección es la manera en que Hilbert resuelve parcialmente el problema de la consistencia de la geometría, solución que plantea la necesidad de proceder de otra forma si lo que se pretende es una garantía absoluta, no relativa, de la misma. De este primer paso nos ocuparemos en la siguiente sección.

1.4 El problema de la consistencia de la geometría euclidiana

El libro sobre los fundamentos de la geometría de Hilbert es, además de una exposición de los principios de la geometría, una investigación metamatemática de sus axiomas. En él, aparte de presentar las bases de la geometría euclidiana de manera rigurosa, su autor resuelve de manera parcial el problema de la consistencia de sus axiomas (cuestión que no es de índole geométrica, sino lógica). Para ello construye un modelo aritmético del sistema, es decir, muestra que los axiomas se convierten en enunciados verdaderos cuando por «puntos» y «líneas» entendemos ciertos objetos aritméticos y algebraicos, mismos que se comportan como "dicen" los axiomas. Hilbert reafirma con ello el uso de modelos como una importante herramienta en la investigación metamatemática de las teorias axiomáticas.

Como sabemos, un *modelo* de una teoría axiomática es una realización de la misma construida en algún dominio (preferentemente matemático) que ya se tiene a la mano. En el caso específico de la geometría euclidiana, para construir el modelo hay que identificar los «puntos» y las «líneas» con ciertos objetos construidos a partir del sistema de los números reales y demostrar que bajo dicha identificación de los términos primitivos, todos los axiomas de la teoría se convierten en proposiciones verdaderas. Esto ilustra a la perfección la idea de que un modelo es un sistema matemático bien definido que tiene la estructura caracterizada por la teoría, y la negativa de los matemáticos a abandonar el dominio de la matemática misma para dar significado a sus teorías.

En cuanto al modelo para los axiomas de la geometría, el procedimiento que exponemos es muy cercano al de Hilbert en los *Grundlagen*, y tiene como base el método de las coordenadas introducido por René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) en el siglo XVII. Según este método, a cada punto del plano se le hace corresponder en forma unívoca un par de números que lo representan (sus *coordenadas*), y a cada línea recta se le hace corresponder una familia de ecuaciones equivalentes que son satisfechas única y exclusivamente por las coordenadas de los puntos de la línea.

Seamos más precisos. Para exhibir un modelo de la geometría lo primero es indicar qué significan los términos primitivos «punto», «línea», «estar en», «entre» y «congruente» y mostrar después que bajo tal glosa los axiomas de la geometría se convierten en teoremas de la teoría donde se les interpreta.

Para construir el modelo hacemos las siguientes identificaciones:

1) Por «punto» entendemos *pareja ordenada* (x, y) de números reales. A los números x e y se les llama *coordenadas* del punto.

2) Sean a, b y c tres números reales tales que a y b no son ambos cero. Por «línea» entendemos el conjunto solución de la ecuación $ax + by + c = 0$, es decir, el conjunto de parejas ordenadas (puntos)

$$\{(x, y) \mid x \in \Re, y \in \Re \text{ y } ax + by + c = 0\}$$

En este contexto, dos ecuaciones de primer grado en x e y cuyos coeficientes difieren entre sí en un factor constante distinto de cero, representan una y la misma línea, y cualquiera de ellas se llamará *ecuación de la línea*.

3) Decimos que un punto «está en» una línea si y sólo si las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la línea.[1]

4) Decimos que el punto (x, y) «está entre» los puntos (a, b) y (a', b') si y sólo si hay un número real t, mayor que 0 y menor que 1, tal que $x = a + t(a' - a)$ e $y = b + t(b' - b)$

5) Decimos que el par de puntos $p(x_1, y_1)$, $q(x_2, y_2)$ es «congruente» con el par de puntos $r(x_3, y_3)$, $s(x_4, y_4)$ si y sólo si $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$.

6) Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $A'(x_1', y_1')$, $B'(x_2', y_2')$ y $C'(x_3', y_3')$ seis puntos tales que B, C son distintos de A, y B', C' son distintos de A'. Decimos que los ángulos BAC y $B'A'C'$ son «congruentes» si y sólo si

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}} = \frac{(x_2' - x_1')(x_3' - x_1') + (y_2' - y_1')(y_3' - y_1')}{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}\sqrt{(x_3' - x_1')^2 + (y_3' - y_1')^2}}$$

Las ideas geométricas subyacentes a estas definiciones se exponen con todo cuidado en el apéndice 5, en el que además se bosqueja la demostración de que los axiomas de Hilbert corresponden a enunciados aritméticos verdaderos bajo esta lectura, y por lo tanto que la aritmética de los números reales suministra el modelo anhelado.

Cabe señalar que la interpretación de los puntos como parejas ordenadas de números reales es posible gracias al axioma **V.2**, que asegura que en toda línea habrá suficientes puntos como para que ésta constituya un continuo y se puedan poner en correspondencia uno a uno con los números reales.[2] La cuestión de la continuidad es fundamental para el cálculo diferencial e integral y el análisis matemático, y al parecer Hilbert introdujo el axioma **V.2** con el propósito de vincular al álgebra con la geometría y aplicar el cálculo en

---

1 Nótese que la relación «estar en» es una relación binaria entre puntos y líneas. Esta distinción es relevante en la medida en que pone de manifiesto la idea de que las matemáticas son una teoría general de relaciones.

2 Para un análisis más detallado de la relación entre el postulado de completud (básicamente, el postulado de Dedekind) y la recta numérica, consúltese Bartle, 1964, pp. 45-51.

la resolución de problemas. No obstante, y como ya lo hemos señalado, para deducir los teoremas de la geometría elemental el axioma V.2 no es necesario y la construcción de un modelo para los primeros catorce axiomas no requiere de la totalidad de los números reales, sino de los números algebraicos o una fracción de éstos. Fue así que en los *Grundlagen* Hilbert consideró para estos catorce axiomas no el modelo que acabamos de ver, sino uno más reducido, tomando como base un campo numérico más limitado.[3] La causa por la cual pensó que valía la pena dar una demostración por separado del menos comprehensivo teorema de consistencia fue que la "aritmética" a la que se relativizaba la consistencia de la geometría era más simple desde el punto de vista matemático, y por lo mismo menos dudosa o abierta a la duda filosófica que la prueba general.[4].

Una vez demostrada la consistencia de los axiomas, Hilbert procedió a demostrar que éstos eran, en todos los sentidos relevantes, independientes entre sí. Eso lo hizo, como dijera Weyl, «mediante algunas geometrías peculiares, construidas *ad hoc*»[5] en las que todos los axiomas se cumplen excepto aquel cuya independencia se demuestra, del que se cumple la negación. Dado el poco interés que tienen estas demostraciones para el tema que nos ocupa, las pasaremos por alto.

En suma: lo que Hilbert hizo para la geometría euclidiana fue construir un modelo dentro de la aritmética de los números algebraicos. Argumentó entonces que si una contradicción fuese deducible de los axiomas para la geometría, también se podría deducir una contradicción mediante un razonamiento puramente aritmético, de donde se sigue que, una vez garantizada la consistencia de la aritmética, la consistencia de la geometría euclidiana quedará asegurada (consistencia relativa). Así, aunque el método utilizado no establece la consistencia de la geometría de manera absoluta, al menos proporciona una prueba de ella en un sentido relativo, lo que constituye un avance sustancial en la investigación del problema. Además, este resultado permite ver que la aritmética de los números algebraicos es una teoría más comprehensiva y fundamental que la geometría, al menos desde el punto de vista de la lógica. Se suscitó así el problema de probar la consistencia de la aritmética, pero bajo circunstancias distintas: por una parte, ya no había una teoría más confiable a la

[3] La base del modelo consiste en todos los números algebraicos que se pueden obtener a partir del número 1 aplicando un número finito de veces las cuatro operaciones racionales —suma, resta, multiplicación y división— y una quinta operación, $\sqrt{1+\omega^2}$, donde ω denota un número que ya se obtuvo mediante las cinco operaciones.

[4] Tal referencia a los números no significa que Hilbert viole el principio de que el desarrollo de la teoría se ha de llevar a cabo evitando toda referencia a algo externo a la misma. Decir lo contrario es incurrir en un grave error: la prueba de consistencia relativa no establece nada acerca de los objetos geométricos (nada dice de los puntos, las líneas y los planos), sino que informa acerca de las propiedades lógicas de la teoría, lo cual no se contrapone al desarrollo formal de la misma. En otras palabras: al investigar las propiedades lógicas de la teoría se puede recurrir a nociones semánticas, mas no al derivar sus teoremas.

[5] Véase la cita de Hermann Weyl en la sección 1.3.

cual se le pudiera reducir, y por la otra, aunque la hubiera (la recién nacida teoría de los conjuntos podría ser un buen candidato), poco o nada se ganaría con ello: la solución final del problema de la consistencia no se lograría por este camino, pues siempre habría una teoría en espera de que su consistencia fuera probada. Se tendría, por ejemplo, una cadena del siguiente tipo: la geometría de Lobachevsky es consistente si la geometría euclidiana lo es; la geometría euclidiana es consistente si la aritmética de los números reales lo es; la aritmética de los números reales es consistente si la teoría de los conjuntos lo es; etc. Lo cual no constituiría una solución definitiva al problema de la consistencia de estas teorías.

Este estado de cosas llevó a Hilbert a considerar el problema de la consistencia de la aritmética como un importante reto al que había que hacer frente. Fue así que en el segundo Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en el verano de 1900, al presentar una lista con los problemas más relevantes que, en su opinión, había de encarar la matemática en el siglo veinte, citó en segundo lugar el referente a la consistencia de la aritmética, el cual enunció escuetamente como sigue:

Investigar la consistencia de los axiomas de la aritmética.[6]

La sencillez del enunciado contrasta con las enormes dificultades que hubo que superar para lograr la prueba anhelada, que no sólo sería salvaguarda de la aritmética, sino de las distintas geometrías por igual. En aquel momento Hilbert no imaginaba que jamás se contaría con tal garantía en un sentido absoluto: en manos de Gödel, la investigación de este problema hubo de mostrar su verdadero grado de dificultad, y desde entonces no se tiene idea de en qué dirección se podría encontrar una respuesta satisfactoria. Es más, somos de la opinión de que jamás se tendrá tal garantía, si por «garantía» se entiende certeza racional.[7]

[6] La selección de los problemas tuvo como base el impulso que, creía, éstos darían a nuevos avances y desarrollos. La lista contenía un total de veintitrés problemas y Hilbert no la consideró exhaustiva, sino significativa. Este hecho, de que un matemático de renombre se presentase ante el pleno de su comunidad a decirles a sus colegas por qué derroteros habría de marchar la ciencia en el siguiente siglo, fue algo inusitado y, creemos, irrepetible, una muestra del lugar que Hilbert ocupó en su tiempo.

[7] Desde nuestro punto de vista, la investigación axiomática de la aritmética también forma parte del análisis lógico de nuestra intuición, en este caso relativa a los números. En este sentido, esta última afirmación significa, entre otras cosas, que estamos convencido de que ningún análisis de esta naturaleza puede producir un cuadro completo, una imagen perfecta y acabada, de los contenidos de nuestra intuición, ni asegurar que lo que resulte de él será un "discurso" coherente. En otras palabras, somos de la opinión de que la razón matemática no es autovalidativa.

1.5 Hilbert y el pensamiento axiomático

Hilbert es sin lugar a dudas una de las figuras más sobresalientes de la matemática moderna. Su nombre está indisolublemente ligado a teorías de la más diversa índole como lo son la física matemática, la teoría de los invariantes, la teoría de los ideales de polinomios, la teoría de los números algebraicos, la geometría elemental, el cálculo de variaciones, la teoría de las ecuaciones integrales, el análisis funcional, las ecuaciones diferenciales y la lógica matemática, muchas de las cuales le deben en gran medida sus métodos y orientación. Pero además de su versatilidad como matemático, su preocupación por tantos y tan diversos temas siempre estuvo acompañada por una profunda reflexión en torno a la naturaleza de esta disciplina, en la que podemos observar un retorno a la filosofía crítica de Kant, al menos en los siguientes aspectos: (1) niega o evita la metafísica y reduce la filosofía de las matemáticas a una teoría sobre el conocimiento matemático y (2) separa el conocimiento matemático de sus aspectos psicológicos, para sólo concentrarse en su forma lógica. De su concepción de la matemática en la primera fase de sus investigaciones —aquella en la que examina los principios de la geometría—, y del vínculo de ésta con la filosofía de Kant es que nos vamos a ocupar en las siguientes líneas, pues en ella se encuentra lo más meritorio de sus reflexiones y la raíz de lo que más tarde sería un programa tendiente a fundamentar la matemática clásica, que con tanto cuidado afinara en la década de los años veinte.[1]

Si nos guiáramos por la abundante literatura sobre el tema, es probable que termináramos por creer que la visión que Hilbert tiene de las matemáticas es lo que podríamos llamar un *crudo formalismo*, según el cual éstas consistirían en una colección de teorías formales carentes de todo contenido y sujetas a estrictas reglas de manipulación simbólica, un punto de vista similar al que sostuviera Carnap a partir de los años treinta.[2] Creemos que esta imagen corresponde a una percepción muy limitado de su concepción de la matemática y atañe a ideas propias del último período de sus investigaciones en torno a sus fundamentos. Ciertamente, ahí habla de formalizar diversas teorías matemáticas a fin de llevar a buen término su fundamentación lógica, llegando incluso a una visión reduccionista de esta disciplina, mas despreciar por ello la prístina concepción que tuvo durante casi toda su vida nos parece un error. Por el contrario, creemos que la propuesta propia de la primera fase de su carrera es algo que debemos recuperar.[3] Al respecto, habremos de justipreciar el papel que asigna al método axiomático, no sólo en la matemática sino en la ciencia en general, y

[1] Del llamado *programa de Hilbert* nos ocuparemos en extenso en el capítulo 3.
[2] Cf. Carnap. 1935, y Carnap, 1937.
[3] En particular, somos de la opinión de que la causa de su programa reduccionista hay que buscarla en la desmedida confianza que tuvo en el poder de los métodos sintácticos.

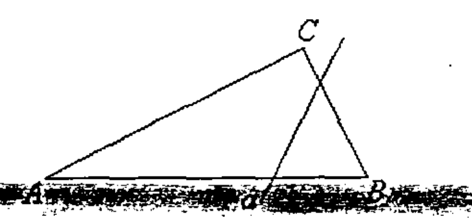
mostrar que, lejos de ese tajante formalismo en que incurre en la parte final de su carrera, Hilbert ve en esta disciplina algo más que una colección de teorías formales. Asimismo, nos proponemos mostrar cómo es que en su concepción de la matemática se sirve de algunas ideas extraídas de la filosofía de Kant, lo que permite distinguir su pensamiento del formalismo extremo de Haskel B. Curry y del logicismo de Gottlob Frege y Bertrand Russell.[4]

1.5.1 El marco teórico de los *Grundlagen*

Podemos acercarnos al pensamiento de Hilbert en torno a la naturaleza de la matemática observando cómo procede al momento de fundamentar la geometría en los *Grundlagen*, pues ahí se halla la simiente de las ideas que habría de desarrollar más adelante sobre el papel de la axiomatización y su lugar en la matemática moderna.

Como hemos visto, los *Grundlagen* de Hilbert son la culminación de la obra iniciada por Euclides, consistente en desarrollar una teoría enteramente racional de la estructura del espacio en la que, sin embargo, todos saben de qué es de lo que se está hablando.[5] En los *Grundlagen*, al referirse a los axiomas, Hilbert dice de éstos que expresan «ciertos hechos conexos entre sí y fundamentales, de nuestra intuición.».[6] Para aclarar este punto recordemos la manera en que expone el axioma II.4 o *Postulado de Pasch*:

> **II.4** (Postulado de Pasch) Una línea que corta un lado de un triángulo y que no pasa por ninguno de sus vértices deberá cortar también otro lado del triángulo.



Lo sorprendente de esta presentación es que Hilbert acompaña al axioma con una figura de la no dice nada y de la que no hace ningún uso más adelante. ¿Por qué entonces su presencia? La respuesta se puede buscar en las palabras introductorias a los *Grundlagen*. Dice Hilbert:

---

[4] Cf. Curry, 1976; Frege, 1893 y Russell, 1903. En cuanto a la influencia de Kant, este asunto no lo trataremos en toda su amplitud en esta sección, pues algunas cuestiones no se pueden comprender sino a la luz del programa de Hilbert para fundamentar la matemática clásica, tema que trataremos en el capítulo 3.

[5] Véase el párrafo introductorio a la sección 1.2.

[6] Hilbert 1903, p. 1. Obviamente, Hilbert se refiere a nuestra intuición geométrica.

> La geometría —al igual que la aritmética— requiere para su desarrollo sistemático sólo un reducido número de principios básicos simples. Estos principios son conocidos como axiomas de la geometría. Establecer axiomas para la geometría e investigar la forma en que se relacionan entre sí es un problema que se ha discutido desde la época de Euclides en diversas y admirables contribuciones a la literatura matemática. El problema en cuestión equivale al análisis lógico de nuestra intuición espacial.[7]

La última frase no es circunstancial, sino una declaración de propósitos. Esto lo hace claro al colocar al principio del libro, a manera de epígrafe, las siguientes palabras, tomadas de la *Crítica de la razón pura* de Kant: «Así, todo conocimiento humano se inicia con intuiciones, pasa de éstas a los conceptos y termina en las ideas.».[8] Podemos decir entonces que la figura que acompaña al postulado de Pasch es la intuición que explica al axioma, y que éste expresa tal hecho de la intuición en términos de una relación entre los conceptos de «línea», «triángulo», «pasar por» y «cortar». Pero en su conjunto, la axiomatización constituye una *idea* en el sentido de Kant, es decir, un objeto de la razón que carece de realidad y que en su perfección sobrepasa la posibilidad de la experiencia.

En efecto, una vez empalmados los conceptos geométricos en una teoría, ésta no es susceptible de una comprobación plena y vemos en ello la razón por la cual Hilbert cita el pasaje de Kant: la geometría, una vez expuesta como un sistema axiomático, tiene la misma condición que las ideas, pues en su conjunto trasciende toda posibilidad de verificación absoluta. Por ejemplo, para verificar el postulado de las paralelas habría que recorrer el espacio *al infinito*, lo cual resulta imposible. La cita de Kant es por tanto exacta para Hilbert.

Por otra parte, todo apunta a que Hilbert comparte con Kant la idea de que el conocimiento teórico sólo adquiere significado y objetividad en las intuiciones, y que la intuición es una innegable fuente de conocimientos.[9] En este sentido ve en la axiomatización

---

[7] *Ibid.*

[8] Kant, CRP A702, B 730. [*So fängt denn alle menschliche Erknenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.* Kant, Kritik der reinen verunft, Elementarlehere 2. T. 2 abt.] La voz que Kant utiliza para referirse a la intuición, «Anschauung», tiene en alemán una acepción un tanto más precisa que en español. El significado literal de «Anschauung» sería *intuición con una fuerte carga de evidencia*. Por ejemplo, Kant diría que un juicio como «el camino más corto entre dos puntos es la línea recta» toma toda su fuerza en la siguiente figura:

y añadiría que sin esta intuición el juicio no tiene fundamento. Es así que el carácter sintético *a priori* que Kant atribuye a este juicio descansa en la evidencia intuitiva, en el *Anschauung*. En español, para expresar el origen intuitivo de este juicio, deberíamos darle la siguiente forma: «*Veo* que el camino más corto ...», o «*A mi modo de ver*, el camino más corto ...», incorporando de esta manera el sentido del vocablo alemán.

[9] Esto no quiere decir que para Hilbert la aritmética transfinita de Cantor (que veremos en el capítulo 2) o la teoría de los números reales, que suponen el infinito y rebasan el plano de lo intuitivo, no tienen justificación alguna, sino que en un sentido estricto no son conocimiento de nada.

una forma de ordenar las teorías que se gestan en el ámbito de la intuición, esclareciendo sus conceptos y supuestos básicos. Es por ello que la axiomatización de la geometría tiene como punto de partida el análisis lógico de nuestra intuición espacial, a fin de determinar su forma abstracta. Por su parte, los axiomas resultan de precisar la forma lógica de ciertos juicios relativos a conceptos espaciales de los que, supuestamente, se derivan las propiedades relevantes del espacio. El fruto es una teoría cuya exposición se realiza al margen de toda intuición y que ya no depende de ella. Producir dicha teoría es el papel del análisis lógico.[10]

Una diferencia entre Hilbert y Kant es que para el segundo los objetos matemáticos son representaciones *a priori* en la intuición, (sin que esto quiera decir que pertenecen sólo a la razón), mientras que para el primero éstos son una idealización de lo que se ofrece en la intuición sensible. No hay que olvidar que Hilbert ya tiene conocimiento de las geometrías no euclidianas y no puede seguir argumentando que dichos objetos pertenecen a la intuición pura. Más bien, ubica el origen de los conceptos y los axiomas geométricos en la consideración de lo que la intuición sensible supone. No ve en los axiomas verdades necesarias, sino proposiciones que pueden ser refutadas por la experiencia o incluso ser contradictorias entre sí: la intuición también nos puede engañar (por ello la necesidad de las pruebas de consistencia). En esto no concuerda con Kant —que sostiene que los juicios de la geometría son sintéticos *a priori*—, pues considera que el espacio matemático es una libre construcción convencional que, aunque creada a partir de intuiciones, en su producto final ya no depende de ellas. Al respecto sostiene que la geometría no es sino parte del sostén teórico de la física y que su concordancia con el espacio físico se apoya en un ajuste progresivo entre la intuición y la experiencia.[11] Esto no significa que para él la construcción de una teoría matemática no presuponga ningún tipo de comprensión *a priori* de la realidad, pero, como veremos en el capítulo **3**, en su opinión este apriorismo no va más allá de la intuición del signo. En este sentido, juzga que Kant sobrestimó el papel y el alcance del *a priori* en esta disciplina.[12]

---

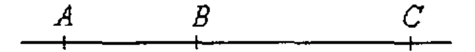
[10] En este sentido, la obra de Hilbert es efectivamente una continuación y *puesta en forma* de la de Euclides quien, como sabemos, no logró independizar del todo la demostración de las intuiciones subyacentes. Prueba de ello es que no reconoció ciertos axiomas que correspondían a otras tantas intuiciones (v. gr., los axiomas de orden o el postulado de Arquímedes) que, sin embargo, intervienen inadvertidamente en las demostraciones, sobre todo a través de las figuras. Y hacer tal separación era imprescindible si lo que se quería era elaborar el análisis lógico de nuestra intuición espacial: la lógica no se ocupa de hechos de ninguna especie, sino de relaciones entre conceptos y deducciones. El resultado de tal análisis es el ya mencionado: el establecimiento de la *forma lógica* de la teoría geométrica y la instauración de un orden deductivo entre sus proposiciones.

[11] Véase al respecto [Hilbert, 1930], especialmente el apartado 21.

[12] Cf. Hilbert, 1930.

1.5.2 Un ejemplo de análisis lógico

Aclaremos el cometido del análisis lógico con un ejemplo específico. En parte, el análisis lógico consiste en investigar cómo se vinculan entre sí los *puntos* y las *líneas* de nuestra intuición y en considerar el tipo de relaciones a que estos vínculos dan lugar. Por ejemplo, dicho análisis nos lleva a situaciones como la siguiente. Observemos la figura:



Como se ve, si tres puntos *A*, *B*, *C* *están en* una línea recta, uno y sólo uno de ellos *está entre* los otros dos. La validez de esta afirmación descansa en la evidencia de los sentidos, en la intuición espacial (en el *Anschauung*),[13] y en ella se observa la manera en que puntos y líneas se enlazan para dar lugar a una relación de orden entre los puntos.

- La intuición nos "dice" que si nos movemos de *A* a *C*, pasamos por *B*.

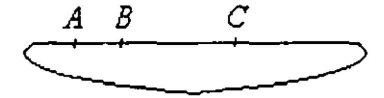
- También nos "dice" que si nos movemos de *B* a *C* no pasamos por *A*, incluso si continuamos el movimiento indefinidamente en esa dirección, y que algo semejante sucede respecto a *C* si nos movemos de *B* a *A*. Esto es parte de la naturaleza de la línea recta según nuestra intuición.

Podemos entonces afirmar la proposición anterior y escribir un axioma:

> **II.3** Si *A*, *B* y *C* son tres puntos distintos en una misma línea, entonces uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos.

Este último enunciado expresa la *forma* de nuestra intuición espacial, y cualquier representación de los conceptos euclidianos de «punto», «línea» y «estar entre» habrá de sujetarse a ella, pues así son los puntos y las líneas de dicha geometría.

Una característica del axioma **II.3** es que obliga a la línea recta a no volver sobre sí misma:



Hasta aquí, Kant estaría de acuerdo con el modo de proceder y las conclusiones alcanzadas. No obstante, para Hilbert el límite que separa el *a priori* de la experiencia se traza de otra manera, reconociendo, como ya lo hemos señalado, que la geometría no es una determinación sintética y *a priori* de las propiedades del espacio, sino una rama del marco conceptual de la física. Si, por ejemplo, interpretamos «línea» como «rayo de luz» podríamos encontrar, en relación a las figuras anteriores, que al movernos de *B* hacia *C*, al

[13] Esto es lo que dirían Kant y Hilbert.

continuar el movimiento en línea recta también pasemos por *A* (es decir, que los rayos de luz en el espacio físico siguieran trayectorias cerradas). Pero entonces diríamos que el concepto de «línea recta euclidiana» no es aplicable a los rayos de luz, o que éstos describen trayectorias rectilíneas, pero que el espacio no es el euclidiano y tiene otra forma. En el segundo caso tendríamos un cambio de marco conceptual, lo cual no era imaginable en el siglo dieciocho por la simple y sencilla razón de que no había otras geometrías a la mano.

Por ejemplo, en la teoría de la relatividad los físicos convienen en la segunda alternativa, pero hay que tener en cuenta que se trata de un acuerdo. La matemática no legisla acerca de la estructura del espacio físico, ni dice qué objetos de éste son los correspondientes a la línea recta. Por lo demás no podría hacerlo. El propósito del análisis lógico que practica Hilbert es elaborar una teoría acerca del espacio de nuestra intuición, no acerca del espacio físico, y ordenar dicha teoría con apego a la lógica.[14] Tampoco es el propósito del análisis lógico dar una definición de los conceptos de «punto», «línea», etc. como pretende Frege, sino exponer, mediante definiciones implícitas, qué son los puntos y la líneas euclidianas. Llevado al extremo, Hilbert diría, apoyándose en Kant, que no es posible decir en definiciones y axiomas lo que es el espacio y que lo único que podemos hacer es *decir* nuestra percepción del espacio: *puntos*, *rectas* y *planos* sólo los podemos describir mediante su comportamiento y mutuas relaciones, tal como éstas se expresan en los axiomas, fruto del análisis lógico de nuestra intuición espacial, es decir, del «Anschauung».[15]

Como se puede ver en el ejemplo recién expuesto, para llevar a cabo el análisis lógico de nuestra intuición espacial es imprescindible separar la forma del contenido de las proposiciones (es decir, la demostración de las intuiciones subyacentes): la lógica no se ocupa de hechos de ninguna especie, sino de relaciones entre conceptos y deducciones. En este sentido, el resultado del análisis no puede ser otra cosa que el establecimiento de un orden de construcción de conceptos y de un orden deductivo entre proposiciones, como habría pretendido Euclides sin lograrlo del todo.

No obstante, y éste es uno de los puntos centrales de nuestro argumento, Hilbert no olvida que no es la lógica sino la intuición la que convierte a la geometría en un desafío para el entendimiento humano, en vez de uno entre una infinidad de ejercicios intelectuales

---

14 Cabe señalar que "elaborar una teoría acerca de lo que presupone nuestra intuición espacial" no es lo mismo que elaborar una teoría sobre las propiedades del espacio en tanto que condición de posibilidad de toda experiencia, como sostiene Kant. Cf. Kant, 1787, B41 y B59-73.

15 Por otra parte, nada nos asegura que el análisis lógico es capaz de precisar el contenido de nuestra intuición en todos los casos. Más bien, todo parece indicar que el lenguaje no es el medio adecuado para hacerlo. El teorema de Lowenheim-Skolem es una evidencia en contra de la capacidad de nuestro lenguaje para abarcar el contenido de nuestra intuición, e incluso la existencia de modelos no estándar numerables de los axiomas de Peano parece ser suficiente. Esto se relaciona con el problema de la completud de las teorías formales que más adelante veremos.

arbitrarios. Por ello el lenguaje de los *Grundlagen* es, como ya lo hemos señalado, el de la geometría elemental, siempre cercano a la intuición. Esto explica la profusión de figuras, algunas de gran belleza, que sin intervenir en las demostraciones aclaran el texto mostrando aquello de lo que se habla. Hilbert practica con excelsitud un juego formal en el que ciertos significados prohibidos están siempre ahí, presentes, dando sentido a la teoría, pero sin que se les pueda acusar de nada, pues cuando se les quiere inculpar de algún delito lo único que permanece en su lugar son expresiones vacías. Se trata de un equilibrio que supo mantener a la perfección: separa las palabras de sus denotaciones, mas no lo suficiente como para que éstas no sigan dando sentido a la teoría. En la geometría el único sustento formal de los teoremas es la demostración, pero es la intuición la que señala el camino.

Como veremos, Hilbert habrá de afinar este juego cuando intente, en la década de los veinte, una prueba de consistencia absoluta para la matemática clásica.[16]

1.5.3 El significado de las teorías axiomáticas

Como hemos visto, el análisis lógico al que Hilbert hace referencia en los *Grundlagen* consiste en: (1) precisar los conceptos y la relaciones básicas de la teoría, y (2) determinar aquellas proposiciones relativas a dichas nociones que servirán como base de la teoría, es decir, como punto de partida de la demostración. Bajo su influencia este modo de proceder se extendió a principios de siglo a otros dominios del saber científico, principalmente a la fisica. En una conferencia pronunciada en 1917 sobre el pensamiento axiomático (*Axiomatisches Denken*), Hilbert expresa esta idea en su forma general con las siguientes palabras:

> Si consideramos en conjunto los hechos que conforman cierta esfera del conocimiento más o menos comprensiva, nos percataremos de inmediato de que la totalidad de los mismos es susceptible de un orden. La ordenación se lleva a cabo recurriendo a cierta *trama de conceptos* relacionados entre sí, de tal manera que a cada objeto y a cada hecho del campo de conocimiento de que se trata le corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos de la misma. La trama de conceptos no es otra cosa que la *teoría* de esa esfera del saber.[17]

Por tanto, el primer paso del análisis lógico en cualquier esfera del conocimiento consiste en identificar los conceptos necesarios para describir y clasificar los objetos propios del

---

[16] Esto lo logra, por ejemplo, escribiendo fórmulas como «$2^{\aleph_0} > \aleph_0$» que leemos como relativas a los números transfinitos de Cantor sosteniendo a la vez que se trata tan sólo de una sucesión de seis símbolos (¿o es que hay otra cosa sobre el papel?)

[17] Hilbert 1917. Cita tomada de la traducción al español, p. 23.

dominio en cuestión, y en representar los hechos observables en dicha esfera del conocimiento mediante relaciones entre tales conceptos (tal como lo hiciéramos en el ejemplo anterior). «Ésta es precisamente la manera en la que se ordenan en la geometría los hechos geométricos, en la que se ordenan los hechos aritméticos en una teoría de los números y los hechos estáticos, mecánicos y electrodinámicos en una teoría de la estática, en una teoría de la mecánica y en una de la electrodimámica, respectivamente.».[18] El segundo paso consiste en representar los vínculos causales entre los hechos observables mediante deducciones que proceden con estricto apego a las leyes de la lógica:

> Si observamos de cerca una teoría determinada, reconoceremos en ella un reducido número de proposiciones distinguidas que sirven de fundamento para la construcción del entramado de conceptos que hemos mencionado. A partir de esas proposiciones y con base en principios lógicos, podemos obtener en su totalidad el edificio conceptual que subyace a la disciplina en cuestión.[19]

A partir de este momento, el desarrollo interno de la teoría se ha de llevar a cabo al margen de la intuición, las figuras o la experiencia, siendo la deducción lógica el único medio para establecer sus proposiciones.

Hilbert concede gran importancia al hecho de que el método axiomático se extienda a otras disciplinas, e incluso juzga que la prueba de madurez de una disciplina científica es que ésta sea susceptible de su aplicación:

> Todo lo que puede ser objeto del pensamiento científico cae, con tal de que haya alcanzado cierto grado de madurez que le permita conformar una teoría, en el terreno propio del método axiomático, y, por lo tanto, de manera mediata en el de la matemática. Penetrar, en el sentido que hemos indicado, en niveles axiomáticos más profundos, significa también alcanzar una visión mucho más profunda de la naturaleza y de la esencia del pensamiento científico, y dar un paso significativo en el proceso de toma de conciencia de la unidad esencial del conocimiento. En virtud de su estrecha relación con el método axiomático, la matemática parecerían llamadas a ocupar un lugar prominente en la ciencia en general.[20]

Como se ve, para Hilbert la matemática no se reducen a una colección de teorías formales aprisionadas en un mundo de total abstracción y donde cualquier teoría axiomática es tan valiosa como cualquier otra. Por el contrario, juzga que su papel en la comprensión de la naturaleza es primordial. La matemática, en su fuero interno, podrá reconocer como único criterio de corrección a la lógica, mas la importancia de sus teorías difícilmente se podría

[18] *Ibid.*
[19] *Op. cit.*, p. 24.
[20] *Op. cit.*, p. 35.

explicar sin tomar en cuenta la posibilidad de su aplicación en vastos dominios del conocimiento. Se trata de una disciplina indisolublemente ligada al pensamiento científico y este vínculo forma parte de su significado y conocimiento.[21]

Tenemos así un doble aspecto de la matemática en el que se articulan admirablemente bien ambas modalidades de la axiomática, la intuitiva (concreta, material) y la formal. Por una parte, la utilización de esta disciplina en el ámbito de las ciencias, principalmente la física, exige el uso del método axiomático concreto, material, mientras que el carácter abstracto de la matemática pura requiere del método axiomático formal.

En efecto, la axiomática material es el mejor instrumento que se puede utilizar cuando la comprensión de algún rango de fenómenos ha alcanzado el punto en el que se pueden distinguir las leyes generales que los rigen. Éste es, por ejemplo, el método que Newton aplica a la mecánica. Pero en la matemática pura, donde los hechos empíricos proporcionan si acaso el impulso inicial a las investigaciones (y quizá el material para las futuras aplicaciones de la teoría resultante), y donde casi todos concuerdan en reconocer a la lógica como único árbitro en cuestiones de correctud, el método axiomático formal es lo que se necesita. Aun así, cada teoría perteneciente a la matemática pura ofrece un patrón estructural abstracto que podrá encontrar aplicación en un dominio específico cuando dicho patrón se haga presente en él (que haría las veces de un *modelo*), estableciéndose de este modo el paso de la axiomática formal a la axiomática intuitiva.

En realidad, la distancia entre una teoría intuitiva y una teoría formal no es tan grande como pudiera parecer a primera vista. En ambos casos se cuenta con un aparato deductivo que rige el crecimiento de la teoría, aunque en el primer caso ésta se aplica a entes de una naturaleza determinada, mientras que en el segundo se deja de lado la especificidad de los objetos, no contándose con el control de los hechos observables para determinar si la teoría es fehaciente. Quizá la diferencia de más peso es que en el caso de una teoría intuitiva el contacto con los hechos o el recurso a la intuición puede inducir modificaciones en ella a través del descubrimiento de aspectos antes no considerados. Por su parte, las teorías formales tienen la virtud de que permiten tratar con nociones ideales que no tiene correlato empírico alguno y a las que nada corresponde en el ámbito de la experiencia.

---

[21] La matemática es también un medio para ordenar y extender lógicamente el aparato conceptual de las teorías científicas, y Hilbert entiende que esta función es un factor de peso para inclinar el interés en favor de algunas de sus teorías. Recíprocamente, al procurar a las disciplinas científicas la *armazón de conceptos* que éstas requieren, la matemática se beneficia, pues de este modo disponen de una fuente inagotable de problemas que le significan la vida. Por ejemplo, Hilbert dice que de ello deriva el enorme desarrollo de la geometría, la teoría de las funciones y la totalidad del análisis matemático. Si la matemática tiene algún sentido más allá de su perspectiva interna, éste es el de sus aplicaciones.

Por ejemplo, el análisis matemático se sirve de la noción de infinito, misma que desempeña un papel muy importante en la obtención de resultados que más adelante resultan fructíferos en las aplicaciones. Hilbert considera que este método de los elementos ideales es una de las glorias del pensamiento matemático moderno, y que no hay razones suficientes para renunciar a él. Sostiene además que el empleo de tales nociones se justifica plenamente mediante una prueba de consistencia, es decir, mediante una prueba de que su adjunción a la teoría no entraña contradicción.[22]

En la década de los años veinte Hilbert intentó llevar a cabo esta empresa para la teoría de conjuntos y el análisis clásico; para ello, ideó un programa que tuvo como base el ulterior desarrollo y perfeccionamiento del método axiomático, llegando al punto en que al final incluso el objetivo de alcanzar el rigor más perfecto en el ámbito de la aritmética de los números naturales quedó para siempre fuera de alcance. Esto lo veremos más adelante, tras llevar a cabo un breve recorrido por algunas comarcas de la matemática de fines del siglo diecinueve a cuya fundamentación Hilbert quiere contribuir.

1.5.4 Consistencia y existencia matemática

La noción de consistencia es de tal importancia para Hilbert, que la existencia matemática la sustenta en la ausencia de contradicción. En efecto, para aceptar como existente una entidad matemática, Hilbert considera que es suficiente con demostrar que su asunción no implica contradicción, sentido mucho más débil que la existencia empírica. Con ello también evita internarse en el realismo conceptual, conservando a la vez un sentido matemático para los enunciados de esta ciencia. Según esto, decir que una noción matemática *existe* significa simplemente que la podemos caracterizar mediante axiomas sin incurrir en contradicciones: no se trata de que la no contradicción sea la señal de una entidad preexistente, sino que la noción matemática de *existencia* es lo mismo que ser *no contradictorio*. Así lo hace saber en una carta a Frege: «De la verdad de los axiomas usted deduce que no pueden contradecirse entre sí, mientras que yo, por mi parte, creo lo contrario, que cuando los axiomas no se contradicen entre sí, por ese motivo son verdaderos, y por ese motivo los objetos que definen existen.».[23]

---

22 A fin de cuentas, Hilbert considera que si bien el éxito en las aplicaciones es importante, ello no justifica en plenitud una teoría matemática, y que tal justificación sólo se puede hallar en la esfera de la razón. Pronto habremos de volver a este punto.

23 Carta mencionada por I. M. Bochenski, en [Bochenski, 1955, p. 341]. Compárese lo anterior con lo dicho en la nota al pie #18 de la sección 1.2.3 respecto a las nociones de consistencia y verdad.

Lejos de tener un carácter absoluto, para Hilbert la existencia matemática participa de la relatividad de la no contradicción. Así, por ejemplo, la noción central de la teoría de conjunto de Cantor, la de *infinito actual*, aunque no se puede representar *a priori* en la intuición ni corresponde a nada empírico, tendrá plena existencia matemática cuando se pruebe que los axiomas que la definen no se contradicen entre sí (de esto hablaremos en la sección **2.6**). Con ello reivindica la libertad que tiene la matemática de considerar nociones abstractas que nada significan por sí mismas. En esto se arroga las mismas reservas que Kant cuando, en una conocida nota de la *Crítica de la Razón pura*, dice:

> El conocimiento de un objeto implica el poder demostrar su posibilidad, sea porque la experiencia testimonie su realidad, sea *a priori*, mediante la razón. Puedo, en cambio, *pensar* lo que quiera, siempre que no me contradiga, es decir, siempre que mi concepto sea un pensamiento posible, aunque no pueda responder de si, en el conjunto de todas las posibilidades, le corresponde o no un objeto. Para conferir validez objetiva (posibilidad real, pues la anterior es simplemente lógica) a este concepto, se requiere algo más.[24]

Para Hilbert el conocimiento matemático no es necesariamente conocimiento de objetos, sino de mundos imaginarios cuyo realidad ya no compete a esta ciencia, y cuando afirma que sus objetos "existen" lo hace únicamente en el sentido de su posibilidad. Obviamente, esta reducción de la existencia matemática a la simple coherencia lógica es juzgada insuficiente por los defensores del realismo conceptual, y por el intuicionismo, más alejado del absolutismo platónico que Hilbert. Para el intuicionismo, si bien la no contradicción es una condición necesaria para que una entidad matemática exista, no es suficiente, pues toda entidad matemática debe estar referida a un tipo de experiencia, a una construcción mental (a esto volveremos en la sección **3.3**).

Por último, algunas notas sobre la no contradicción y la *existencia matemática*:

1) La necesidad de que la matemática sea no contradictoria se hace patente en el siguiente pasaje:

> La ausencia de contradicción ha sido siempre considerada una condición *sine qua non* de toda la matemática y, ya en la época de Aristóteles, la lógica había avanzado lo suficiente como para que se supiera perfectamente que dentro de una teoría contradictoria se puede deducir cualquier resultado. Las pruebas de "existencia" consideradas como indispensables desde la antigüedad no tenía evidentemente otra finalidad que la de asegurar que la introducción de un nuevo concepto no suponía el riesgo de dar lugar a una contradicción, especialmente cuando este concepto es lo

---

[24] Kant, CRP, B XXVII, nota *k*.

suficientemente complicado como para no caer inmediatamente en el campo de la intuición.[25]

2) Como ya lo hemos dicho, al identificar la existencia matemática con la no contradicción, Hilbert le otorga un carácter relativo, no absoluto. Esto se debe a que para una noción matemática el ser o no contradictoria depende del sistema al que se le relacione. Quizá un ejemplo sea suficiente para aclarar esta cuestión. Como sabemos, en la geometria euclidiana plana no existe el triángulo rectángulo equilátero, puesto que la suma de sus tres ángulos sería igual a tres rectos, y esto contradiría el teorema euclidiano que establece que dicha suma de ángulos es igual a dos rectos. No obstante, dicho triángulo sí existe en la geometría de Riemann, en la que la suma de los ángulos internos de un triángulo toma en algunos casos el valor de tres rectos. Por tanto, el triángulo rectángulo equilátero no tiene una existencia absoluta, sino relativa al sistema de axiomas considerado.

3) Al definir la existencia matemática como la ausencia de contradicción, Hilbert difiere de la lógica tradicional, para la cual la coherencia de un concepto con lo previamente admitido lo hace solamente *posible*. Es por ello que esta tendencia ha sido descrita como *formalismo*, en el sentido de que admite como legítimo todo aquello que es posible.

4) En la matemática clásica, que es la que Hilbert intentará fundamentar más adelante, la existencia de un ente matemático se puede probar por reducción al absurdo, es decir, demostrando que su no existencia conduciría a una contradicción. Este tipo de pruebas "existenciales" tienen el defecto de no ser constructivas, ya que en ellas ningún objeto se exhibe con las características señaladas. Como veremos, para los intuicionistas esto constituye un grave falta, pues en su opinión toda prueba de existencia matemática debe ser completada con la alusión a cierto tipo de experiencia, de puesta a prueba: la construcción mental.

---

[25] Bourbaki, 1969. Cita tomada de la versión en español, p. 62.

Capítulo 2

La matemática moderna
y
la teoría de conjuntos

2.1 La matemática moderna

El advenimiento de las geometrías no euclidianas no fue la única razón para reconsiderar la naturaleza del pensamiento matemático; más bien, éstas aparecieron como parte de un movimiento que tendía hacia una mayor abstracción y que volvió obsoleta la idea de que la matemática trata con aspectos de la realidad física y que en ello encuentra su fundamento. Esta tendencia floreció en el segundo tercio del siglo diecinueve y trajo consigo la idea de que la matemática es pensamiento por sí y para sí, no una descripción de hechos, ofreciendo con ello un dominio libre al pensamiento en el que toda clase de teorías podían ser consideradas, sin importar si eran o no aplicables al mundo físico.

Estos cambios fueron decisivos en el perfil de la matemática del siglo veinte y vinieron acompañados por la incorporación de nuevos campos de investigación, y la expansión de la teorías ya existentes. Este progreso puso en evidencia lo erróneo de opiniones como la de Lagrange, en el sentido de que la matemática ya había llegado a su límite.[1]

El desplazamiento hacia la abstracción tuvo como punto culminante la teoría de conjuntos de Cantor, en la que se consideran entes como la totalidad de los números reales o el conjunto de todos los conjuntos de números naturales, a los que nada empírico corresponde, pero que son tratados como realmente existentes, al punto de realizar operaciones con ellos. La aparición de este novedoso punto de vista generó un estado de incertidumbre: si la matemática trataba con sistemas de objetos hipotéticos, ¿qué había sido del sentido de la verdad absoluta? Como ya vimos, este problema se puso de manifiesto con la separación de la geometría del espacio físico, y fue lo que llevó a Hilbert a preguntarse si la geometría, vista como un ejercicio abstracto, era una totalidad consistente y completa. Obviamente, esta cuestión es extensible a cualquier otra disciplina abstracta y Hilbert vio en su respuesta favorable la única manera de dar un sentido racional a las teorías matemáticas.

---

[1] La actividad matemática también se expandió en el siglo diecinueve en otros sentidos. En primer lugar el número de matemáticos se incrementó con el crecimiento de la educación y la proliferación de nuevos centros de investigación, principalmente universidades. En segundo lugar, el número de sociedades científicas y publicaciones especializadas también aumentó significativamente. Se estima que hacia fines del siglo diecinueve el número de revistas dedicadas total o parcialmente a la publicación de temas de matemáticas era de unas 950, y en la actualidad se cuenta con unas 500 dedicadas exclusivamente al tema. Además, la barrera de la incomunicación fue cediendo lentamente. Desde mediados del siglo diecinueve, en las universidades se acostumbra realizar seminarios bajo la dirección de uno o varios académicos, a menudo profesores invitados, a los que suelen asistir numerosos estudiantes. Esta práctica es común hoy en día y facilita el análisis de los problemas del momento, así como el estado en que se encuentran las investigaciones. Asimismo, desde el año de 1900 se realiza cada cuatro años un congreso internacional y continuamente se celebran reuniones, coloquios y seminarios en todo el mundo.

La expansión de la actividad matemática dio lugar a otros cambios no tan loables. Las diferentes disciplinas se independizaron, desarrollando su propio lenguaje y conceptos, y sus problemas se hicieron cada vez más especiales y sólo accesibles a los expertos, requiriendo para su solución de técnicas particulares. Así, desde el siglo diecinueve los matemáticos trabajan normalmente en una sola área (se considera que Hilbert y Poincaré fueron los últimos en conocer toda la matemática de su tiempo), las publicaciones no están dirigidas a un amplio público y la mayoría de ellas no contiene ninguna indicación de su conexión con otras áreas.

No es nuestro propósito examinar en este capítulo todos los cambios ocurridos en la matemática durante el siglo diecinueve y principios del veinte. En vez de ello, nos limitaremos a señalar algunos hechos notables que ilustran a la perfección el carácter de una nueva matemática que poco a poco se fue alejando de "lo real", hasta abandonar de manera irremediable su pretensión de verdad acerca de la naturaleza. Tales cambios en la matemática se dieron de manera paulatina y sus orígenes los podemos situar a finales del siglo dieciocho, en la obra de Carl Friedrich Gauss (1777-1855).[2] Si hasta ahora nos hemos circunscrito a lo acaecido en el ámbito de la geometría es porque ahí se muestran con toda claridad el nuevo enfoque axiomático y la tendencia hacia la formalización, medio este último con el que Hilbert pretende resolver el problema de los fundamentos, y objeto de los teoremas limitativos de Kurt Gödel.

[2] Podemos decir que en 1796 dio inicio un período de renovación matemática cuando Gauss probó su famoso teorema según el cuál un polígono regular con un número primo p de lados (3, 5, 7, 11, 13, 17, ...) se puede construir con regla y compás sí y sólo si el número p es de la forma $2^k + 1$, donde k es una potencia de 2, es decir, de la forma 2^n. Tanto valoró Gauss este descubrimiento que en su tumba se encuentra grabado un polígono de 17 lados. Lo que tiene de original este trabajo en relación al espíritu de su época es que en él se demuestra una imposibilidad: la de realizar ciertas construcciones con regla y compás. Este recurso de probar imposibilidades es propio de la matemática moderna y Gödel es un buen exponente de su utilización.

2.2 La liberación del álgebra

La distinción entre las ciencias físicas y la matemática debió esperar hasta el siglo diecinueve para ser aclarada. Hasta entonces se podía haber argumentado que la matemática se ocupaba de relaciones entre números y cantidades que figuran en el mundo físico, esto a pesar de la aparición de conceptos como los de número negativo y número imaginario. En contra de esta postura, el siglo diecinueve presenció el surgimiento de nuevas ramas en la matemática que marcharon con paso firme hacia un punto de vista abstracto, en el que los símbolos matemáticos se vieron cada vez menos obligados a corresponder directamente con entidades físicas o espaciales.

En relación al álgebra, una de las consecuencias fue que ésta se liberó de la esfera tradicional de contar y medir. Ahora los símbolos se podían manejar conforme a reglas cualesquiera y se les podía interpretar como algo más que cantidades numéricas, si es que tenían alguna interpretación. Desarrollada por sí misma y libre de la obligación de pensar en la extensión o la cantidad, el álgebra se dio a la tarea de imaginar entidades abstractas cuyas únicas propiedades eran las expresadas por las reglas de manipulación de los símbolos, creando de este modo teorías que no estaban ligadas a ninguna representación específica.[1] Así, por ejemplo, el álgebra de Boole o los cuaterniones de Hamilton.

Con base en los comentarios anteriores se podría pensar que la matemática del siglo diecinueve fue desdeñando paulatinamente el estudio de la naturaleza para sólo ocuparse de teorías abstractas alejadas de toda representación. Nada más alejado de la verdad. Sin lugar a dudas la física fue una importante fuente de inspiración para el trabajo matemático en dicho periodo, y la mayoría de sus investigadores trabajaron directamente en problemas de física o en problemas matemáticos provenientes de ella. Podemos incluso decir que la física proporcionó en el siglo diecinueve más problemas para la investigación matemática que en toda su historia previa, y para resolverlos fue que se creó una matemática altamente compleja. No obstante, fue también en dicho siglo que los matemáticos comenzaron a llevar persistentemente sus esfuerzos más allá de las necesidades de la ciencia y la tecnología de su época, ocupándose de cuestiones que no tenían que ver con problemas derivados de ellas. Sin duda alguna, una de las razones de este cambio fue el abandono de la idea de que la matemática trata con aspectos de la realidad y, aunque las teorías existentes debían mucho a

[1] Este rasgo del álgebra es muy importante para nuestro estudio y habremos de insistir en él más adelante. Por lo pronto lo único que queremos es dirigir la atención del lector hacia este aspecto característico de la nueva matemática, y que Hilbert habría de llevar al extremo. Una ley numérica como "$x + y = y + x$", ¿es un enunciado acerca de números, o es una sucesión de símbolos escritos en el papel? En el segundo caso podemos interpretar la igualdad como una regla de manipulación formal que permite, por ejemplo, escribir "5 + 7" en vez de "7 + 5", o "# + @" en vez de "@ + #", algo así como una regla de sustitución.

sus vínculos con las otras ciencias, ahora se les reconocía como arbitrarias, dejando de importar el significado físico que pudieran tener sus conceptos, que a lo más podía servir como guía heurística en las investigaciones. Aquí de nuevo cobra vida la cita que Hilbert hiciera de Kant al inicio de la los *Grundlagen* y que ya tuvimos la ocasión de comentar en la sección 1.5.1: «Así, todo conocimiento humano se inicia con intuiciones, pasa de éstas a los conceptos y termina en las ideas». Las teorías matemáticas abstractas tienen a partir del siglo diecinueve el carácter de ideas en el sentido kantiano, alejadas de toda representación e indiferentes a su origen. Fue por ello que hacia 1900, cuando las matemáticas ya se habían desprendido de la realidad, el método axiomático formal se convirtió en el instrumento ideal para desarrollar teorías acerca de cosas sin significado aparente.

2.2.1 El álgebra de Boole

Dice Bertrand Russell que las matemáticas puras nacieron en 1854 con la publicación del libro *The Laws of Thought* (Las leyes del pensamiento) de George Boole (1815-1864). Aunque esto no deja de ser una figura retórica, tiene la virtud de resaltar el carácter de dicha obra, en la que abiertamente se incumple el precepto de que los símbolos han de representar números o cantidades. El libro se inicia con las siguientes palabras:

> El plan de este tratado es investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente por medio de las cuales se lleva a cabo el razonamiento, darles expresión en el lenguaje simbólico de un cálculo, y sobre este fundamento establecer la ciencia de la lógica y construir su método.[2]

Para ello utiliza fórmulas similares a las del álgebra en las que las letras no representan números sino clases o proposiciones y a las que somete a reglas también análogas a las del álgebra, poniendo en evidencia que las leyes de la lógica son matemáticas en su forma:

> Se admite que la lógica, como ciencia, es susceptible de amplias aplicaciones; pero es igualmente cierto que su forma y sus procesos son matemáticos. Por tanto, cualquier objeción *a priori* que pudiera suponerse dirigida en contra de la adopción de tales formas y procesos en la discusión de un problema de moral o de filosofía en general, debe tener como base una incorrecta percepción o una falsa analogía. No forma parte de la esencia de la matemática estar atada con las ideas de número y cantidad. El que como un hábito general sea deseable que la mente aplique procesos simbólicos a la argumentación moral, eso es otro problema.[3]

[2] Boole, 1854, p. 1.
[3] *Op. cit.*, p. 12.

Libre interpretación de los símbolos, cálculo y procesos formales, abandono del número y la cantidad: todas las características de la matemática moderna ya están presentes en la obra de Boole. En *The Laws of Thought* se tiene una sola teoría (el *álgebra de Boole* como se le conoce actualmente) que dispone al menos de dos interpretaciones, la primera en términos de clases, y la segunda en términos de proposiciones o enunciados. Veamos a manera de ejemplo dos posibles lecturas de algunos de sus símbolos:

Lógica de clases	Lógica de proposiciones
El símbolo **1** es *El Universo*, es decir, la clase cuyo elementos son todas las cosas de las que se habla.	El símbolo **1** es *Lo Verdadero*, es decir, una proposición que comprende todos los hechos posibles.
El símbolo **0** es *La Nada*, es decir, la clase que no tiene elementos.	El símbolo **0** es *Lo Falso*, es decir, una proposición que no comprende ningún hecho posible.
$x + y$ es la clase de todas las cosas que son elementos de x o elementos de y.	$x + y$ es una proposición que es verdadera cuando una de las proposiciones x o y es verdadera.
$x \times y$ es la clase de todas las cosas que son elementos de x o elementos de y.	$x \times y$ es una proposición que es verdadera cuando x e y son verdaderas.[4]

Además de las literales x, y, z, etc. y de los signos $+$, $-$, $\times$ que representan operaciones, en el álgebra de la lógica se cuenta con el signo $=$ para la identidad y una operación de complementación $\bar{x}$ a la que nada corresponde en la aritmética. En relación a las clases, el *complemento* $\bar{x}$ de una clase está formado por todas las cosas que no son elementos de x, mientras que en la lógica de proposiciones $\bar{x}$ es una proposición que es verdadera si y sólo si x es falsa. En su uso, estos símbolos están sujetos a leyes, en parte concordantes con las del álgebra ordinaria y en parte no. Por ejemplo, se tienen las siguientes identidades, que siguen siendo válidas cuando se les interpreta como igualdades numéricas:[5]

$$xy = yx \qquad x + y = y + x \qquad x(y + z) = xy + xz \qquad 1x = x \qquad x + 0 = x$$

En cambio, las siguientes identidades del álgebra de la lógica no son válidas cuando se les lee como ecuaciones numéricas:

$$xx = x \qquad x + x = x \qquad x + (yz) = (x + y)(x + z)$$

[4] Algunas de estas definiciones las hemos modificado para ajustarnos a la interpretación moderna de estos símbolos. Por ejemplo, la definición que figura en el tercer renglón Boole la expone así: $x + y$ es la clase de todas las cosas que son elementos de x o elementos de y, *pero no de ambas clases*, lo que corresponde al "o" excluyente de la lógica actual, y que escribiríamos así: $(x + y) - xy$.

[5] En adelante, escribimos, como es usual, xy en vez de $x \times y$.

Una cuestión que Boole establece con todo cuidado en *The Laws of Thought* es que si bien su álgebra lógica no se identifica con el álgebra general de los números, sí lo hace con algo más limitado: el álgebra de los números 0 y 1, constituida por aquellas leyes que son verdaderas cuando las variables x, y, z, etc. se interpretan como representativas de 0 y 1 y las operaciones + y × se definen como sigue:

$$0+0=0,\quad 0+1=1,\quad 1+0=1 \text{ y } 1+1=1$$

$$0\times 0=0,\quad 0\times 1=0,\quad 1\times 0=0 \text{ y } 1\times 1=1.$$[6]

A más de cien años de su invención, el álgebra de Boole sigue siendo objeto de consideración de los matemáticos. Si bien en la lógica se le considera un capítulo de la lógica de predicados y su notación ha sido abandonada en favor del simbolismo de Russell y Peano, en otras áreas es objeto de nuevas generalizaciones, como por ejemplo en la teoría de latices o en la de los conjuntos parcialmente ordenados. Otro lugar en el que se le sigue utilizando es en el diseño de circuitos eléctricos, donde los valores 1 y 0 se interpretan como «el interruptor x permite (no permite) el paso de corriente eléctrica» y las operaciones × y + se definen, respectivamente, como la conexión en serie y en paralelo de los interruptores. Tales aplicaciones han sido especialmente importantes en la computación y son una muestra de la libertad que tiene el matemático para interpretar sus teorías más allá de la esfera de los números: una conquista del siglo diecinueve.

2.2.2 Los cuaterniones de Hamilton

Así como en la geometría se llegó a creer que no era posible ningún sistema distinto del euclidiano, de igual forma en la aritmética se llegó a creer que no era posible ningún sistema distinto al del álgebra ordinaria. A esto incluso se le puso un nombre en el siglo diecinueve: *Principio de permanencia de la forma* y fue enunciado por George Peacock (1791-1854) en 1842. Según este principio, las operaciones con expresiones literales han de ser las mismas para cualquier clase de números y coinciden con las del álgebra de los enteros positivos cuando los símbolos son generales en su forma. De este modo, cualquier operación algebraica válida para los enteros positivos sería válida en general. Por ejemplo,

[6] *Op. cit*, p. 37. La identificación que hace Boole no es completa: hay leyes que se cumplen en el álgebra de 1 y 0 y que no lo hacen en el álgebra de la lógica. Por ejemplo, la ley "si $z \neq 0$, entonces $zx = zy$ implica $x = y$" se cumple en el primer caso, pero no en el segundo. No obstante, lo que sí es cierto es que el álgebra de proposiciones es idéntica con el álgebra de 1 y 0, pues en tal caso cada proposición x es verdadera (es decir, $x = 1$) o es falsa (es decir, $x = 0$).

conforme a este principio, la expresión $a(bc) = (ab)c$, al afirmar una propiedad válida para todos los enteros, afirmaría una propiedad válida para todos los a, b y c, y por lo tanto válida para los números complejos (pues la forma *permanecería*). Así, estableciendo propiedades de los números enteros en forma simbólica se podría establecer enunciados simbólicos generales. Peacock en particular se sirvió de este principio para justificar las operaciones con los números complejos, mismas que no contaban con ningún fundamento, pero que resultaban sumamente útiles en la teoría de ecuaciones.

Es difícil para nosotros entender lo que este principio significó en su momento. Expresa de manera arbitraria que los distintos tipos de números tienen las mismas propiedades simbólicas que los números enteros, como si todos ellos estuviesen engarzados por un mismo hilo en la escritura. Este principio, que en realidad es una regla injustificada, lo apoyaron en las siguientes leyes, que eran utilizadas como axiomas en el álgebra:

1. Si a cantidades iguales se añaden otras iguales, los totales son iguales.
2. Si a cantidades desiguales se añaden otras iguales, los totales son desiguales.
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ley asociativa para la suma)
4. $a + b = b + a$ (ley conmutativa para la suma)
5. $a(bc) = (ab)c$ (ley asociativa para el producto)
6. $ab = ba$ (ley conmutativa para el producto)
7. $a(b + c) = ab + ac$ (ley distributiva)

Esta regla comprendía en realidad dos aspectos divergentes. Por una parte tenía un aire de tesis metafísica acerca de la naturaleza de los números y, en su momento, contaba con el hecho de que los distintos sistemas conocidos compartían con los números enteros las mismas propiedades generales. Por otra parte, permitía pensar las propiedades de los números en términos puramente simbólicos, lo cual concordaba con la opinión de algunos algebristas del siglo diecinueve, que consideraban que el álgebra era una ciencia que trataba con símbolos no interpretados y las leyes que gobiernan su combinación y que la selección de tales leyes era enteramente arbitraria.[7]

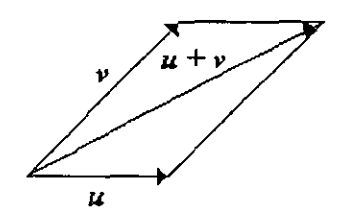
El *principio de la permanencia de la forma* sucumbió cuando William Rowan Hamilton (1805-1865) dio a conocer ciertos objetos numéricos cuyas propiedades contravienen algunos de estos axiomas, como por ejemplo la ley conmutativa para el producto.

En 1843 Hamilton concibió una teoría en la que consideraba una nueva clase de objetos, los *cuaterniones*. Su intención era construir un álgebra apropiada para el estudio de las

[7] Entre tales algebristas se encontraban Augustus de Morgan (1806-1871), Duncan F. Gregory (1813-1844) y el mismo Peacock.

fuerzas que actúan sobre un cuerpo en el espacio tridimensional, aunque también lo hacía por curiosidad, para "ver qué sucedía". El problema en cuestión ya se había resuelto en el caso del plano y la solución se valía de la representación de *vectores* por medio de los números complejos.[8] Hamilton pensó que generalizando la noción de número complejo al espacio tridimensional tendría una solución al problema. Veamos.

Desde la antigüedad, comenzando por Aristóteles, se sabía que las fuerzas se podían representar mediante vectores, e incluso se conocía la llamada *Ley del paralelogramo*, según la cual la diagonal del paralelogramo formado por dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ proporciona la magnitud y la dirección de la fuerza resultante, tal como se muestra en la figura.



A esta forma de representar fuerzas por medio de segmentos dirigidos se anexó la representación de los números complejos por medio de puntos en el plano, gracias a los esfuerzos de Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822), Gauss y el mismo Hamilton, entre otros.[9] El mérito de Hamilton fue que disolvió el problema de la naturaleza del número i ó $\sqrt{-1}$, que no parecía corresponder a ninguna intuición, pero que era una herramienta indispensable en las operaciones. En un trabajo publicado en 1836, Hamilton observó que un número complejo de la forma $a + bi$ sólo representa una suma en sentido figurado, pues a y bi no pueden sumarse como 7 y 5 lo puede hacer y mostró que este número puede definirse como la pareja ordenada de números reales (a, b).

Así, la propiedades de los números complejos pasaron a depender de su definición como parejas ordenadas de números reales y de la definición de las operaciones básicas con ellos, que son tres:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)\cdot(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

Con estas definiciones, las propiedades algebraicas de la suma y el producto (leyes asociativa, conmutativa, etc.) se pueden deducir como una consecuencia de las propiedades de los números reales. Además, los número reales se pueden considerar como un subsistema

[8] Un vector, en el plano o en el espacio, es un segmento dirigido con el que se representan la dirección y la magnitud de una fuerza, una velocidad o una aceleración.
[9] Véase el apéndice 6 que contiene una nota introductoria a los números complejos y su representación en el plano.

del sistema de los números complejos, identificando la pareja $(a, 0)$ con el número real a, y la pareja $(0, b)$ con el número imaginario bi.

Por ejemplo, $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (0, 1)\cdot(0, 1) =_{def} (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1, 0) = -1$, con lo que se tiene el siguiente resultado ya conocido: $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1$. El misterio desaparece.[10]

Como ya vimos en el apéndice 5, los números complejos son muy útiles en el estudio de los vectores y las rotaciones en el plano, y por ello fue que Hamilton intentó diseñar un sistema numérico análogo para el estudio de los vectores y las rotaciones en el espacio tridimensional. Contra lo que pudiera parecer a primera vista, tal sistema no tuvo como base ternas ordenadas de números reales, sino cuartetas de números (a, b, c, d) a las que dio el nombre de *cuaterniones* (quaternions).[11] Por analogía con los números complejos, el cuaternión (a, b, c, d) lo escribió en la forma $a + bi + cj + dk$ y asignó a las expresiones i, j y k un papel semejante al del número i en los complejos. Las reglas formales para sumar y multiplicar cuaterniones son las siguientes:

$$(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d')$$

$$(a, b, c, d)\cdot(a', b', c', d') = (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - dc',$$

$$ac' + ca' + db' - bd', ad' + bc' + da' - cb')$$

Con estas definiciones Hamilton demostró que los números reales y los números complejos están inmersos en los cuaterniones, identificando el número real r con el cuaternión $(r, 0, 0, 0)$ y al número complejo $a + bi$ con $(a, b, 0, 0)$. Asimismo, demostró que la suma de cuaterniones es conmutativa y asociativa, y que la multiplicación es asociativa y distributiva respecto a la suma. No obstante, en relación a la multiplicación, la ley conmutativa no se cumple en todos los casos: hay cuaterniones x e y tales que $xy \neq yx$. Por ejemplo,

$$(0, 1, 0, 0)\cdot(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$$

mientras que

$$(0, 0, 1, 0)\cdot(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1)$$

[10] Es decir, la naturaleza de número i queda aclarada como una pareja de números reales. Para obtener la antigua forma de los números complejos a partir de las parejas de Hamilton es suficiente con notar que todo número complejo (a, b) se puede escribir como sigue: $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)\cdot(0, 1) = a + bi$. De hecho, en la práctica todavía se utiliza esta última notación para los números complejos, pues es más sencillo realizar los cálculos con ella.

[11] En retrospectiva, es fácil entender por qué los cuaterniones habrían de tener cuatro componentes en vez de tres. En principio, su cometido era rotar un vector en torno a un eje dado, a la vez que alargarlo o contraerlo. Para ello se necesitan cuatro parámetros: dos ángulos para fijar el eje de rotación, otro para fijar el ángulo de rotación y uno más para fijar el factor de expansión. Esto trajo como consecuencia la imposibilidad de representar los cuaterniones mediante vectores en el espacio tridimensional.

Identificando los símbolos ***i***, ***j*** y ***k*** con los cuaterniones (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) y (0, 0, 0, 1), respectivamente, Hamilton estableció la siguiente tabla de multiplicación entre ellos:[12]

•	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Si el producto fuera conmutativo, la tabla sería simétrica respecto a la diagonal formada por 1 y -1. La idea de una operación no conmutativa, es decir, de una operación para la que el orden en que se consideran los factores es relevante, no fue aceptada sin renuencia. Antes de llegar a los cuaterniones, el mismo Hamilton se esforzó durante quince años por encontrar una extensión de los números complejos que satisficiera la ley conmutativa de la multiplicación, hasta que una tarde le sobrevino la idea de abandonarla. Cuenta la tradición que fue tal su impresión, que la tabla anterior la talló en las piedras de un puente de Dublín por donde paseaba en ese momento: la ruptura con el *principio de la permanencia de la forma* se había consumado.

Una de las ventajas de haber liberado al concepto de número de la penosa necesidad de representar magnitudes físicas o espaciales fue que éste se pudo generalizar de distintas maneras. Así, por ejemplo, en 1844 Hermann Grassmann (1809-1877) publicó un trabajo titulado *Die lineale Ausdehnungoslehre* (El cálculo de la extensión) en el que desarrolla ciertos sistemas algebraicos de mayor generalidad que los cuaterniones. En vez de tratar, como Hamilton, sólo con cuartetas de números reales, Grassmann considera sucesiones finitas $(x_1, ..., x_n)$ de éstos. A cada una de estas sucesiones le hace corresponder un número *hipercomplejo* $x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ donde $e_1, e_2, ..., e_n$ son las *unidades* fundamentales de su álgebra. Tales números hipercomplejos se suman y multiplican como polinomios en e_1, $e_2, ..., e_n$. En particular, para calcular el producto de dos números cualesquiera es necesario disponer de tablas similares a la que Hamilton introdujo para los cuaterniones. No obstante, en tales casos se cuenta con un amplio margen de libertad, pudiéndose construir distintas álgebras a través de distintas tablas, dependiendo de la aplicación que se tenga en mente y de las leyes algebraicas a preservar.

12 Los cuaterniones se pueden escribir en la forma $a + bi + cj + dk$. En tal caso se les puede multiplicar como polinomios en i, j y k y simplificar el producto resultante utilizando la tabla. Proceder de esta manera facilita el cálculo y no introduce ningún elemento de incertidumbre en la teoría, pues los "números" i, j y k son entidades perfectamente definidas sin ninguna connotación metafísica.

Aun sin explicar en detalle los trabajos de Hamilton y Grassmann, podemos decir que su importancia histórica radica en que hicieron valer el derecho de crear sistemas abstractos regidos por leyes distintas a las del álgebra tradicional y abrieron el camino para explorar nuevos e innumerables sistemas. El álgebra moderna se vale de este recurso y, en cierto sentido, sigue marchando por la misma senda, creando y comparando sistemas mediante la adición, supresión, debilitamiento y/o sustitución de postulados.[13] Este trabajo va acompañado de la creación de estructuras abstractas como representación de las nuevas teorías, y que sólo tienen existencia en un sentido matemático.

[13] Así, por ejemplo, de los axiomas de *campo* se pueden obtener los axiomas de *anillo*, *anillo conmutativo*, *anillo con división* (los cuaterniones son un ejemplo de ello), *dominio entero*, *anillo unitario* y *grupo*, siendo quizá esta última noción la más importante del álgebra moderna. Acaso sea correcto decir que los matemáticos han estudiado en detalle más de doscientas estructuras de este tipo y sus mutuas relaciones.

Un efecto de tal abstracción fue el descubrimiento de similitudes entre estructuras que en apariencia no tenían nada que ver entre sí, pero que resultaban ser modelos de un mismo sistema algebraico, así como el encuentro de nuevas analogías y generalizaciones. Fue un momento constructivo en el que, cambiando las reglas de diversos sistemas abstractos, se inventaron nuevas teorías con aplicaciones imprevistas.

2.3 La teoría de grupos y el programa de Erlangen

La aparición de nuevas nociones abstractas pronto dejó ver la afinidad estructural de diversas teorías matemáticas. Tal fue el caso de la noción de *grupo*, una de las nociones más fecundas de la matemática moderna. La *teoría de grupos* ejemplifica a la perfección un hecho que pudiera parecer paradójico a primera vista: el que una teoría, desarrollada en un principio por sí misma o por su utilidad en la matemática misma, se convierta de súbito en una herramienta esencial de otras disciplinas científicas, en este caso la física. Aunque con anterioridad ya se habían suscitado casos semejantes —Kepler con las cónicas, Einstein con la geometría de Riemann—, el caso de la teoría de grupos es sin embargo más sorprendente, pues en apariencia ésta nada tiene que ver con algo tan específico como las partículas elementales (de esto hablaremos en la siguiente sección).

La teoría de grupos se originó en el estudio de la resolución de ecuaciones por parte de Evariste Galois (1811-1832) y cobró vida propia a lo largo del siglo diecinueve en los trabajos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Joseph Alfred Serret (1819-1885), Camile Jordan (1838-1922) y Arthur Cayley (1821-1895), entre otros. En 1872 la noción ya había madurado lo suficiente como para que Felix Klein (1849-1925) propusiera una novedosa manera de definir lo que es una *geometría* con base en la teoría de grupos, así como una clasificación de las distintas geometrías conocidas en su tiempo a partir de la noción de *grupo de transformaciones*, subyacente a todas ellas.[1]

La noción de *transformación* es muy simple: una transformación de un conjunto X en sí mismo es una correspondencia bajo la cual a cada elemento de X le corresponde un sólo elemento de X (su *imagen*), y cada elemento de X es imagen de uno y sólo un elemento de él. De ahí el nombre de *transformación*: cada elemento de X se *transforma* en otro elemento de ese conjunto o quizá en él mismo. En este contexto el concepto de *grupo* aparece cuando se introducen las nociones de *producto de transformaciones*, *inversa de una transformación* y *transformación idéntica*. El *producto* T_2T_1 de dos transformaciones

[1] La noción de *transformación* es una caso particular del concepto de *correspondencia* o *función* que tan importante papel juega en la matemática moderna, y que la caracteriza como algo más que una ciencia que se ocupa de números y magnitudes. A diferencia de la matemática anterior, dominada por las nociones de medida y extensión, la matemática moderna lo está por las nociones de correspondencia, orden, cambio y arreglo, en las que la idea central es la de *correspondencia entre agregados de objetos*. En ella, un tema que se repite con insistencia es el de investigar qué propiedades de los objetos considerados se preservan bajo clases específicas de correspondencias, lo que no requiere necesariamente del concepto de medida o magnitud, sino del concepto de *función*. Esta noción floreció en el siglo diecinueve y se hizo presente en prácticamente todas las teorías matemáticas, al grado de que Vito Volterra no vaciló en afirmar en el congreso de 1900 que el siglo diecinueve había sido «el siglo de las funciones.» (cita tomada de Kline, 1994, p. 1348). Las funciones, en tanto que objeto de estudio, ejemplifican muy bien el tipo de entidades en que se interesa la matemática moderna más allá de la cantidad y las figuras geométricas, y cuya naturaleza abstracta descansa en gran medida el carácter abstracto de esta noción.

T_1 y T_2 de X es la transformación que resulta de llevar a cabo primero T_1 y después T_2. Si denotamos con $T(x)$ al elemento correspondiente a un objeto x bajo una transformación T, entonces el producto se puede definir así:

$$(T_2T_1)(x) =_{\text{def}} T_2(T_1(x))$$

A su vez, la *inversa* de una transformación T es la transformación T^{-1} con la siguiente propiedad: si x' es el elemento correspondiente a x bajo T, entonces x es el elemento correspondiente a x' bajo T^{-1} (es decir, T^{-1} *invierte* la correspondencia o "regresa" x' a x). Con la notación recién expuesta podemos definir T^{-1} como sigue:

$$T^{-1}(T(x)) =_{\text{def}} x$$

Por tanto, el producto de una transformación T con su inversa T^{-1} es una transformación I tal que $I(x) = x$, llamada *transformación idéntica* o *de identidad*.

Las transformaciones en el sentido recién expuesto constituyen un *grupo*, es decir, una estructura algebraica que satisface las condiciones que a continuación se indican.

Sea G un conjunto arbitrario y «•» una operación (función) que a cada pareja (x, y) de elementos de G le hace corresponder un único elemento $x \bullet y$ de G. Se dice que $(G, \bullet)$ es un *grupo* cuando se satisfacen los siguientes axiomas:

1) $\forall x \forall y \forall z(x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z)$ (Asociatividad)

2) Hay un elemento $e \in G$ tal que $\forall x(x \bullet e = e \bullet x = x)$ (Elemento neutro)

3) $\forall x \exists y(x \bullet y = y \bullet x = e)$ (Elemento inverso)

Al inverso de x se le suele denotar con x^{-1}. Si además se cumple el siguiente axioma, se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano*:

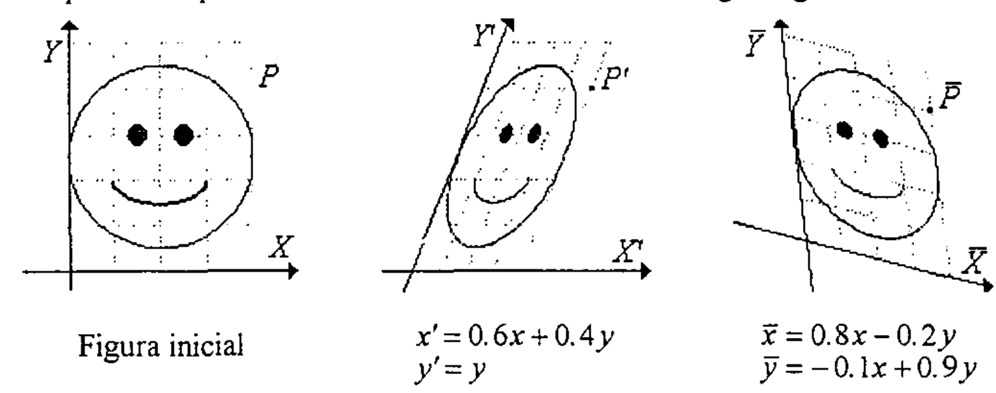
4) $\forall x \forall y(x \bullet y = y \bullet x)$ (Conmutatividad)

Si la operación «•» se interpreta como el producto de transformaciones de un conjunto X, entonces los axiomas 1, 2, 3 se satisfacen y se tiene un grupo (es decir, las transformaciones de un conjunto X siempre constituyen un *grupo*). En cambio, el axioma 4 no siempre se cumple en el caso de las transformaciones, pudiéndose no satisfacer.

Consideremos a manera de ejemplo algunas transformaciones en el plano coordenado. Sean T_1 y T_2 las funciones que al punto de coordenadas (x, y) le hacen corresponder, respectivamente, los puntos de coordenadas

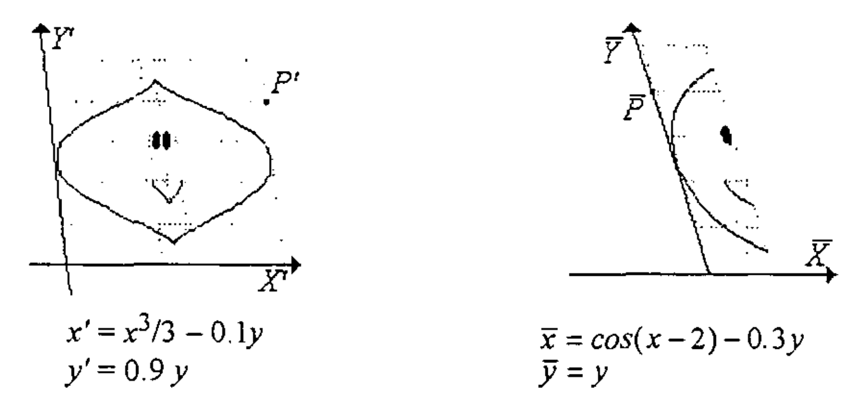
$$T_1: \begin{array}{l} x' = 0.6x + 0.4y \\ y' = y \end{array} \qquad T_2: \begin{array}{l} \bar{x} = 0.8x - 0.2y \\ \bar{y} = -0.1x + 0.9y \end{array}$$

Veamos qué efecto producen estas transformaciones en las figuras geométricas:



Estas correspondencias son *transformaciones* del plano en el sentido indicado, es decir, en ambos caso a cada punto se le hace corresponder una sola imagen, y cada punto del plano es imagen de un solo punto.

Ahora consideremos otro tipo de correspondencias (no necesariamente transformaciones) denominadas *no lineales*, pues sus ecuaciones no son de primer grado, como la de la línea recta.



La primera de ellas es una transformación, mientras que la segunda nó lo es. Por ejemplo, la parte derecha de la "carita sonriente" ha quedado superpuesta a la parte izquierda. Esto se debe a que la función trigonométrica *coseno* que figura en una de sus ecuaciones tiene el mismo valor para un argumento x que para su inverso aditivo $-x$ (es una función *par*). Nótese que los objetos considerados ya no son números o figuras, sino funciones. Provisto de este concepto, Klein propuso la siguiente definición de lo que es *una* geometría:

> *Una geometría es el estudio de las propiedades de los objetos pertenecientes a un conjunto* X *que permanecen invariantes cuando los elementos de* X *se someten a las transformaciones de un grupo* G. *La geometría en cuestión se denota con* (X, G).

Tradicionalmente, la geometría euclidiana se había entendido como el estudio de las propiedades de las figuras del espacio. Para mostrar la relación entre esta idea y la

definición de Klein, considérese el conjunto X de los puntos en el plano y el conjunto Γ de transformaciones de X consistentes en traslaciones, rotaciones y reflexiones en líneas. Como el producto de dos transformaciones de esta clase y la inversa de cualquiera de ellas pertenece a Γ, (X, Γ) es un grupo. La geometría resultante es la geometría euclidiana métrica del plano, en la que puntos y figuras como triángulos, círculos, líneas rectas, etc. conservan su área, longitud, congruencia, paralelismo, perpendicularidad, concurrencia o colinealidad cuando se les somete a tales transformaciones. Dichas propiedades se dice que son *invariantes* bajo el grupo Γ, y entre ellas se encuentran las enunciadas en los libros de Euclides y que se refieren a estos conceptos. Por tanto, la geometría euclidiana métrica plana se puede caracterizar como el estudio de las propiedades de las figuras planas que no varían (son invariantes) cuando se les somete a transformaciones rígidas, es decir, a transformaciones que preservan distancias y que no son otras que las pertenecientes a Γ. A esta geometría se le denomina *geometría métrica plana*.

Este modo de ver la geometría tiene la virtud de que permite ordenar sus teorías de modo que la relación entre algunas de ellas se hace evidente. Por ejemplo, si a las transformaciones de Γ se añaden las *homotecias* (es decir, transformaciones en las que cada punto P se transforma en un punto P' tal que $AP' = k \cdot AP$, donde A es un punto fijo y k una constante mayor que cero), se obtiene una nueva geometría denominada *equiforme*, en la que figuras como triángulos, círculos o segmentos ya no conservan su área o longitud, pero sí sus relaciones de perpendicularidad, paralelismo, concurrencia o colinealidad, al igual que las relaciones de orden e incidencia que figuran en los postulados de Hilbert (v. gr., I.1, I.2, II.1, postulado de Pasch, etc.).[2] A esta geometría corresponden, además de las anteriores, las propiedades de semejanza que estudia Euclides en sus *Elementos*. Así, la geometría equiforme es más general que la métrica, y el grupo de transformaciones de la primera contiene como *subgrupo* al grupo de transformaciones de la segunda.[3]

Esta posibilidad de clasificar las geometrías parte de la idea (originalmente de Klein) de invertir la relación entre la geometría y los grupos de transformaciones, convirtiendo a éstos en el objeto primordial. Esto permite vincular entre sí distintas geometrías en tanto que *partícipes* de un mismo grupo de transformaciones, y establecer una relación de

---

2 Una *homotecia* es una transformación en la que los ángulos permanecen iguales (son invariantes), las longitudes de los segmentos varían en la misma proporción y los puntos que se corresponden están alineados respecto a un punto fijo llamado *centro de homotecia*, (el punto A mencionado en la definición). Bajo una transformación homotética, las figuras conservan su forma y proporciones, más no su tamaño.

3 Un *subgrupo* de un grupo G es un subconjunto X de G que constituye un grupo bajo la misma operación «•». Por ejemplo, las rotaciones del plano constituyen un subgrupo del grupo de transformaciones rígidas.

subordinación entre las geometrías con base en la noción de *subgrupo*.[4] Así, por ejemplo, el grupo de transformaciones proyectivas tiene como subgrupo al grupo de transformaciones afines, y éste último al de transformaciones equiformes que contiene al grupo de transformaciones rígidas. Por tanto, la geometría métrica está comprendida en la geometría equiforme, ésta en la geometría afín y esta última en la geometría proyectiva, de modo que todo teorema de la geometría proyectiva es válido en las demás.[5]

Aunque no nos detendremos a examinar esta cuestión, podemos decir que la síntesis y la codificación de Klein permanecieron como algo válido por lo menos hasta el advenimiento de la topología. Su obra ilustra a la perfección los cambios ocurridos en la matemática a fines del siglo diecinueve, en la que comenzaron a surgir conceptos cada vez más generales y objetos cada vez más abstractos, y en la que las teorías ya no se podían justificar con los viejos argumentos kantianos o con el positivismo del siglo dieciocho. Cerramos esta sección con tres comentarios:

1) Una diferencia entre la geometría antigua y la que se desarrolla a fines del siglo diecinueve es la falta de concreción de esta última. Muchas de sus teorías proceden sin figuras, y sin hacer uso, aparentemente, de la intuición espacial. En su lugar, se apoyan decididamente en el poder de la herramienta analítica que utilizan, en contraste con los métodos puramente geométricos de antaño. Esto es particularmente cierto respecto al uso de la teoría de grupos por parte de Klein, quien, apoyándose en el álgebra, pone el énfasis en ideas de carácter general —*grupo de transformaciones, invariantes*—, abarcando una multitud de resultados bajo un mismo aspecto, en vez de centrarse en lo particular.

2) Otra característica de la nueva geometría es su preferencia por la representación simbólica de los objetos, agrupando en fórmulas y ecuaciones diversos casos que trata como uno solo, con lo que logra una notable generalidad y simplicidad. A diferencia de esto, los antiguos siempre refirieron los problemas y los teoremas geométricos a figuras muy bien definidas, y cuando los elementos que en ellas participan (v. gr., puntos y líneas) podían tener diversas posiciones relativas, cada uno de estos casos se consideraba por separado. En este sentido, la geometría antigua sacrificó la universalidad en aras de la concreción de la figura, y perdió con ello la posibilidad de reconocer los principios generales subyacentes a la teoría.

---

[4] A este proyecto de clasificación de las geometrías existentes se le conoce como *Programa de Erlangen*, y fue propuesto en 1872 por Felix Klein al ingresar como profesor a la Universidad de Erlangen en Baviera.

[5] Hasta mediados del siglo veinte, el grupo de transformaciones proyectiva contenía como subgrupos a los grupos de transformaciones de prácticamente todas las geometría consideradas. Hechos como el anterior llevaron a Arthur Cayley a decir que la geometría proyectiva contenía toda la geometría. En realidad, lo cierto es lo contrario: todos los teoremas de la geometría proyectiva están contenidos en aquellas geometrías cuyos grupos contiene.

3) Hay otras diferencias importantes entre la nueva y la vieja matemática que no habremos de abordar en una obra de esta naturaleza, pero que no podemos dejar de mencionar. Una de ellas es que el uso de nociones abstractas como la de *grupo* permite introducir nuevas ideas (como, por ejemplo, la idea de *acción* o *movimiento*) que conducen a una mayor generalidad y abstracción (dado el grupo, escoger un conjunto *X* y una operación • que lo represente). Asimismo, la nueva matemática favorece el establecimiento de vínculos entre distintas teorías que antes no estaban relacionadas entre sí (v. gr., los números complejos con las geometrías no euclidianas, la geometría con el álgebra vectorial y el álgebra lineal, etc.), o introducir nuevas nociones (como la de espacio de dimensión infinita) y extender los procedimientos a otras áreas (v. gr., llevar la teoría de grupos a la geometría diferencial). Al respecto, el lector interesado podrá consultar algunas obras de carácter histórico en las que estas cuestiones se analizan con cierto detenimiento, como, por ejemplo, Eves, 1976 o Kline, 1994.

2.4 La matemática moderna en la física

La aparición de la estructura abstracta de grupo marcó un hito en la historia de las matemáticas. Es quizá la estructura algebraica con más aplicaciones dentro de la matemática y nadie discute su importancia o belleza. Se le encuentra en casi todas partes: en el álgebra lineal, en la aritmética, en la geometría, en la cristalografía, en la teoría de códigos, en el análisis combinatorio, en la teoría de ecuaciones, en las ecuaciones diferenciales, en el análisis y en toda el álgebra moderna, al punto que algunos matemáticos llegaron a pensar que la matemática quedaría unificada por ella (v. gr., Klein y Poincaré).[1] Si bien tal expectativa no se cumplió, el futuro aún tenía reservada una sorpresa: aunque el concepto provenía enteramente de la matemática, sirvió como pieza fundamental para forjar las nuevas teorías físicas del siglo veinte, principalmente la teoría de las partículas elementales y la mecánica cuántica. Escuchemos a Freeman J. Dyson:

> El enorme poder de la teoría de grupos en la física deriva de dos hechos. Primero, que las leyes de la mecánica cuántica establecen que, siempre que un objeto físico tiene una simetría, hay un grupo de operaciones G bien definido que preserva la simetría y los posibles estados cuánticos del objeto se encuentran en correspondencia exacta con las representaciones de G. Segundo, que la enumeración y clasificación de todos los grupos de buen comportamiento y sus representaciones ya fue hecha de una vez por todas por los matemáticos, independientemente de la situación física a la que se puedan aplicar. De estos dos hechos resulta la posibilidad de elaborar una teoría enteramente abstracta de las simetrías de las partículas elementales, basada en las cualidades generales de grupos y representaciones y evitando los modelos mecánicos o dinámicos arbitrarios.[2]

El uso de la teoría abstracta de grupos lo explica Dyson con un ejemplo. Un átomo que flota en un gas rarificado no tiene una dirección preferida en el espacio y, por lo tanto, tiene las simetrías del grupo de rotaciones O_3 del espacio tridimensional en torno a un centro O. Entre las distintas representaciones de O_3 se encuentra la formada por ternas de números reales. Algunas de éstas corresponden a estados del átomo que tienen una unidad de espín. A éstas se les llama *ternas de estado* y siempre se presentan en grupos de tres con la misma energía. Si se activa un campo magnético de modo que destruya la simetría rotacional, las tres energías se escinden y los tres estados se pueden ver en un espectroscopio como una

[1] No obstante, su importancia no fue reconocida de inmediato: si bien ya se habían considerado casos específicos del concepto de grupo, por ejemplo en la teoría de Galois, su exposición como sistema abstracto no se dio sino hasta la segunda mitad del siglo diecinueve en los trabajos de Cayley, Leopold Kronecker (1823-1891), Richard Dedekind (1831-1916), Klein, Sophus Lie (1842-1899) y Walther von Dick (1856-1934), entre otros.

[2] Dyson, 1964 p. 134. El último comentario es significativo: los «modelos mecánicos o dinámicos» a que se refiere el autor son representaciones como la del "sistema planetario" para el átomo, que no tienen ningún fundamento. Así, los objetos de la física también devinieron entes abstractos, de carácter matemático.

terna de líneas espectrales. La clasificación de los estados del átomo conforme a la simetría rotacional es el ejemplo estándar de la aplicación de la teoría de grupos o, como él dice, de la teoría concreta de grupos en acción.

Este ejemplo del uso de la teoría de grupos en la física tiene como propósito mostrar la otra cara de la moneda: para la física, la matemática no es sólo una herramienta por medio de la cual los fenómenos pueden ser calculados (como creyeran d'Alambert y Laplace), sino una fuente de conceptos y principios por medio de los cuales puede *crear* nuevas teorías.

El ejemplo anterior no es el único que nos puede mostrar este hecho. Quizá el caso más famoso sea el de la teoría de la gravitación de Einstein, mejor conocida como teoría general de la relatividad. Escuchemos nuevamente a Freeman J. Dyson:

> Para edificar su teoría, Einstein recurrió a la geometría no euclidiana, una geometría sobre espacios curvos que fue inventada en el siglo diecinueve. Einstein dio un paso inusitado al identificar nuestro espacio-tiempo real con un espacio curvo no euclidiano, de modo que las leyes de la física se convirtieron en proposiciones de una geometría radicalmente diferente de la geometría clásica del espacio plano. Esto lo hizo con base en argumentos de carácter general y juicios estéticos. Las pruebas de la teoría basadas en la observación no se llevaron a cabo sino tiempo después de su construcción y no jugaron ningún papel en el proceso creativo. Einstein mismo parece haber confiado tanto en su intuición matemática que jamás se inquietó respecto al resultado de las observaciones. Por supuesto, los resultados positivos de las mismas fueron un paso decisivo para convencer a los físicos que tenía razón.[3]

Ciertamente, la teoría de la relatividad es, como dice Dyson, «el primer ejemplo de una teoría física construida sobre un "salto matemático en la oscuridad"».[4] El segundo lo fue la mecánica cuántica, que también parte de un «salto especulativo de la imaginación matemática, el cual se ve con mayor claridad en el trabajo de Schrödinger.».[5] En efecto, para adoptar tales teorías matemáticas no se contaba en principio con ninguna evidencia empírica.

Éste fue el estado de cosas al que se llegó tras la expansión y liberación de la matemática, y éstas las ganancias que produjo en otras áreas del conocimiento,[6] lo que de suyo nos lleva

---

[3] *Op. cit*, p. 131.
[4] *Ibid.*
[5] *Ibid.*
[6] Un último ejemplo que no queremos dejar de mencionar es el de los *espacios de Hilbert* y su uso en la mecánica cuántica. Se trata de un caso en el que una teoría matemática, fruto del movimiento interno de esta disciplina, ofreció el simbolismo adecuado para desarrollar una teoría, no de números o cantidades, sino de "estados". Los *espacios de Hilbert* se obtienen al generalizar la geometría de Euclides a espacios de dimensión infinita. En dichos espacios los *puntos* son sucesiones infinitas x_1, x_2, ..., x_n, ... de números con la propiedad de que la serie de sus cuadrados es

a una pregunta que, si bien rebasa el marco de esta obra, es significativa del impacto de la matemática moderna en la ciencia: ¿cuál es el papel de la matemática en la formación del objeto de estudio en áreas como la física? Junto a ésta, surge de inmediato la interrogante que nos hemos planteado desde el inicio de esta obra: ¿qué garantía racional tenemos de que la matemática, ahora indisolublemente entrelazada con las teorías físicas, no habrá de llevarlas por una senda equivocada? ¿Cómo estar seguros de que el cuadro de los fenómenos que nos proporciona una teoría física forma un todo consistente? En cuanto al aparato matemático utilizado, habría que garantizar que éste no puede ser la fuente de tales imperfecciones. Ésta fue una segunda razón para que Hilbert insistiera en el problema de los fundamentos de la matemática y en la necesidad de dar una prueba de consistencia de sus más importantes teorías.

Los ejemplos recién mencionados no son un caso aislado y bastan por sí mismos para justificar la defensa que hiciera Hilbert de la matemática pura, aduciendo que ésta a la larga produce resultados inesperados en otras áreas del conocimiento, como si se tratara de una ciencia cuya función fuera la de elaborar moldes abstractos o, como dijéramos en la sección 1.5.3, *armazones de conceptos* que sólo más tarde se podrán llenar con algún contenido específico en el marco de otra disciplina.[7] Parece también plenamente justificado el punto de vista según el cual las matemáticas obedecen a un doble movimiento, uno interno que da lugar a sus propios problemas y teorías, y otro externo, que las convierte en un factor esencial en la comprensión y dominio de la naturaleza.

Así, además de un crecimiento sin precedente,[8] la matemática del siglo diecinueve experimentó también un cambio en los métodos utilizados, los fines perseguidos y la adopción de un espíritu critico que llevó a una revisión de sus fundamentos. La acción de

---

convergente. Para la mecánica cuántica estos objetos fueron la clave para precisar la idea de "estado cuántico", y con ellos se pudo edificar una teoría rigurosa en la que se procede lógicamente a partir de axiomas claramente definidos.

[7] En 1930 Hilbert puso como ejemplo el estudio de las secciones cónicas, cuyas propiedades fueron investigadas desde la antigüedad sin sospechar siquiera que nuestros planetas se mueven siguiendo su curso, llegando incluso a hablar de una *armonía preestablecida* entre el pensamiento y la realidad, a lo que añade: «Recientemente se han presentado algunos casos en los que los más importantes teoremas matemáticos, aquellos que se encuentran al centro de la atención de los investigadores, son al mismo tiempo los que la física necesita. Yo he desarrollado una teoría de una infinidad de variables a partir de un interés puramente matemático, e incluso he utilizado el término análisis espectral, sin sospechar que un día se realizaría en el espectro actual de la física.». [Hilbert, 1930], cita tomada de la traducción al inglés, p. 1160. Aquí reaparece la idea de que los geómetras son sastres, que hacen trajes a la medida.

[8] Ahí están como ejemplo la teoría de los números, el análisis matemático, la teoría de Galois, las teoría de la convergencia de series, la teoría de funciones, la teoría analítica del calor, las series de Fourier, las ecuaciones diferenciales parciales, las funciones elípticas, el cálculo de variaciones, el álgebra de matrices, la geometría diferencial, la geometría proyectiva y la teoría de conjuntos de Cantor, que por sí mismas hablan de un desarrollo sin paralelo en esta ciencia. A lo anterior habría que añadir las llamadas *pruebas de imposibilidad*, la primera de las cuales es la que establece la imposibilidad de deducir el quinto postulado de los otros cuatro, o la prueba de imposibilidad de los tres problemas clásicos (duplicar el cubo, trisecar el ángulo o cuadrar el círculo con regla y compás) o la de resolver cualquier ecuación de grado mayor al cuarto por medio de radicales. Estas pruebas fueron las primeras en su género, y a ellas se habrían de unir las ideadas por Cantor, Gödel, Church, Tarski, Turing y Matijasevich en el siglo veinte.

estos tres factores fue determinante en la constitución de una nueva matemática que gusta más de la forma y la estructura, frente a la matemática tradicional que prefiere operar con la intuición y en contacto directo con el objeto de estudio.[9]

[9] En este punto se presenta un hecho paradójico: por una parte, es muy fácil distinguir la matemática moderna de la clásica, y por la otra es muy difícil trazar una clara demarcación entre ambas, sobre todo si tomamos en cuenta que se trata de una ciencia que nada desecha. Así, por ejemplo, las nuevas geometrías no anularon la euclidiana, ni las nuevas teorías algebraicas echaron al olvido el álgebra tradicional. Cuando una teoría se generaliza o se modifica, no por ello se le rechaza: nada de lo nuevo excluye a lo viejo, sólo lo pone en perspectiva, enriqueciéndose y enriqueciendo nuestro punto de vista. En todo caso, la diferencia habría que buscarla en el modo de pensar los objetos y en la búsqueda de la estructura subyacente en cada caso.

2.5 La aritmetización del análisis

El desarrollo de la matemática ha obligado en ciertos momentos a reconsiderar el sistema de ideas y creencias que hasta entonces se habían aceptado como justificación y fundamento de la misma. Dichos momentos, llamados "críticos" o "de crisis en los fundamentos", se han caracterizado por la aparición de ciertas irregularidades difícilmente explicables a partir del sistema de evidencias admitido. Fruto de tales crisis ha sido la necesidad de revisar sus principios o fundamentos, complementando de este modo el trabajo matemático con un examen minucioso de las ideas centrales en torno a las cuales se desarrolla.

La primera crisis en los fundamentos de la matemática está relacionada con el descubrimiento de los números irracionales en la antigua Grecia. Este descubrimiento echó por tierra el primer intento conocido por unificar la matemática en una sola ciencia que albergara, por una parte la geometría (ciencia de lo continuo) y, por la otra, la aritmética (ciencia de lo discreto). En su intento por dar una presentación unitaria de esta disciplina, los pitagóricos, protagonistas de esta crisis, identificaron la unidad aritmética con el punto, entendido este último como *unidad dotada de posición*. Esto significa que para los pitagóricos el punto difería de la unidad numérica sólo por esta característica adicional de *localización*: una linea de doble longitud que otra se suponía formada por el doble de puntos.[1] De este modo el punto desempeñaba el papel de "unidad geométrica" y toda linea se consideraba formada por un número finito, aunque muy grande, de puntos. Este supuesto implicaba que todas las lineas eran conmensurables entre sí, esto es, que tenían una medida en común, lo cual, traducido a relaciones numéricas, significaba que se les podía medir mediante números racionales. Al desarrollar el programa basado en esta idea, los pitagóricos se encontraron con el problema de establecer la relación entre el número de puntos del lado de un cuadrado y los contenidos en la diagonal del mismo. Pronto llegaron a una conclusión que no tenía cabida en su concepción de la matemática: el lado del cuadrado y su diagonal no son conmensurables, lo cual, en lenguaje moderno, se expresa diciendo que $\sqrt{2}$ es *irracional*, es decir, que no se puede expresar como un cociente de la forma p/q donde p y q son números enteros. Debido a este descubrimiento, la doctrina de la conmensurabilidad y la idea misma de que «todas las cosas están hechas de números» fue abandonada, al igual que el estudio de la aritmética sin el recurso de la geometría.

El siglo diecinueve afrontó una segunda crisis en el fundamento de la matemática, esta vez ocasionada en parte por la aparición de resultados paradójicos en el análisis (que

[1] La afirmación atribuida a los Pitagóricos: "Los números son el principio de todas las cosas", puede interpretarse como una doble identificación: la de la unidad aritmética con el punto geométrico y la de los dos con una unidad física indivisible, para la cual no se había forjado aún el nombre de átomo. (*v*. Ramnoux, 1972.)

comprendía al cálculo, las ecuaciones diferenciales y la variable compleja), y en parte por el tratamiento poco riguroso que hasta entonces se le había dado a sus conceptos.

En efecto, los trabajos de los fundadores del análisis y del siglo dieciocho en general se basaron en gran medida sobre profundas intuiciones que les permitieron resolver con acierto la mayor parte de los problemas que se plantearon. Sin embargo, los rigurosos procesos deductivos, ya presentes en la obra de Euclides, fueron dejados de lado; en su lugar se colocó la intuición, principalmente la geométrica. La existencia de un ente matemático, en vez de ser deducida, se intuía, y la falta de rigor fue sustituida por profundas y certeras intuiciones relativas a los objetos matemáticos. Consecuencia de ello fue que no tardaron en aparecer las dificultades y las criticas: los conceptos básicos (por ejemplo el de función) eran poco claros y con frecuencia ligados a representaciones geométricas o físicas; la falta de rigor en el tratamiento conducía a resultados absurdos (tal fue el caso, por ejemplo, de las series, para las cuales no se tenían criterios de convergencia), e incluso se llegaron a "probar" conclusiones que al poco tiempo se vio que eran falsas. Por ejemplo, André-Marie Ampère (1775-1836) "demostró" que una curva tiene tangente en todos sus puntos, con la posible excepción de algunos de ellos en forma aislada, conclusión que marcha acorde a los dictados de la intuición. La sorpresa fue general cuando, tiempo después, Karl Weierstrass (1815-1897) anunció la existencia de una curva continua pero sin tangente en ninguno de sus puntos. Estos desarrollos trajeron consigo un cambio en el concepto de función, una de las nociones centrales de la matemática moderna. Ante tales dificultades algunos matemáticos se propusieron "poner orden en el caos": era indispensable volver al rigor euclidiano en una matemática mucho más desarrollada y compleja. Su tarea consistió inicialmente en proporcionar criterios que permitieran tratar con un máximo de rigor nociones tales como las de función, convergencia, continuidad y diferenciación, a fin de liberar al análisis de su dependencia de nociones geométricas, del concepto de movimiento, de los números infinitamente pequeños (infinitesimales) y de todo tipo de consideraciones intuitivas en las demostraciones. He aquí como se expresa Richard Dedekind (1831-1916) al respecto:

> Como profesor de la Escuela Politécnica de Zurich y ante la exigencia de enseñar los métodos del cálculo diferencial e integral, sentí más que nunca la necesidad de un fundamento verdaderamente científico para la aritmética. Al discutir la noción de "aproximación" de una magnitud variable a un valor límite fijo y al probar el teorema que establece que toda magnitud creciente, continua y acotada se aproxima a un límite, he tenido que apelar a la evidencia geométrica. Dicho recurso a la evidencia me parece útil desde un punto de vista didáctico, e incluso indispensable si no se desea perder tiempo. Sin embargo, esta forma de introducirse al cálculo no se puede decir

> que sea científica, nadie lo negará. Este sentimiento de insatisfacción era tan grande en mí que tomé la determinación de meditar en el problema hasta encontrar un riguroso fundamento para los principios del análisis infinitesimal. Se dice con frecuencia que el cálculo trata con las magnitudes continuas y aún no se ha encontrado una explicación a la continuidad. Incluso las más rigurosa exposición del cálculo diferencial no basa sus demostraciones en la noción de continuidad, sino que apela con vaga conciencia de ello, o bien a nociones geométricas (o aquellas que sugiere la geometría), o bien a teoremas que no se han demostrado de un modo puramente aritmético.[2]

La definición de nociones como las de «convergencia» «derivada», «continuidad» o «límite» sobre la sola base de la aritmética fue obra de matemáticos como Bernard Bolzano (1781-1848), Riemann, Cauchy y Weierstrass que suministraron una sólida base para el análisis. No obstante, el establecimiento del rigor no marcó el fin de las investigaciones en torno a su fundamento, ya que prácticamente todo el trabajo efectuado presuponía el conocimiento de los números reales y este sistema aún no se había organizado.[3] Al hacerlo, fue posible construir el continuo numérico mediante una compleja reducción de este sistema al de los números naturales junto con algunas nociones de la teoría de conjuntos, y sólo fue a partir de entonces que se lograron establecer las propiedades de los números reales (véanse, por ejemplo, los axiomas V.2 de Hilbert para la geometría y V'.1 de Dedekind en la sección 1.3.1). Es por ello que a la instauración del rigor en el análisis se le llama *aritmetización del análisis*. Vista desde una amplia perspectiva, esta "aritmetización" presenta dos aspectos complementarios: en primer lugar, liberó al análisis de la intuición geométrica; en segundo, logró la reducción de las nociones básicas del análisis a las de número entero y conjunto infinito de números racionales. Lo insatisfactorio de esta reducción es que no se logró sobre la sola base de la aritmética, sino de la aritmética junto con algunas nociones propias de la teoría de conjuntos, pues para "construir" el sistema de los números reales es inevitable introducir la totalidad de los números racionales o subconjuntos infinitos de estos. Aquí el problema es que la fundamentación de la teoría de los conjuntos probó a la larga ser extremadamente difícil, como más adelante veremos.

En cuanto al problema de investigar la consistencia de los axiomas de la aritmética, Hilbert tenía ahora una segunda razón para insistir en su importancia, pues de su solución favorable dependía la del análisis clásico.

---

[2] Dedekind, 1963, p. 12.

[3] En efecto, es un hecho histórico que el fundamento lógico del sistema de los números reales no fue establecido sino a finales del siglo diecinueve. Hasta entonces, ni aun las más simples propiedades de los números racionales e irracionales se habían demostrado, ni los números reales se habían definido.

2.6 La teoría de conjuntos

Hacia 1870 los progresos alcanzados en la fundamentación del análisis y la influencia de matemáticos como Gauss, Weierstrass y Leopold Kronecker lograron imponer una concepción taxativa del infinito en la que éste sólo se admitía como algo potencial. El infinito, en el sentido estricto de la palabra, fue desterrado de la matemática y sólo subsistía como una *forma de hablar*. No obstante, su exclusión no hubo de durar mucho tiempo. En un santiamén Richard Dedekind y Georg Cantor (1845-1916) resucitaron la quimera del infinito, esta vez en la más abominada de sus formas: el infinito actual. El primero lo hizo en su definición de los números reales; el segundo, creando una hermosa teoría, la de los conjuntos, considerada por Hilbert un paraíso.[1]

La teoría de conjuntos es una teoría abstracta, sin ningún sentido práctico y desarrollada por sí misma, libre de la obligación de pensar en "este mundo".[2] Se trata, sin lugar a dudas, de la mejor exponente de esa nueva actitud ante el quehacer matemático en la que la realidad física, el mundo de la experiencia y multitud de cosas más se dejan de lado. No obstante, en lo que parece ser una paradoja, con el paso del tiempo sus métodos y conceptos conquistaron prácticamente todas las áreas de la matemática, dotándolas de un lenguaje común, enlazándolas por distantes que parecieran. Podemos decir que toda la matemática moderna ha sentido su presencia y que incluso las más antiguas aritmética y geometría se han podido reconstruir al interior de ella sin ninguna dificultad.[3]

No es nuestro propósito examinar con detenimiento esta teoría, cuyo dominio se adquiere sólo con años de estudio. En vez de ello nos conformaremos con entreabrir la puerta para contemplar algunos de sus paisajes. La presentación será por necesidad poco rigurosa, exageradamente simplificada y sin ninguna pretensión de completud. Se hará tomando en cuenta cuatro objetivos: señalar algunos aspectos de la teoría matemática sobre el infinito, mostrar su relación con la matemática moderna, presentar el *método diagonal de Cantor* (del que se sirven la paradoja de Richard y el primer teorema de Gödel), y exponer la

---

[1] A Cantor no le tomó mucho tiempo realizar su obra: en sólo una década, de 1874 a 1884, fijó los conceptos y resultados básicos de esta disciplina.

[2] Las nociones fundamentales de la teoría de conjuntos son las de *conjunto* y *pertenencia a un conjunto*, que bien a bien no se pueden definir. Cantor se refiere a ellas con las siguientes palabras: «Por un *conjunto* [Menge] hemos de entender cualquier reunión en un todo [*Zusammenfassung zu einem Ganzen*] *M* de objetos definidos y distintos de nuestra intuición o nuestro pensamiento. Estos objetos son llamados *elementos* de *M*.». [Cantor 1955, p. 85.] Su sola definición muestra la naturaleza conceptual de los conjuntos, constituidos por *objetos del pensamiento o la intuición*, no por objetos materiales.

[3] Podemos decir también que la aritmetización del análisis fue factible gracias a nociones tomadas de ella, y que sus métodos y conceptos hicieron posible la teoría de los números trascendentes, la teoría de funciones de una variable real, el desarrollo de funciones en series trigonométricas de Fourier, la teoría de los espacios abstractos, el álgebra moderna, la topología (una de cuyas ramas se denomina *topología de conjuntos*), el cálculo de probabilidades y la estadística.

hipótesis del continuo, a la que habremos de volver más adelante y que Hilbert inscribiera en su famosa lista de 1900 como primer problema. Con ello esperamos que el lector se forme una idea de las bellas especulaciones matemáticas que comprende esta teoría y disponga de los elementos necesarios para seguir en detalle la prueba del primer teorema de incompletud de Gödel.

2.6.1 El concepto de infinito en la teoría de conjuntos

El infinito de la teoría de conjuntos no es el del tiempo o el espacio y sus problemas no son los de su existencia material. Tampoco es la infinitud divina de las *Meditaciones metafísicas* de Descartes. El infinito de Cantor y Dedekind no es metafísico; es una idea, una noción matemática que en poco o nada se relaciona con las anteriores y que no tiene la necesidad de ser representada o realizada. Tampoco es el infinito en potencia de Aristóteles y Occam, o de Kronecker y Weierstrass, que se puede recorrer pero nunca exhaustivamente o que se puede aumentar todo lo se quiera, pero que siempre es finito. Es el infinito categórico, actual, en acto, que se trata como una especie particular de magnitud y que se expresa a través de las nociones de *número cardinal* y *número ordinal*.[4]

En la obra de Dedekind el infinito actual se presenta en la construcción lógica de los números irracionales que, como Cantor demuestra, no se pueden definir mediante sucesiones finitas de números racionales. La construcción tiene como base la identificación de los números racionales con los puntos de la recta y el siguiente principio de continuidad:

> Si los puntos de la línea recta se dividen en dos clases de modo que todo punto de la primera clase se halle a la izquierda de todo punto de la segunda clase, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta división de los puntos en dos clases, esta separación de la línea recta en dos porciones.[5]

Cada una de estas divisiones induce una partición de los números racionales en dos clases. A éstas se les llama *cortaduras de Dedekind* y se les identifica con el punto de la recta que, según el principio, produce la división. Un *número real* no es otra cosa que una cortadura, lográndose de este modo la identificación de los puntos de la recta con los números reales. De lo anterior resulta que la única manera de definir los números reales a partir de los

---

[4] Hasta poco antes de 1874 la noción de infinito en matemáticas era relativamente imprecisa y aunque muchos de sus objetos lo eran en número como, por ejemplo, los enteros positivos o los puntos de un segmento, los matemáticos no hicieron distinción alguna entre ellos. El infinito era simplemente el infinito y no era susceptible de ninguna otra determinación. Esta situación cambió radicalmente con la intervención de Cantor, que no sólo lo jerarquizó, sino que incluso definió una peculiar aritmética de conjuntos infinitos que aquí mencionaremos someramente.

[5] Dedekind, 1963, p. 11. Se trata de la misma noción que se expresa en el axioma **V'.1** de la sección **1.3.1**.

números racionales es recurriendo a clases infinitas de estos últimos, las cuales se manipulan como si fueran finitas, realizando con ellas operaciones como la suma y el producto. En otras palabras, en la teoría de Dedekind hay un uso operativo del infinito actual.

En cuanto a Cantor, de cuya teoría nos ocuparemos principalmente, su interés se encaminó en otra dirección. Sus investigaciones tuvieron como punto de partida la teoría de funciones de una variable real, algunos de cuyos problemas implicaban distinguir un número finito o infinito de puntos "excepcionales" como, por ejemplo, puntos de discontinuidad. En este sentido, en sus primeros años Cantor sólo se interesó en conjuntos que se pudieran contar utilizando índices, una idea distinta a la de desarrollar una teoría de magnitudes infinitamente grandes.[6]

La teoría de conjuntos es en la actualidad un campo de investigación muy extenso, por lo que en lo que sigue nos veremos impedidos de ofrecer una panorámica completa de la misma. Al respecto sólo haremos referencia a resultados conocidos por Cantor y Dedekind, aunque expresados en un lenguaje moderno. En particular, iremos directamente a las cuestiones de nuestro interés, comentando si acaso los problemas específicos en que se originaron. Para no hacer demasiado extensa la exposición, hemos optado por incluir un apéndice (el apéndice 7) que contiene una presentación más detallada de esta teoría y algunos temas que no figuran en esta sección. Su lectura la consideramos imprescindible para quien no esté familiarizado con el tema, tomando en cuenta que en lo que sigue supondremos conocidos algunos conceptos y nociones ahí expuestas.[7]

2.6.2 Conjuntos, funciones, relaciones y estructuras abstractas

Cantor y Dedekind fueron los primeros en estudiar de manera sistemática los conjuntos infinitos. No obstante, su propósito no era el mismo. Dedekind se interesó más que nada en las operaciones con conjuntos y en la relación entre los conceptos de número natural y conjunto infinito. En su libro *Was sind und was sollen die Zahlen?* (¿Qué son y que han sido los números?) de 1888 probó, sin suponer la existencia de los números naturales, que

[6] Shaughan Lavine sostiene que la principal preocupación de Cantor entre 1874 y 1890 fue la de extender los métodos de conteo de colecciones finitas a colecciones infinitas, por lo que la necesidad de incluir en la teoría al conjunto de los números reales le ocasionó cierto malestar, pues este conjunto no se podía "contar" en el sentido recién señalado (Cf. Lavine, 1994, pp. 1-10). Así, para incluir a los número reales Cantor debió introducir su versión de lo que ahora se conoce como *axioma del conjunto potencia*, el cual establece que los subconjuntos de un conjunto dado forman a su vez un conjunto. El problema que este principio planteaba era que no se tenía idea de cómo contar las nuevas colecciones a las que daba lugar. Tales dificultades se relacionan con el *axioma de elección* y el *principio del buen orden* que Zermelo habría de introducir más adelante para coronar la teoría cantoriana. Para mayores detalles el lector podrá consultar además del texto de Lavine, la bibliografía de Cantor y los siguientes textos, que tratan en extenso con estos y otros aspectos de la teoría cantoriana: Dauben, 1979; Fraenkel, 1976 y Wang, 1993.

[7] Estas nociones son principalmente las de *correspondencia uno a uno* (biyectiva), *número cardinal* y *número ordinal*.

todo conjunto infinito A contiene necesariamente un subconjunto N^* que es una "copia" de los números naturales (de ahí la notación) y cuyos elementos satisfacen los axiomas de Peano, establecidos ahí por primera vez.[8] Fue en dicho texto donde introdujo el lenguaje de los conjuntos casi como se le utiliza hoy en día y definió las operaciones de unión e intersección de conjuntos, señalando que éstas pueden ser aplicadas a cualquier familia de subconjuntos de un conjunto dado. Asimismo, observó que los subconjuntos de un conjunto A forman a su vez un conjunto, que ahora denotamos con $\wp(A)$. Algo novedoso y que habría de tener un notable efecto en toda la matemática fue la introducción del concepto general de *función* o *mapeo*. Dedekind, en vez de restringirse como hasta entonces se había hecho a funciones de números reales o complejos, generalizó el concepto al máximo: dados dos conjuntos A y B, una *función* f de A en B es una *ley* (gesetz) que asocia a cada elemento a de A un único elemento b de B denominado su *valor* en a y denotado con $f(a)$.[9]

La única noción que se halla ausente en la exposición de Dedekind y que es muy utilizada hoy en día es la de *producto cartesiano* $A \times B$ de dos conjuntos. Fue Cantor quien la introdujo. Se trata del conjunto de parejas ordenadas (a, b) que se pueden formar con los elementos de A y de B, una generalización del concepto de *coordenadas cartesianas*. Esta noción se relaciona con el concepto de función como sigue: si $f: A \to B$ es una función, entonces la gráfica G_f de f es el subconjunto de $A \times B$ formado por todas las parejas de la forma $(a, f(a))$, donde a es un elemento de A. En forma análoga se puede definir el producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ de n conjuntos cualesquiera. Con base en el concepto de producto cartesiano es posible definir el concepto de *relación* de A en B: una relación de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, con lo que las funciones pasan a ser un caso particular de relaciones.

La importancia de estas nociones es que permitieron hablar de funciones y operaciones entre objetos de naturaleza indeterminada, que no necesariamente son números. De este modo los matemáticos de fines del siglo diecinueve y del siglo veinte pudieron hacer referencia a *estructuras abstractas*, es decir, a sistemas de objetos acerca de los cuales lo único que se sabe es que satisfacen ciertas relaciones que se "definen" mediante axiomas. Tal es, por ejemplo, el caso de la geometría de Hilbert que vimos en la sección 1.3 o el del modelo algebraico para sus axiomas que se expuso en la sección 1.4.

---

[8] Axiomas de Peano: (1) 0 es un número natural. (2) Todo número natural n tiene un sucesor sn. (3) Dos números naturales con sucesores iguales son iguales entre sí. (4) 0 no es sucesor de ningún número natural. (5) Un conjunto X que contiene a 0 y que contiene a sn toda vez que contiene a n, contiene a todos los números naturales (principio de inducción).

[9] Actualmente se han adoptado distintas notaciones para denotar funciones, como, por ejemplo, $x \mapsto f(x)$ que evita la introducción de nuevos símbolos (como cuando se escribe $x \mapsto x^2$) o la más compleja $f: A \to B$ para indicar el conjunto A en que se define la función y el conjunto B en que toma sus valores.

2.6.3 Los comienzos de la teoría cantoriana: conjuntos de números

Cantor comenzó estudiando los conjuntos de números más importantes del continuo numérico: los números naturales, los números racionales y los números reales. Buscó las diferencias entre ellos en el sentido de que los primeros forman un conjunto discreto (para cada número siempre hay "el siguiente"), el segundo es un conjunto denso pero no continuo (los hay por doquier, pero presentan "huecos" en la recta numérica), y el tercero forma un continuo. En 1874 publicó un artículo en el que demuestra el notable resultado de que los números racionales y los números algebraicos se pueden poner en correspondencia uno a uno (1-1) con los números naturales, mientras que los números reales no (i.e, no se puede "cubrir" o igualar con los anteriores). Con ello puso en evidencia que hay conjuntos infinitos de distintas magnitudes, y demostró el hecho sorprendente de que los conjuntos de números naturales, racionales y algebraicos tienen la misma magnitud. La demostración de estos resultados se puede llevar a cabo sirviéndose de dos procedimientos de su invención: el método de las matrices infinitas y el método diagonal. Veamos cada uno de ellos.[10]

Matrices infinitas. La enumeración de los números racionales se puede llevar a cabo con base en el siguiente procedimiento. Dispóngase las fracciones positivas en un arreglo bidimensional (en una matriz infinita) como en el primero de los siguientes diagramas:

1/1	1/2	1/3	1/4 ...
2/1	2/2	2/3	2/4 ...
3/1	3/2	3/3	3/4 ...
4/1	4/2	4/3	4/4 ...
....			

1/1 ↓	1/2 →	1/3 ↙	1/4 →
2/1 ↗	2/2 ↙	2/3 ↗	2/4 ...
3/1 ↓	3/2 ↗	3/3	3/4 ...
4/1 ↗	4/2	4/3	4/4 ...
....			

En el diagrama a la derecha se muestra cómo enumerar las fracciones positivas siguiendo las flechas: 1/1, 2/1, 1/2, 1/3, 2/2, 3/1, 4/1, 3/2, 2/3, 1/4, 1/5, ...

Si se eliminan aquellas fracciones que son iguales en valor numérico a alguna precedente y se intercalan los inversos aditivos, el resultado es una enumeración de los números racionales positivos:

1, –1; 2, –2; 1/2, –1/2; 1/3, –1/3; 3, –3; 4, –4; 3/2, –3/2; 2/3, –2/3; 1/4, –1/4...

Aplicando el mismo procedimiento se puede demostrar la numerabilidad de diversos conjuntos. Los siguientes son algunos ejemplos:

---

[10] Si el lector tiene dificultades en el manejo de nociones como las de *conjunto infinito, potencia de un conjunto, numerabilidad, enumeración de un conjunto*, etc. o no conoce su definición precisa, le sugerimos que lea el apéndice 7, de preferencia con lápiz y papel a la mano; en él se introducen dichas nociones y se ofrecen algunos ejemplos sencillos.

1) El conjunto de pares ordenados de números naturales.
2) El conjunto de pares ordenados de números racionales.
3) El conjunto de ternas ordenadas de números naturales.
4) En general, el conjunto S_n de sucesiones finitas de n números naturales, para cada n fija.
5) El conjunto S de sucesiones finitas de números naturales y el conjunto T de sucesiones finitas de números racionales.
6) El conjunto de ecuaciones algebraicas, es decir, de ecuaciones de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_0 son números enteros y $a_n \neq 0$.
7) El conjunto de *números algebraicos*, es decir, de números que son raíz de una ecuación algebraica. (Esto se debe al hecho de que toda ecuación algebraica de grado n tiene a lo más n raíces distintas, entre las que pueden figurar números complejos).
8) El conjunto de *expresiones* de un lenguaje L con alfabeto A, donde A es un conjunto finito o numerable (una *expresión* es una sucesión finita de símbolos de A).[11]

El método diagonal. En el mismo escrito en que Cantor demuestra la numerabilidad de los números algebraicos se encuentra la demostración de que hay conjuntos infinitos que no se pueden poner en correspondencia uno a uno con los números naturales $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ o, como se suele decir, que no tiene la misma potencia que N. Si bien el camino que ahí sigue es un tanto difícil de andar, en 1891 propuso un nuevo procedimiento de prueba que ahora se conoce como *método diagonal* y que nosotros expondremos en relación a un subconjunto de los números reales. Este método ha sido utilizado con mucho éxito en distintas áreas de la matemática moderna para demostrar "imposibilidades".

Consideremos el conjunto de los números reales en el intervalo $0 < x < 1$. Cada número perteneciente a él está representado por una fracción decimal infinita de la forma $0.d_1d_2d_3\ldots$ donde cada d_n es alguno de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9.[12] Por ejemplo, $0.235\overline{757}\ldots$ sería uno de ellos (donde la expresión $\overline{57}$ indica que la sucesión "57" se repite indefinidamente, en cuyo caso se dice que el decimal es *periódico*). Supongamos ahora que se han enumerado algunos números reales del intervalo $0 < x < 1$, es decir, que se han puesto en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales. En tal caso se podría formar una lista como la siguiente:

[11] Aunque estos resultados no dejan de ser sorprendentes, la noción de infinito considerada hasta aquí es la del infinito potencial, pues cualquier proceso de enumeración lo único que presupone es la posibilidad de seguir construyendo la lista sin abandonar el dominio de lo finito. En cuanto al infinito actual, éste hará acto de presencia al considerar otro tipo de conjuntos, como a continuación veremos.

[12] Nótese que no todos los dígitos son 0. Por otra parte, para que el resultado sea válido debemos prohibir que el dígito 9 figure en la sucesión un número infinito de veces consecutivas, es decir, debemos evitar las sucesiones de la forma $0.d_1d_2d_3\ldots999\ldots$ Esto se debe a que fracciones como, 0.019999... y 0.020000... representan un mismo número.

1. $0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\ldots d_{1n}\ldots$	$0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\ldots d_{1n}\ldots$
2. $0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\ldots d_{2n}\ldots$	$0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\ldots d_{2n}\ldots$
3. $0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\ldots d_{3n}\ldots$	$0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\ldots d_{3n}\ldots$
4. $0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\ldots d_{4n}\ldots$	$0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\ldots d_{4n}\ldots$
... ...	...

Ahora elaboremos una fracción decimal con los dígitos sobre la diagonal del arreglo (marcada por las flechas en la segunda figura): $0.d_{11}d_{22}d_{33}d_{44}\ldots$ y formemos una segunda fracción decimal $0.a_1a_2a_3a_4\ldots$ definiendo, para cada índice n, $a_n = 1$ si $d_{nn} \neq 1$ y $a_n = 2$ si $d_{nn} = 1$. Esta nueva fracción difiere de la primera en la lista en el lugar de la décimas (en el primer dígito después del punto decimal), de la segunda en el lugar de la centésimas (en el segundo dígito después del punto decimal) y, en general, de la n-ésima fracción en el n-ésimo dígito, por lo que la fracción $0.a_1a_2a_3a_4\ldots$ no figura en la lista (de lo contrario tendría que diferir de sí misma en algún dígito). Por tanto, ninguna enumeración de números reales del intervalo (0, 1) los incluye a todos ellos y el conjunto no es numerable.[13] En otras palabras, la potencia del intervalo (0, 1) es distinta de la de N.

Con base en este resultado es posible demostrar la no numerabilidad del conjunto $\Re$ de los números reales. Para ello es suficiente con establecer una correspondencia uno a uno (una *biyección*) entre $\Re$ y el intervalo (0, 1), como la siguiente. Sea f: $\Re \to (0, 1)$ la función:

$$f(x) = \frac{1}{2-x} \quad \text{si } x < 0, \qquad \text{y} \quad f(x) = \frac{2x+1}{2x+2} \quad \text{si } x \geq 0$$

Si $\Re$ fuese numerable, con la correspondencia anterior se podría establecer una biyección entre N y el intervalo (0, 1), lo cual es imposible. Por tanto, $\Re$ tampoco es numerable.

En cuanto a los resultados anteriores nos limitaremos a hacer algunas observaciones que consideramos relevantes.

1) La idea de recorrer un arreglo bidimensional infinito para definir un nuevo objeto o para demostrar una imposibilidad, meollo del método diagonal, ha sido explotada con éxito en la matemática moderna. Una aplicación reciente del método diagonal es la siguiente: En 1989,

[13] En general, si a y b son dos números reales y $a < b$, entonces al conjunto de números reales x tales que $a < x < b$ se denota con (a, b). Análogamente, con $[a, b]$ se denota al conjunto de números reales en el intervalo *cerrado* $a \leq x \leq b$, con $[a, b)$ al intervalo *semiabierto* $a \leq x < b$ y con $(a, b]$ al intervalo *semiabierto* $a < x \leq b$.

William F. Dowling demostró, mediante un argumento diagonal, que ningún programa diseñado para detectar virus en la computadora puede ser a la vez 100% seguro, en el sentido de que no alterará el código del sistema operativo de la máquina, y 100% efectivo en el sentido de que sí detectará todos los programas que alterarán el código del sistema operativo.[14] Esto pone en evidencia que Cantor, más allá de una simple prueba, lo que en realidad hizo fue introducir un nuevo método de demostración.

2) La demostración de que el conjunto de los números racionales es numerable es de una naturaleza más simple que la demostración de que $\Re$ no es numerable. En la primera lo único que se tuvo que hacer fue encontrar un mapeo entre dos conjuntos. Esto requirió cierto grado de ingenio, pero una vez definida la correspondencia nada quedó por hacer. En cambio para la segunda fue necesario probar que *cualquier* intento por definir una correspondencia uno a uno entre N y $\Re$ estaría condenado al fracaso, es decir, hubo que demostrar una *imposibilidad*. Obviamente, probar una imposibilidad es más complicado que especificar una correspondencia. De hecho, para demostrar que algo es imposible hay que proceder de manera indirecta, por reducción al absurdo. Así, en la prueba anterior el absurdo se obtiene al suponer que la enumeración incluye todos los números reales del intervalo (0, 1). Cabe señalar que los teoremas de incompletud de Gödel pertenecen a esta clase; por ejemplo, el segundo de ellos establece que la consistencia de la teoría de conjuntos no se puede probar bajo ciertas restricciones.

3) La no numerabilidad de $\Re$ tiene una importante consecuencia respecto a los números irracionales. Se llama *trascendente* todo número que no es algebraico.[15] La existencia de números trascendentes no se conoció sino hasta 1844, año en que Joseph Liouville (1809-1882) demostró que cualquier número de la forma

$$\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^{2!}}+\frac{d_3}{10^{3!}}+\ldots+\frac{d_n}{10^{n!}}+\ldots$$

donde cada d_i es alguno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9, es trascendente. Posteriormente, en 1873 y 1882 respectivamente, Charles Hermite (1822-1901) y Ferdinand Lindemann probaron que los números e (base de los logaritmos naturales) y π (relación entre la circunferencia y su diámetro) son trascendentes.[16] En este sentido el teorema de Cantor sobre la no numerabilidad del continuo muestra no sólo que existen números

[14] Véase Dowling, 1989.

[15] Es decir, los números *trascendentes* son los que no son solución de una ecuación algebraica. El nombre, propuesto por Euler, alude al hecho de que *trascienden* todo procedimiento algebraico para caracterizarlos. Obviamente, todo número racional es algebraico, o bien, todo número trascendente es irracional.

[16] Estas pruebas pronto se vieron inmersas en un mar de críticas a causa de su carácter no constructivo. De esto nos ocuparemos en el capítulo 3.

trascendentes, sino que éstos son más "numerosos" que los algebraicos.[17] Resulta entonces que la teoría cantoriana proyecta luz sobre un problema matemático que parecía fuera de su alcance, revelando con ello su fuerza y ductilidad.

4) Al tipo de demostración utilizado por Cantor para probar la existencia de números trascendentes le podemos llamar *prueba de existencia por el absurdo*. En esta clase de demostraciones la "existencia" de un ente se prueba indirectamente, deduciendo una contradicción a partir de su supuesta inexistencia. El problema con este tipo de argumentos es que en vez de entregar un objeto, lo que ofrecen es una contradicción. Este uso polémico del principio del tercero excluido, sobre el que se funda este tipo de demostraciones, pronto se convirtió en el blanco de las críticas de quienes se oponían a admitir como válidos razonamientos en los que se deduce la existencia de un objeto sin indicar cómo se construye o se puede hallar. A esta cuestión habremos de volver en el capítulo 3, pues se convirtió en una herramienta imprescindible de la teoría de conjuntos y de la matemática en general, y en un tema de importancia en el debate entre el intuicionismo y la escuela de Hilbert.

5) De la no numerabilidad de $\Re$ se sigue que este conjunto no se puede corresponder con el de sucesiones finitas de números racionales, pues este último es numerable. Esto significa, entre otras cosas, que los números reales no se pueden definir mediante sucesiones finitas de números racionales y que las *cortaduras de Dedekind* (o sus equivalentes) no se pueden evitar en la construcción de los números reales a partir de los enteros. Como veremos, para superar esta dificultad Hilbert trató de caracterizar axiomáticamente el concepto, creyendo que de este modo podría evitar el uso del infinito actual.

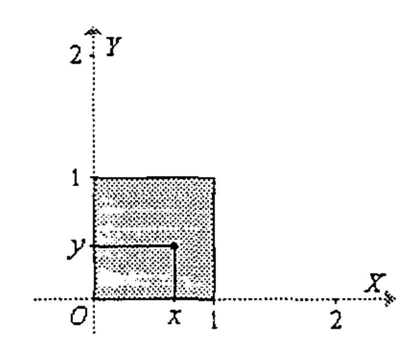
2.6.4 La hipótesis del continuo

El descubrimiento de que los números reales forman un conjunto no numerable llevó a Cantor a profundizar en la cuestión de la equipotencia entre conjuntos. En 1874 le escribió a Dedekind una carta en la que, exaltado, le pregunta si habrá una biyección entre los puntos de una superficie y un segmento de recta, cuestión considerada absurda por sus coetáneos: «¿Será posible —se pregunta— mapear singularmente una superficie (supón un cuadrado incluyendo sus lados) sobre una línea (supón un segmento incluyendo sus extremos), de modo que a cada punto de la superficie le corresponda un punto del segmento y, recíprocamente, a cada punto del segmento le corresponda un punto de la

[17] En efecto, si el continuo es la unión de los conjuntos de números algebraicos y trascendentes, y el conjunto de números algebraicos es numerable, entonces el conjunto de números trascendentes tiene mayor cardinalidad. Así, se puede decir que "ordinariamente" un número real es trascendente y "excepcionalmente" es algebraico, aunque en la práctica la mayoría de los números con los que tratamos son de esta última especie. Cf. Fraenkel, 1976, pp. 38-39.

superficie?».[18] Cantor estaba consciente de las dificultades que encerraba este problema y supuso que la respuesta sería negativa. No obstante, para 1877 ya había resuelto favorablemente la cuestión: sí es posible hacer corresponder los puntos de una superficie con los de un segmento. En una carta dirigida a Dedekind, en la que esboza una demostración un tanto más general, exclama: «¡lo veo y no lo creo!».[19] Parte de su asombro se debía a que ahora era posible determinar mediante un sólo número la posición de un punto en cualquier espacio continuo de dimensión n, lo cual ponía en duda la idea de que esto sólo se podía hacer mediante n coordenadas independientes.

La siguiente es una prueba de que los puntos de un cuadrado se pueden poner en correspondencia uno a uno con los puntos de uno de sus lados. Este resultado, enteramente contraintuitivo, es el punto de partida de una demostración de alcance más general: que toda superficie continua tiene la misma cardinalidad que el intervalo (0, 1) y, por tanto, que $\mathfrak{R}$.[20]



Consideremos un cuadrado de lado 1 y pongamos uno de sus vértices en el origen y uno de sus lados sobre el eje X, como se muestra en la figura. Sean x e y las coordenadas de un punto del cuadrado, de modo que

$$x = 0.a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots \quad \text{e} \quad y = 0.b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots$$

donde cada a_i y cada b_j es alguno de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ó 9 y no hay terminaciones infinitas de nueves.[21] Formemos ahora un número t intercalando los dígitos de la fracciones decimales anteriores:

$$t = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3 \ldots a_nb_n \ldots$$

Así, a cada pareja de números (x, y) con $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$ le corresponde de manera unívoca un número t perteneciente al intervalo (0, 1). Por tanto, el interior del cuadrado no tiene más puntos que uno de sus lados.

El argumento anterior es una prueba de que el conjunto $\mathfrak{I} = (0, 1) \times (0, 1)$ es *equivalente* a un subconjunto del intervalo (0, 1).[22] También podemos probar la inversa de esta

---

[18] Citado en Dauben, 1979, p. 54.
[19] Citado en Dauben, 1979, p. 55.
[20] La prueba que ofrecemos es una versión simplificada de la que Cantor ofreció a Dedekind en 1877 de que toda variedad continua de p dimensiones puede ser puesta en correspondencia biunívoca con una curva continua. La prueba de Cantor presenta un error que invalida la demostración, mas no el resultado. Cf. Carta de Cantor a Dedekind fechada el 20 de junio de 1877, en [Sestier, 1981, pp. 54-56].
[21] Véase al respecto la nota al pie #12 de esta sección.
[22] Véase la página 5 del apéndice 7 en relación al concepto de *equivalencia* entre conjuntos.

proposición, es decir, que el intervalo (0, 1) es equivalente a un subconjunto de $\Im$. Por ejemplo, consideremos la función d: (0, 1) $\rightarrow \Im$ definida por:

$$d(x) = (x, x)$$

La función d es unívoca y asocia a cada punto del intervalo (0, 1) un punto sobre la diagonal del cuadrado unitario. Por tanto, el intervalo (0, 1) es equivalente a un subconjunto de $\Im$. Con base en el *teorema de la equivalencia* de Schröder-Bernstein,[23] concluimos que los conjuntos (0, 1) e $\Im$ son equivalentes y tienen la misma cardinalidad.

De manera semejante podemos demostrar que algunos otros conjuntos tienen la misma potencia que $\Re$. Los siguientes son algunos ejemplos:

1) El conjunto de pares ordenados de números reales (en lenguaje geométrico: el conjunto de puntos en el plano).
2) El conjunto de ternas ordenadas de números reales (en lenguaje geométrico: el conjunto de puntos del espacio tridimensional).
3) En general, el conjunto $\Re^n$ de sucesiones finitas de n números reales, para cada n fija (en lenguaje geométrico: el conjunto de puntos en un espacio de dimensión n).
4) El conjunto $\Re^N$ de sucesiones $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ de números reales.
5) El conjunto $\wp(N)$ de subconjuntos de N.
6) El conjunto C de todas las funciones de $\Re$ en $\Re$ que son *continuas*.[24]

Amén de los números naturales y los números reales, Cantor no pudo demostrar que hubiese conjuntos infinitos de otros tamaños, e ignoraba si había algo más grande que el conjunto de los números reales (nos referimos a 1874). En cuanto al continuo numérico, ese mismo año enunció en su forma primitiva la *hipótesis del continuo*, al afirmar que *todo conjunto infinito de puntos en la recta numérica se puede poner en correspondencia uno a uno con los números reales o con los números naturales*, es decir, que no hay posibilidades intermedias. Incluso anunció que pronto daría una demostración.

La promesa anterior jamás se cumplió y ahora sabemos por qué: la conjetura de Cantor es independiente de los principio adoptados por él, es decir, se puede asumir su negación sin

---

[23] Al respecto, véase la página 7 del apéndice 7.

[24] Estos resultados son discordantes con los dictados del sentido común. En efecto, en contra de lo que la intuición nos haría pensar, resulta que dos segmentos desiguales tiene el mismo número de puntos; es más, lo que Cantor demuestra es que cualquier segmento tiene el mismo número de puntos que una línea, que un plano, que todo el espacio tridimensional, o que un espacio con un número numerable de dimensiones. Lo anterior no es sino un recordatorio de que la matemática muy a menudo procede a contrapelo con la intuición, como cuando Peano demuestra que hay una curva continua que llena todo un cuadrado.

incurrir en contradicciones. Esto lo demostraron Kurt Gödel y Paul Cohen (1934) entre 1938 y 1963. En esto, la situación es análoga a la del quinto postulado de Euclides.[25]

Dada la representación de los puntos de la recta con números reales, la hipótesis del continuo se puede plantear en los siguientes términos: ¿hay algún conjunto infinito de números reales que no sea equipotente ni con N ni con $\Re$? Asimismo, haciendo uso del concepto de número cardinal, que extiende el concepto de número a conjuntos infinitos, esta última pregunta se puede formular en cualquiera de las siguientes formas: ¿cuántos puntos hay en la recta?, ¿cuántos números reales hay?, ¿cuántos conjuntos de números naturales hay?, o bien, ¿hay algún número transfinito entre el cardinal de N y el cardinal de $\Re$? La *hipótesis del continuo* es simplemente la afirmación de que no lo hay.[26]

La teoría cantoriana excede con mucho lo expuesto en estas páginas. En realidad, lo único que hemos hecho ha sido mostrar sus rudimentos y exponer brevemente dos resultados capitales sobre los conjuntos de puntos en la recta numérica, cuestiones que se hallan en el punto de partida. Para apreciarla, habría que adentrarse en su dos grandes vertientes, de las que sólo hemos señalado algunos aspectos: en primer lugar, una teoría general que comprende los teoremas sobre conjuntos de puntos que vimos en esta sección; en segundo lugar, una teoría de números transfinitos que apenas si tocamos en el apéndice 7. Además, se cuenta con los argumentos filosóficos sobre los que Cantor sustenta su teoría y que se hallan dispersos en cartas y escritos. Finalmente, si lo que se desea es tener una panorámica completa, es indispensable transitar por la teoría axiomática de conjuntos, que Cantor no consideró, y que dio inicio en 1904 con los trabajos de Ernst Zemelo (1871-1953). Al respecto, en el apéndice **8** hacemos una breve referencia al tratamiento axiomático de la teoría.

---

[25] El problema planteado por la hipótesis de continuo no obedece en sí a ninguna cuestión práctica y para algunos representa uno de los puntos más enigmáticos de la teoría, ya que la prueba de su independencia no resuelve el problema de saber si ahí, en el "mundo" de los conjuntos, es verdadera o falsa la conjetura. Esto, obviamente, parte de la suposición de que la teoría de conjuntos trata con conceptos e ideas que tiene existencia propia, al margen de que las podamos conocer: una postura idealista, platónica, de la que Gödel es uno de los más grandes exponentes.

[26] La hipótesis del continuo ha sido importante por varias razones. En primer lugar, se trata de una cuestión natural relativa a los conjuntos infinitos más pequeños, que se puede formular de muchas y muy distintas maneras. En segundo lugar, se trata de un problema que con el paso del tiempo fue cobrando cada vez mayor relevancia, obligando a que los matemáticos, en su intento por resolverlo, se vieran forzados a explorar regiones muy distantes del pensamiento matemático. De hecho, las dos ideas más fructíferas e interesantes de la teoría axiomática de conjuntos, la constructibilidad y el forcing, se introdujeron a fin de dar respuestas parciales al problema. En tercer lugar, para los defensores del realismo conceptual se trata de un problema no resuelto, pues su independencia no responde la pregunta por su verdad, lo que los ha llevado a buscar nuevos principios a partir de los cuales se le pueda decidir. El problema del continuo se asemeja en la teoría de conjuntos a un tema sinfónico que se repite una y otra vez y que podría servir como hilo conductor para exponer sus preocupaciones centrales. Si le hemos dedicado un considerable espacio es porque ejemplifica muy bien el tipo de problemas que Gödel tenía en mente al momento de ponderar la relación entre verdad, completud y demostrabilidad al seno de una teoría axiomática.

2.6.5 El axioma de elección

Hacia 1900 dos preguntas seguían sin respuesta en la teoría de conjuntos: la hipótesis del continuo y el problema de la *buena ordenación* del conjunto de los números reales, cuestión esta última que pronto se generalizó a todos los conjuntos. Para ubicar estos problemas en su justa perspectiva conviene trazar una breve cronología.

Entre 1874 y 1897 Cantor dio forma a la teoría de los números transfinitos. Primero hizo explícita la noción de correspondencia uno a uno y enunció la hipótesis del continuo en su forma primitiva (como conjetura relativa a los puntos de una recta). Hacia 1882 introdujo la noción de buen orden y demostró que la segunda clase de los números ordinales —la clase Ω— está bien ordenada bajo la pertenencia y que todo subconjunto de ella es equipotente con N o con Ω misma (es decir, que no hay casos intermedios, como Cantor lo suponía del continuo).[27] Por tanto, para demostrar la hipótesis del continuo bastaba con probar que $\Re$ es equipotente con Ω (esta última afirmación es la forma final de la hipótesis del continuo). Hacia 1884 Cantor clasificó numerosos conjuntos como numerables o equivalentes al continuo y construyó números ordinales de la segunda clase mediante el segundo principio de formación de ordinales o proceso de paso al límite. Fue entonces que creyó poder coronar sus esfuerzos con una demostración de la hipótesis del continuo.[28] A fines de 1885 Cantor inició un segundo período de productividad, en el que el interés por los conjuntos de puntos cedió su lugar al interés por los números transfinitos. En 1891 presentó una nueva demostración de la existencia de conjuntos no numerables con base en el ahora famoso método diagonal. La técnica utilizada le permitió demostrar en forma por demás elegante que el conjunto potencia $\wp(A)$ de cualquier conjunto A, finito o infinito, tiene una cardinalidad mayor que la de A, lo que lo llevó a establecer una jerarquía ascendente e ilimitada de cardinales transfinitos.[29] En 1895-97 publicó dos escritos en los que expuso de

---

[27] Ω es la clase de ordinales numerables, véase el apartado sobre aritmética ordinal del apéndice 7.

[28] Tras varios intentos fallidos Cantor, desilusionado, intentó desligarse por completo de las matemáticas y dedicarse al cultivo de la filosofía, postura que se vio acentuada por la hostilidad de algunos matemáticos, principalmente Kronecker. Estos acontecimientos significaron el fin de su período de mayor creatividad. Hacia 1885 el apoyo de algunos colegas, sobre todo el de su editor y amigo Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), y la adhesión a su trabajo de nuevos matemáticos, renovaron su interés por la teoría.

[29] Véase el apartado sobre *cardinales transfinitos superiores* en el apéndice 7. La demostración es tan simple que la podemos bosquejar en pocas líneas. Sea A un conjunto arbitrario y sea $f: A \rightarrow \wp(A)$ una correspondencia uno a uno. Vamos a demostrar que hay un subconjunto A' de A que no figura en la correspondencia.

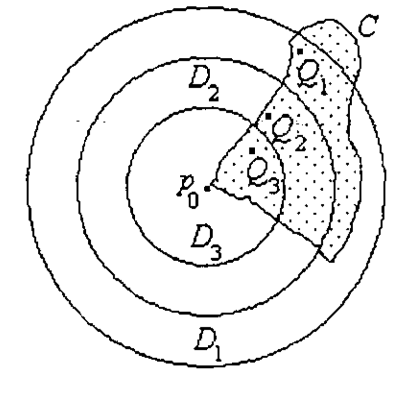
Dado que la imagen $f(a)$ de cada elemento a de A es un subconjunto de A, tiene sentido preguntarse si a mismo pertenece a su imagen, es decir, si $a \in f(a)$. Formemos entonces el conjunto $A' = \{a \mid a \notin f(a)\}$ constituido por aquellos elementos de A que no pertenecen a su imagen. Supongamos que A' es imagen de algún elemento a' de A, i. e., que hay un $a' \in A$ tal que $f(a') = A'$. ¿Es a' un elemento de A'? Cualquiera que sea la respuesta, ésta conduce a su negación. Por ejemplo, si $a' \in A'$, entonces, por definición de A', $a' \notin f(a') = A'$. En cambio, si $a' \notin A'$, entonces a' es un elemento de A que no pertenece a su imagen y por tanto pertenece a A', pues dicha condición es lo que define a A'. **Conclusión:** $a' \in$

manera sistemática los resultados alcanzados en la teoría de conjuntos e introdujo la notación de los *aleph*, aunque, a falta del teorema del buen orden, dejó pendiente la proyectada aplicación de la teoría de los números ordinales a la teoría de los números cardinales.[30] También demostró que la potencia de $\Re$ es la misma que la de $\wp(N)$, y expresó de manera sucinta la hipótesis del continuo mediante la ecuación $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. No obstante, Cantor no generalizó esta conjetura al resto de los *aleph*; esto último fue obra de Felix Hausdorff quien en 1908 formuló la hipótesis generalizada del continuo, según la cual $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ para todos los ordinales α. (véase el apartado *La hipótesis generalizada del continuo* del apéndice 7).

Entre los teoremas clásicos de la teoría de conjuntos que Cantor no demostró destacan el *teorema de la equivalencia*, demostrado por Schröder y Bernstein en 1898 y dos teoremas demostrados por Ernst Zermelo en 1904: *la tricotomía*, que establece que todos los números cardinales son comparables entre sí, y el *teorema del buen orden*, que establece que todo conjunto se puede bien ordenar.

Para demostrar este último teorema Zermelo debió recurrir a un principio que ya se había utilizado inadvertidamente en el análisis matemático. Lo presentó bajo el nombre de *axioma de elección* y su adopción fue de inmediato motivo de enconadas polémicas que, de algún modo, perfilaron la discusión en torno al fundamento de la matemática. El principio pronto se extendió a otras áreas de la matemática y en la actualidad es una herramienta de uso general. A fin de clarificarlo tomemos un ejemplo del análisis matemático.

Sea C es un conjunto de puntos en el plano, y P_0 un punto del plano que no pertenece a C, pero con la propiedad de que cualquier disco con centro en P_0 contiene un punto de C. El problema es demostrar que existe una sucesión $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ de puntos de C que tiene como límite P_0. El argumento es simple: para cada $n \geq 1$ sea D_n el disco con centro en P_0 y radio $1/n$, como en la figura a la derecha.



A' si y sólo si $a' \notin A'$, una contradicción. Así, A' no puede ser imagen de ningún elemento de A, y $\wp(A)$ no se puede poner en correspondencia uno a uno con A. ¿En dónde aparece el método diagonal? Respuesta: en la definición de A'.

[30] Si se pudiese definir un buen orden en el conjunto $\Re$ de los números reales, su situación en la escala cardinal se podría determinar mediante el número ordinal correspondiente, quedando resuelto con ello el problema del continuo. Obviamente, este problema es tan sólo un caso particular del problema más general de bien ordenar cualquier conjunto, no sólo el de los números reales.

Por hipótesis, hay un punto $Q_1 \in D_1 \cap C$, un punto $Q_2 \in D_2 \cap C$, etc. Estos puntos forman la sucesión buscada, pues para cada número natural $n \geq 1$, la distancia entre Q_n y P_0 es menor que $1/n$, por lo que el límite de la sucesión es P_0.

Si examinamos la forma del argumento, podremos ver que se ha utilizado el siguiente principio: Si (C_n) es una colección de subconjuntos no vacíos de un conjunto C (en el ejemplo $C_n = D_n \cap C$), entonces existe un mapeo $n \mapsto c_n$ de N en C tal que para cada n, $c_n \in C_n$. Esta conclusión puede parecer natural, pero cuando Giuseppe Peano la tuvo que aplicar a un conjunto C de funciones (hablamos de 1890) hizo la observación de que para cada n, el elemento c_n no está determinado de manera única (C_n es por lo general un conjunto infinito), por lo que es necesario hacer una infinidad de elecciones sucesivas, y esto último le pareció inaceptable.

La primera vez que Zermelo enunció este principio lo hizo de la siguiente manera: *Para cualquier colección de conjuntos no vacíos siempre hay un mapeo que a cada uno de dichos conjuntos le asocia uno de sus elementos.*[31] En 1908 Zermelo lo volvió a enunciar bajo el desafortunado nombre de "axioma de elección" con las siguientes palabras:

> Un conjunto S que se puede descomponer en un conjunto de partes ajenas A, B, C, ..., cada una de las cuales contiene al menos un elemento, posee al menos un subconjunto S_1 que tiene exactamente un elemento en común con cada una de las partes A, B, C, ... consideradas.[32]

Lo que el axioma de elección dice es que si S es un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos no vacíos A, B, C, ..., (de cualquier cardinalidad); es posible (esto es lo que afirma el postulado) *elegir* de cada uno de estos conjuntos A, B, C, ..., un elemento determinado, a en A, b en B, c en C, ..., y razonar válidamente sobre el nuevo conjunto S_1 formado al reunir tales elementos a, b, c, ..., en una totalidad. El lado polémico consiste en que el axioma tiene un carácter puramente existencial, pues en él no hay ninguna indicación sobre cómo construir o formar el nuevo conjunto, lo que para algunos es inadmisible en el dominio de los conjuntos infinitos.

En la escala de los conjuntos finitos lo que el axioma declara es una perogrullada. Imaginemos un auditorio que contiene un número finito de espectadores, cada uno de los cuales tiene en su bolsillo un conjunto finito de monedas (una por lo menos: ninguno es

[31] Cf. Zermelo, 1904, en Heijenoort, 1967, p. 141.

[32] Zermelo, 1908. Tomado de Heijenoort 1967, p. 186. Una tercera formulación, ésta de Zermelo 1908a, es la siguiente: *Si* T *es un conjunto cuyos elementos son conjuntos no vacíos y ajenos entre sí, entonces su unión* $\cup$T *incluye al menos un subconjunto* S_1 *que tiene uno y solo un elemento en común con cada elemento de* T. El conjunto $\cup T$ se obtiene al reunir en un sólo conjunto todos los elementos de los conjuntos en T. En cuanto al tratamiento axiomático de la teoría, el lector podrá consultar el apéndice **8**.

víctima de la pobreza extrema). Para reunir fondos se pide a cada uno de los asistentes que aporte, sin excepción, una y sólo una de sus monedas para formar así un nuevo conjunto de monedas. Esta colección tendría la misma potencia o cardinalidad que el conjunto de espectadores. Nada más simple que afirmar la existencia del tal conjunto, tal como lo hace el axioma. Mas la teoría de conjuntos tuvo la virtud de sembrar la discordia donde antes había una verdad de perogrullo. Si bien todo el mundo estaba dispuesto a reconocer la validez del axioma de elección al nivel de los conjuntos finitos, en cuanto a su legitimidad en el dominio de los conjuntos infinitos suscitó interminables polémicas. Para unos era algo evidente y bastaba con enunciar el postulado para reconocer su verdad; para otros era algo carente de sentido, un mezcla confusa de palabras desprovistas de significado.

Por ejemplo, Emile Borel (1871-1956) decidió ignorar el axioma de Zermelo y continuar haciendo matemáticas sin él. Otros, los herederos de la tradición cantoriana, lo admitieron y extrajeron de él consecuencias muy interesantes. Obviamente, estas consecuencias fueron vistas con recelo por aquellos que veían en el axioma un sinsentido. Esta querella ha continuado hasta nuestros días y parece que sólo se resolverá en el fastidio, pues ninguno de los participantes está dispuesto a abandonar su trinchera ni se prevé cómo podrá doblegar a su oponente.

Al igual que Cantor y Zermelo, Hilbert admitió el axioma de elección y aceptó la existencia de un buen orden para el continuo; por el contrario, algunos matemáticos franceses como Poincaré, Borel, Lebesgue y René Baire (1874-1932) impugnaron de inmediato el axioma o se mostraron escépticos o indiferentes. Las críticas se centraron básicamente en dos aspectos: en la pretensión de abandonar el ámbito de la intuición en favor del tratamiento formal y en el sentido de la existencia matemática. Por ejemplo, cuestionaron la validez de un axioma como el de elección que supone una infinidad de elecciones *arbitrarias* simultáneas —¿no es esto inconcebible para la intuición?— y adujeron que para abordar estos problemas era preciso saber qué es lo que se quiere decir cuando se afirma que un ente matemático *existe*. Por ejemplo, ¿tiene sentido hablar de la existencia de un conjunto del que no sabemos nombrar todos sus elementos? La conclusión a la que llegaron algunos de ellos fue que no tenía sentido hablar de entes como el conjunto potencia de un conjunto infinito dado, aunque ello tuviera como consecuencia rechazar el sistema de los números reales. Esta postura fue compartida por todos los adversarios del infinito actual.[33] Hacia 1912 el matemático holandés L. E. J. Brouwer (1881-1966) vio en el fondo de la discusión dos grandes corrientes del pensamiento, que identificó como

[33] Tales críticas se encuentran expuestas de manera clara y poco sistemática en [Baire et al, 1905].

intuicionismo (sobre todo francés) y *formalismo* (sobre todo alemán), convirtiéndose en abanderado de la primera de ellas. Con ideas semejantes emprendió el replanteamiento sistemático de la matemática, abogando por la exclusión de la teoría transfinita de Cantor y de todo aquello que se basara en la noción de infinito actual, como el axioma de elección.[34] A este tema habremos de volver en el siguiente capítulo, cuando consideremos en extenso la polémica entre Hilbert y Brouwer.

2.6.6 Dos comentarios y un epílogo

1) Es evidente que el tratamiento del infinito señala una diferencia capital entre la matemática antigua (digamos hasta 1800) y la moderna. La primera lo evita a toda costa, como Euclides, que propone la línea recta como tendida entre dos puntos y tiene la precaución de avisar que la va a prolongar más allá de dichos límites, mientras que la segunda recurre a él sistemáticamente, como en la geometría proyectiva que acepta los puntos y la recta al infinito para alcanzar la generalidad o en la teoría de conjuntos de Cantor, en la que el infinito no sólo se explora, sino que se jerarquiza y ordena.

No obstante, a pesar del feraz uso que se hace de él en la matemática moderna, el infinito actual no es ni ha sido una noción aceptada por todos. Si bien Cantor logró despojar al infinito de esa metafísica farragosa que ocultaba una joya, las polémicas no han dejado de acompañar a su teoría, poniendo al descubierto las distintas posturas adoptadas por los participantes en el debate sobre si al lado del infinito potencial hay un infinito actual, categórico, o si éste sólo representa un desvarío medieval. Tal parece que estas diferencias tienen raíces sicológicas (horror al infinito), lógicas (distintas leyes para la igualdad, para comparar los infinitos, etc. en relación a lo finito) y sociales (actitud y disposición de un grupo para su aceptación), que van desde el escepticismo de Kronecker hasta el místico atrevimiento de Cantor. Estos contrastes los podemos advertir al recorrer la galería de matemáticos y filósofos que han tomado parte en el debate.

Para unos, el infinito es la imposibilidad de imponer un límite a una operación del intelecto y sólo puede ser potencial, pues el entendimiento lo único que puede hacer es afirmar su capacidad de repetir continuamente la misma operación. Para otros, el infinito se realiza, es

[34] En contra de este tipo de argumentos opuestos al axioma de elección, hay un interesante cometario de Jean Dieudonné que ilustrar muy bien la opinión que tiene la mayoría de los matemáticos contemporáneos acerca de tales pretensiones: «Un conjunto no es un objeto en un escaparate del que "escogemos" objetos, del mismo modo en que una línea no es un cordel estirado entre dos puntos, y no es más razonable rechazar el axioma de Zermelo, que no hace sino afirmar la existencia de un objeto matemático (un mapeo), del mismo modo en que no nos es posible rechazar el primer postulado de Euclides alegando que no es posible estirar un cordel entre la Tierra y Sirio.». Cf. Dieudonné, 1992, p. 225.

actual, es un límite alcanzado y superado: se pude ir al otro lado de él. Un par de citas hará más claras las posturas. Escuchemos a Gauss:

> Protesto contra el uso de una cantidad infinita como una entidad actual; eso no está permitido en matemáticas nunca. El infinito es solamente una manera de hablar, en la que uno está realmente hablando de límites a los que ciertas razones pueden aproximarse tanto como se quiera, mientras que otras crecen ilimitadamente.[35]

Cantor, que hubo de abandonar Berlín a causa de la hostilidad de sus críticos en un vergonzoso episodio de intolerancia, se refiere a su reencuentro con Kronecker (el más implacable de ellos) con las siguientes palabras:

> La entrevista que tuve con él no dio un solo nuevo pensamiento de su parte y lo que él opone a mis números transfinitos no son más que los ingeniosos argumentos de la escuela escéptica de hace 2000 años contra el infinito actual; la repetición de estos argumentos, respectivamente sofismas, ni aún en boca de un hombre tan listo y bien situado como el señor Kronecker, para nada los hace más fuertes, convincentes o acertados.[36]

Aunque el combate en torno a las dos concepciones del infinito no ha llegado a su fin (de ello nos ocuparemos en el siguiente capítulo), la importancia y belleza de la teoría de conjuntos es reconocida hoy en día como nunca antes. En la actualidad casi todo el mundo juzga que Cantor no se equivocó al construir una teoría del infinito actual. Por el contrario las nuevas generaciones han visto en ella una idea fascinante y un signo de renovación. Esta actitud se resume en la respuesta que Hilbert diera a Brouwer cuando éste intentó desterrar el infinito actual de la matemática: «Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.»[37]

2) Aunque Cantor creía en la realidad objetiva de los números transfinitos, jamás pretendió que los matemáticos aceptaran su teoría con base en tales suposiciones. Más bien, en su defensa sostuvo que la matemática, a diferencia de otras ciencias, no necesita considerar el vínculo entre sus conceptos y la realidad objetiva, sino sus vínculos con el pensamiento mismo, pues la matemática es autónoma y libre de crear sus propios objetos siempre y cuando no incurra en contradicciones. En 1883 escribió: «La matemática es enteramente libre en su desarrollo, y sus conceptos sólo se ven restringidos por la necesidad de ser no contradictorios y estar coordinados con los conceptos previamente introducidos mediante

---

[35] Gauss, carta a Heinrich Schumaher. Citado en Kline, 1994, p. 1311.
[36] Cantor, carta a Mittag-Leffler. Citado en Sestier, 1981, p. 120. El encuentro fue en octubre de 1884.
[37] Hilbert 1925. Cita tomada de la traducción al español, p. 94.

definiciones precisas. ... La esencia de las matemáticas reside en su libertad.».[38] Este punto de vista es enteramente congruente con el de Hilbert, para quien ni siquiera es necesario suponer una realidad suprasensible a la que estarían referidos los conceptos matemáticos; más bien se trata de una ciencia que se ocupa de *lo posible*, donde por *posible* se entiende aquello que no lleva a contradicción. En particular, y a esto habremos de volver más adelante, considera que los números transfinitos son nociones ideales que no tenemos por qué suponer referidas a ningún tipo de realidad y que aunque lo estuvieran no estaríamos en posibilidad de saberlo. Lo que sí está dispuesto a hacer es a defender la libertad de imaginar o creer cualquier cosa, incluyendo el paraíso cantoriano. Al respecto, la pretensión de verdad acerca de la naturaleza ya no se encuentra por ninguna parte en la matemática.

Epílogo. Con lo poco que hemos ofrecido en una sección muy corta y muy larga a la vez, creemos haber puesto en claro la audacia y originalidad de la teoría de conjuntos. Y si bien esta disciplina ha sido objeto de prolongadas disputas de las que aún se escuchan los ecos, también ha tenido la capacidad de irrumpir en toda la matemática, sin dejar ninguna de sus partes completamente fuera de su dominio. De hecho, muchos matemáticos ven en ella la única base legítima que conviene a su disciplina, y un medio para vincular entre sí las partes más diversas, sometiéndolas a una sola jurisdicción. De alguna manera, sus nociones abstractas se han convertido en los elementos básicos de la construcción axiomática que Hilbert impulsa y su lenguaje en una especie de habla universal en la que todo lo matemático es traducible. Es tal su generalidad que sus conceptos han conquistado a la vez el mundo de los números, el de las formas y el de las funciones: ¿qué es la aritmética sino el estudio de conjuntos de números?, ¿qué es la geometría sino el estudio de conjuntos de puntos?, ¿qué es la teoría de funciones sino el estudio de correspondencias entre conjuntos de valores? Y si bien en el pasado se suscitaron algunos problemas que amenazaron con demoler la revolución cantoriana (de ello nos ocuparemos en el siguiente capítulo), la teoría de conjuntos no enfrenta se hoy en día a ningún peligro que amenace su estabilidad, sino que, por el contrario, constituye una parte importante del pensamiento matemático, proveyéndonos de armas y tácticas inéditas para el estudio del mundo material. De alguna manera, los nuevos infinitos no sólo nos brindan especulaciones fascinantes y una herramienta matemática de gran ayuda, sino que han cambiado nuestra mentalidad hasta convertirse en el signo y la prueba de que algo importante se ha producido en la historia del pensamiento humano.

---

[38] Cantor, 1983. Citado en Kline, 1994, pp. 1358-59.

Capítulo 3

El programa de Hilbert

3.1 El problema de los fundamentos

Aunque el problema de la naturaleza de los objetos matemáticos es tan antiguo como la matemática misma, la cuestión del fundamento de la matemática no se planteó realmente sino hasta la época moderna, en la que podemos reconocer claramente dos fases: una que va del Renacimiento a principios del siglo diecinueve, y otra concomitante a la matemática moderna; de éstas, sólo nos ocuparemos de la segunda, pues en ella se enmarcan el proyecto de Hilbert y los teoremas de Gödel.

De manera esquemática podemos decir que hasta principios del siglo diecinueve los matemáticos simplemente creían estar demostrando *verdades* acerca del espacio y las magnitudes físicas o bien proposiciones descriptivas del espacio y del tiempo en tanto que condiciones de posibilidad de toda percepción humana.[1] Pero, una vez abandonado este punto de vista (cuestión que hemos examinado ampliamente en los capítulos anteriores), pronto se dejó sentir la necesidad de procurarle un *fundamento* a esta ciencia, es decir, de asegurarla y hacerla firme, señalando las condiciones que le anteceden y le sirven de justificación y apoyo.[2] En particular, Hilbert creyó que esto se lograría fijando sus principios y conceptos básicos y estableciendo el rigor en las demostraciones, para después aducir su consistencia, es decir, presentar pruebas de su no contradicción como razón justificativa y salvaguarda de su libre albedrío.[3] La axiomatización sería la herramienta y la consistencia su fundamento, estableciéndose de este modo su posibilidad y legitimidad sin tener que invocar vínculo alguno con la realidad física o cualquier tipo de realidad conceptual.

Aunque la propuesta de Hilbert era una repetición de su intento por dar un fundamento a las distintas geometrías, el contexto en que se dio fue un tanto diferente al de la aparición de las geometrías no euclidianas y contempló circunstancias que debemos explicar. Dichas circunstancias se relacionan no sólo con la introducción de nociones como la del infinito

[1] En cierto sentido, el problema de la *verdad* siguió siendo central a la filosofía de las matemáticas durante el primer tercio del siglo veinte y muchas de las propuestas que se plantearon en este período tenían como fin responder la pregunta sobre su carácter en la matemática y la manera en que se llega a su conocimiento (¿las verdades matemáticas son tales sólo porque así lo convenimos o porque hay algo acerca de lo cual lo son?).

[2] En este sentido, para Hilbert *fundamentar* la matemática consistiría en explicar no su necesidad, sino su ***posibilidad***, es decir, la naturaleza de su conocimiento, estableciendo las condiciones primeras y más generales de su existencia. En breve: *fundamentar* la matemática sería tanto como establecer sus ***condiciones de posibilidad***.

[3] En esto Hilbert procede ante la matemática como Kant lo hiciera ante la metafísica, a la que exige que, para conducirse por el seguro camino de la ciencia, deberá seguir el riguroso método de fundamentación (*Grundlichkeit*) de Wolf, mediante «el ordenado establecimiento de principios, la clara determinación de los conceptos, la búsqueda del rigor en las demostraciones y la evitación de saltos atrevidos en las deducciones.». Cf. Kant, CRP, BXXXVI. No obstante, en el caso de la matemática, la crítica de Hilbert no estaría dirigida a que ésta se aventure más allá de la experiencia posible, cosa que hace ordinariamente, sino a que se lance a investigar cosas imposibles como las que se ofrecen en una teoría inconsistente o que se apoye en principios y modos de argumentación que no se han enunciado explícitamente.

actual, sino con el desconcierto provocado por la aparición de antinomias en la teoría de conjuntos —sobre todo en la peculiar concepción de Frege y Russell— y por las agudas críticas de una nueva corriente filosófica, el *intuicionismo* de Brouwer, que encuentra sus raíces en el empirismo francés de fines del siglo diecinueve.

3.1.1 Situación del problema a principios del siglo veinte

Ya en los siglos dieciocho y diecinueve el análisis infinitesimal había suscitado numerosas discusiones sobre su legitimidad. No se cuestionaba su éxito en las aplicaciones, sino la forma demasiado libre con la que se servía de las nociones de infinito y continuidad, que incluso llegó a provocar dificultades de orden técnico: ¿cómo era posible que un instrumento tan eficaz se fundara sobre bases tan inciertas? Finalmente, tras la intensa labor de matemáticos de la talla de Cauchy y Weierstrass (entre otros), en la segunda mitad del siglo diecinueve este problema se consideró resuelto con la aritmetización del análisis, ampliamente comentada en la sección **2.5**. Una consecuencia de esta reducción fue que los números irracionales e imaginarios, suficientes para las necesidades del análisis, se pudieron definir a partir de los números enteros de la aritmética. A su vez, Dedekind había logrado dar cuenta del continuo geométrico estableciendo una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales, de modo que la aritmética resultó el punto de apoyo de toda la matemática clásica.

Entretanto, la reducción cantoriana de la noción de número a la de conjunto[4] y el parentesco manifiesto entre la noción matemática de conjunto y la noción lógica de clase, sugirieron de inmediato la idea de basar la aritmética en una ciencia más elemental: la lógica. A finales del siglo diecinueve Gottlob Frege (1848-1925) creía haber realizado tal reducción, y vio en la matemática una región particular de la lógica. No obstante, poco tiempo después Bertrand Russell, quien también se ocupaba de la reducción logicista, descubrió que la teoría de Frege desembocaba en una antinomia.[5] De hecho, lo que Russell descubrió fue que la noción del *conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí*

[4] En realidad, la noción de conjunto es mucho más general que la de número, como lo demuestra el hecho de que en la teoría cantoriana los números enteros son una pequeña parte del conjunto de los números cardinales transfinitos.

[5] Literalmente, la palabra «antinomia» significa «en contra de la ley» y se le utiliza para indicar el hecho de que dos leyes o dos principios se contradicen. No obstante, en la lógica y las matemáticas tiene un uso más específico y designa una contradicción que inicia con el uso de la noción de *todos*. A las antinomias se les suele llamar eufemísticamente *paradojas*, como si sólo se tratara de una opinión contraria a la común, no de una contradicción. Una antinomia lógica es un argumento en el que se presentan una proposición P y su negación $\neg P$ con la propiedad de que una se sigue de la otra y viceversa, no habiendo manera de determinar cuál de ellas es verdadera. En general, cuando una proposición conduce a su contraria, se llega a la conclusión de que es falsa y se le rechaza. Pero si su negación conduce a su vez a la proposición original, por la misma razón se le debe rechazar, lo que va en contra del principio del tercero excluido y nos deja frente a una dificultad.

mismos como elementos, aceptada por la teoría de Frege y que tiene cabida en la de Cantor, conducía a una antinomia al planteamos el problema, perfectamente lícito en dichas teorías, de saber si tal conjunto se contiene a sí mismo como elemento. Hacia la misma época, nos referimos a 1904, ya se habían reconocido otras antinomias en la teoría de conjuntos.

La reacción ante las antinomias fue dispar. Para unos éstas eran el resultado de un manejo falaz de la noción de conjunto, mientras que para otros eran la evidencia de que los principios mismos de la teoría de conjuntos eran inadmisibles, y rechazaron esta teoría por completo. Dice Poincaré: «No hay infinito actual; los cantorianos lo han olvidado y han caído en contradicción.».[6] Por el contrario, para Cantor dichas antinomias parecieran no representar ningún peligro, pues se hallarían muy lejos del tipo de conjuntos que un matemático consideraría, sirviendo si acaso como pruebas de inexistencia.[7] Russell por su parte vio en ellas un problema que se remontaba a la lógica, la cual no ponía ningún obstáculo para evitar su entrada. Como prueba, construyó una antinomia lógica equiparable a la precedente, pero sin relación alguna con la teoría de conjuntos y las matemáticas, misma que guardaba una estrecha relación con algunas paradojas conocidas desde muy antiguo, como la del embustero.[8]

3.1.2 Las antinomias

El comienzo del siglo veinte fue una época apasionante para los adeptos a los finos argumentos: veinticuatro siglos después de Zenón de Elea (n. hacia 490 a. C.) pudieron asistir a una verdadera resurrección de las antinomias y las paradojas, a un banquete en el que las viandas eran sutiles razonamientos que torturaban al entendimiento toda vez que éste intentaba ahondar en su sentido. El problema era que la asistencia al banquete era forzosa para los matemáticos; por divertidas que parecieran, detrás de las antinomias había algo más que discusiones bizantinas: era el fundamento mismo y la legitimidad del pensamiento matemático lo que se hallaba en el fondo del debate.

En cierto sentido, las antinomias plantearon dos cuestiones que tocan la esencia misma de la matemática moderna: ¿qué es eso de la *verdad matemática*?, ¿cómo eludir la amenaza que representan la paradojas? En su momento, nadie se sintió en posibilidad de soslayar

---

[6] Poincaré, 1908. Cita tomada de la traducción al español, p. 150.

[7] Véase, por ejemplo, la distinción que hace Cantor entre *multiplicidades consistentes e inconsistentes* en la cita que figura como comentario a su paradoja en la siguiente sección.

[8] La paradoja del embustero, ya citada por Marco Tulio Cicerón (106-43 a. C.), es la siguiente: «Si tú dices que mientes, o dices la verdad y entonces mientes, o mientes y entonces dices la verdad». A ésta se le conoce también como *paradoja del mentiroso*, o *paradoja de Epiménides*. Otra de sus formas es la siguiente: «Un hombre afirma que está mintiendo, ¿es verdadero o falso lo que dice?»; modernamente se le expresa en forma reducida como sigue: «Yo miento», o bien, «este enunciado es falso». Gödel, en su teorema de incompletud, utiliza una variante de esta expresión.

estas interrogantes y cada quien, a su manera, intentó una respuesta en medio de un coro de voces discordantes. No sólo era que las antinomias confundían a la razón, sino que ésta no hallaba la manera de anular lo que ella misma había engendrado: había que idear un antídoto que las contrarrestara.

Obviamente, en un espacio tan breve no podemos presentar un catalogo completo de las antinomias ni pasar lista a todos los remedios propuestos; más bien, nos limitaremos a enunciar las más significativas, hilvanando algunas reflexiones inevitablemente superficiales. A fin de cuentas, lo que nos interesa es el efecto que tuvieron en el problema de los fundamentos y presentar algunas de las soluciones propuestas, principalmente la de Hilbert.

Como el lector notará, todas las paradojas y antinomias nacieron en ocasión de la teoría de conjuntos, aunque no todas ellas toman en consideración conjuntos infinitos. Hay en ello una razón: algunos autores decidieron retocar algunas de ellas que inicialmente trataban con conjuntos infinitos, para no salir del dominio de lo finito; su intención era mostrar que tales contradicciones no eran el resultado de hacer uso del infinito, sino que se debían a algo más fundamental, hasta alcanzar a la lógica.[9]

La paradoja de Burali-Forti. Aunque ya en 1895 Cantor había detectado una antinomia en la teoría de conjuntos, el inicio de la nueva era de las paradojas se puede fechar en 1897, año en el que Cesare Burali-Forti (1861-1931) publicó un artículo titulado *Una questione sui numeri transfiniti*.[10] Este trabajo se considera la señal de alarma contra los principios de la teoría de conjuntos (principalmente el *principio de comprensión*), mostrando que encierran eso que los matemáticos consideran el peor de sus enemigos, un pecado imperdonable: la contradicción.[11] La explicación de la paradoja de Burali-Forti es simple aunque un tanto técnica.

En la teoría intuitiva de conjuntos es lícito considerar el conjunto Ω de todos los números ordinales, y razonar sobre él.[12] Dado que todo conjunto de números ordinales está bien ordenado, al conjunto Ω le corresponde un número ordinal α.[13] Dicho ordinal tiene dos propiedades: es un elemento de Ω (pues Ω contiene todos los ordinales) y es mayor que cualquier elemento de Ω, de donde se infiere que es mayor que él mismo: $\alpha < \alpha$. Esto último contradice el hecho de que no $\alpha < \alpha$, algo que se demuestra en la teoría.

---

[9] Fieles a la tradición, nos referiremos a las antinomias y paradojas bajo el nombre genérico de *paradojas*, dado el fuerte arraigo que tiene en el medio. Véase la nota al pie #5 de esta sección.

[10] *Cf.* Burali-Forti, 1897.

[11] «Tal parece que los matemáticos no le temen a nada salvo a la contradicción». Creo haber leído esto en algún libro de Wittgenstein, más no encuentro la cita. De todos modos, con gusto suscribo la afirmación.

[12] Véase el análisis que se hace del *principio de comprensión* al inicio del apéndice 8.

Este resultado hizo ver que, pese a su aparente naturalidad, el *principio de comprensión* es una suposición inadmisible (es este principio lo que permite considerar conjuntos como Ω y otros que en seguida veremos).

Como podemos ver, a Burali-Forti le bastó adaptar un razonamiento que Cantor había utilizado con éxito en la teoría de los números transfinitos al introducir, por ejemplo, objetos como el primer número ordinal transfinito ω —que resulta al considerar el conjunto de todos los números ordinales finitos—, o al construir la escala ilimitada de los aleph, todo ello sin incurrir en contradicciones. Pero cuando Burali-Forti consideró en su totalidad la serie bien ordenada de todos los números ordinales (y al decir *todos* nos referimos a que, por definición, no hay otros), el mismo procedimiento operatorio dio lugar a un nuevo número ordinal, un número que no se halla en la totalidad de los números ordinales, que *forma y no forma parte de esta totalidad.*

La paradoja de Cantor. Cantor descubrió en 1899 una antinomia semejante a la Burali-Forti pero que tiene lugar en la teoría de los números cardinales.

Considérese el *conjunto de todos los conjuntos*, digamos M. Por el *teorema de Cantor*, $\overline{\overline{\wp(M)}} > \overline{\overline{M}}$.[14] No obstante, como todos los conjuntos pertenecen a M y $\wp(M)$ es un conjunto de conjuntos, $\wp(M) \subset M$, de donde se sigue que $\overline{\overline{\wp(M)}} \leq \overline{\overline{M}}$. Esto último contradice el hecho, demostrado en la teoría, de que si $A \subset B$, entonces no $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$. Por lo tanto, se tiene que $\overline{\overline{\wp(M)}} > \overline{\overline{M}}$ y no $\overline{\overline{\wp(M)}} > \overline{\overline{M}}$, una contradicción.

Al respecto, Cantor intento salir del problema separando las multiplicidades en dos clases: las *consistentes* y las *inconsistentes*, aduciendo que las segundas no son realmente conjuntos:[15]

> Una multiplicidad puede estar constituida de modo tal que la hipótesis de una "existencia simultánea" de todos sus elementos conduce a una contradicción, de tal suerte que es imposible concebir esa multiplicidad como una unidad, "como un objeto acabado". Tales multiplicidades yo las nombro *multiplicidades absolutamente infinitas* o *inconsistentes.*
>
> Por ejemplo, se podría uno persuadir fácilmente de que la "clase de todo lo que es pensable" es una multiplicidad tal; otros ejemplos se presentarán más adelante.
>
> Si por el contrario, la totalidad de los elementos de una multiplicidad puede pensarse como "existente simultáneamente" de tal manera que sea posible concebirla como "*un solo objeto*", yo la nombro una *multiplicidad consistente* o un "conjunto" (en francés

---

[13] Véase la parte final del apéndice 7.

[14] Véase la sección *Cardinales transfinitos superiores* del apéndice 7.

[15] Esto, como veremos, influyó de manera decisiva en la concepción que Hilbert tiene de la existencia matemática.

e italiano este concepto se expresa con precisión por lo vocablos "ensemble" e "insieme").[16]

El inconveniente de esta solución es que remite a un problema de gran envergadura: al de la consistencia de una teoría para la que ni siquiera se tenía entonces un cuadro axiomático. Es claro que hay algo que no marcha bien en el modo en que Cantor asume la existencia de conjuntos y que podemos llamar "ingenuo" (*naif*).

La paradoja de Russell. Sin lugar a dudas, la antinomia más famosa de todas es la descubierta por Betrand Russell en 1901; tiene varias virtudes: es extremadamente simple, impecable desde el punto de vista de la lógica y sólo recurre a la noción de *pertenencia de un objeto a una clase* (a diferencia de las anteriores, que apelan a diversas nociones de la teoría de los números transfinitos). Aunque su formulación se puede ofrecer en un par de renglones, trataremos de obviar los problemas que pudiera haber en ella.

Como todos sabemos, hay clases que no son elementos de sí mismas. Por ejemplo, la *clase de los seres humanos* no es un ser humano y por tanto no pertenece a sí misma. En cambio, hay clases que sí son miembros de sí mismas, como, por ejemplo, la *clase de todos los conceptos*. Ahora consideremos la *clase de todas las clases que no son elementos de sí mismas*, ¿es esta clase un elemento de sí misma?

Para dar respuesta a esta interrogante, denotemos la clase en cuestión con la letra B. Por definición,

$$B = \{X \mid X \notin X\}$$

Con esta notación podemos expresar la pregunta anterior como sigue: ¿$B \in B$? Como veremos, cualquiera que sea la situación, ésta nos conduce a su contraria. En efecto,

- Si $B \in B$, como los único miembros de B son aquellos conjuntos que no son elementos de sí mismos, B es un conjunto que no se pertenece a sí mismo, es decir, $B \notin B$. Recíprocamente,
- Si $B \notin B$, entonces B es una clase que no es elemento de sí misma, y por ello es un elemento de B (pues esa es la condición de pertenencia a B), es decir, $B \in B$.

La conclusión a la que llegamos es inevitable: $B \in B$ si y sólo si $B \notin B$, una contradicción.

Esta paradoja la dio a conocer Frege en 1903, en un posdata al segundo volumen de su libro *Grundgesetze der Arithmetik* (Leyes fundamentales de la aritmética) donde reconoce, desesperanzado, el efecto que ésta tiene en relación a su proyecto de fundamentación de la aritmética en la lógica. La antinomia también dio lugar a un ahondamiento en las

[16] Cantor, carta a Dedekind, Halle, 28 de julio de 1899. Reproducida en Sestier, 1981, p. 92.

investigaciones en torno a los principios de la matemática, en busca de una solución a la misma, y a la reorganización de la lógica hecha por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica* (1910-13). De nuevo, el *principio de comprensión* era puesto en duda.

Russell, quien dirigiera años después una verdadera fábrica de paradojas, elaboró algunas variantes de esta antinomia que tienen la virtud de presentarse de una manera mucho más concreta y con un significado más accesible. He aquí algunas de ellas:[17]

La paradoja del barbero. En cierta población hay un barbero que afeita única y exclusivamente a aquellas personas del pueblo que no se afeitan a sí mismas. La pregunta es: ¿quién afeita al barbero? Otra variante es la siguiente:

La paradoja del catálogo de los catálogos. Toda biblioteca que se respete tiene un catálogo en el que se enumeran los libros que contiene. Cuando dicho catálogo tiene la forma de un libro, es normal que se mencione a sí mismo como uno de los libros del acervo, aunque esto último no siempre sucede. En cierta ocasión, en la Biblioteca Nacional decidieron elaborar dos supercatálogos, uno que incluyera todos los catálogos que hacen referencia de sí mismos, y otro que incluyera todos los catálogos que no hacen referencia de sí mismos. Este último catálogo, ¿se menciona a sí mismo?

La paradoja del alcalde. Todos los municipios de Holanda tienen un alcalde. A menudo, sucede que el alcalde no vive en el municipio que gobierna. En cierta ocasión era tal el número de alcaldes de esta segunda especie, que el parlamento holandés promulgó una ley ordenando la creación de un municipio donde vivirían única y exclusivamente aquellos alcaldes que no residieran en el municipio que presidían. La pregunta es: ¿dónde habría de vivir el alcalde de dicho municipio?

Para mostrar que las antinomias se debían a algo más fundamental que el recurso al infinito y que éstas se podían formular con nociones extraídas de la lógica, Russell elaboró *ex profeso* la siguiente paradoja.

La paradoja de la *impredicabilidad*. Una propiedad se dice que es *predicable* cuando se aplica a sí misma, e *impredicable* si no es aplicable a sí misma. Por ejemplo, la propiedad "abstracto" es abstracta, y por tanto *predicable*. En cambio "concreto" es abstracto y, por tanto, *impredicable*. La pregunta es: la propiedad "impredicable", ¿es *impredicable*?

Una variante de esta paradoja es la siguiente:

---

[17] *Cf.* Russell, 1906. Si el lector así lo desea, puede omitir la lectura de las paradojas cuya relación aquí se inicia, salvo la de Richard, dada su importancia en relación al teorema de Gödel.

La paradoja de Grelling. Se dice que un adjetivo es *autológico* si la propiedad denotada por él es aplicable a él mismo; de lo contrario se dice que el adjetivo es *heterológico*. Por ejemplo, "polisílabo" es un adjetivo polisílabo y por tanto es *autológico*; en cambio, "monosílabo" no es un adjetivo monosílabo y por tanto es *heterológico*. La pregunta es: el adjetivo "heterológico", ¿es *heterológico*?

La paradoja de Berry.[18] Consideremos la siguiente expresión: «*el menor número natural que no se puede describir con menos de veintinueve sílabas*». Si contamos las sílabas de esta expresión podremos ver que tiene menos de veintinueve:

el	me-nor	nú-me-ro	na-tu-ral	que	no	se	pue-de	des-cri-bir	con	me-nos	de	vein-ti-nue-ve	sí-la-bas
1	2 3	4 5 6	7 8 9	10	11	12	13 14	15 16 17	18	19 20	21	22 23 24 25	26 27 28

Hay en lengua castellana sólo un número finito de expresiones con menos de veintinueve sílabas. Por consiguiente, hay sólo un número finito de enteros positivos que se pueden describir con una expresión que tenga menos de veintinueve sílabas y habrá un entero k que sea el menor entero positivo que no se puede caracterizar de esa manera. No obstante, la expresión en cursivas describe al número k ¡con menos de veintinueve sílabas!.

La paradoja de Berry tiene dos virtudes: no va más allá de los números finitos y sólo recurre a la noción de *definibilidad finita*. Se trata de un caso simplificado de la más compleja antinomia de Richard que a continuación exponemos.

La paradoja de Richard. Algunas frases de la lengua castellana definen propiedades de los números enteros. Por ejemplo, la frase «*x no es divisible más que por él mismo y la unidad*» define la propiedad de ser un número primo. Tales frases se pueden ordenar de acuerdo a su longitud (número de letras) y las de la misma longitud, alfabéticamente (a este tipo de orden se le llama *lexicográfico*). Representemos por $D_1(x)$, $D_2(x)$, ..., $D_n(x)$, ... tal ordenación. Decimos que un número k es *richardiano* si $D_k(k)$ es falso, y *no richardiano* si $D_k(k)$ es verdadero. Como la definición de *número richardiano* la hemos dado en lengua castellana, le corresponde un lugar en la lista. Supongamos que éste es el r-ésimo lugar ¿es r un número richardiano o no richardiano? Si r es richardiano, entonces $D_r(r)$ es falso (por definición de *richardiano*) y r es no richardiano (pues no cumple con la definición $D_r(x)$). Por el contrario, si r es no richardiano, entonces $D_r(r)$ es verdadero (por definición de *no richardiano*) y r es richardiano (pues cumple con $D_r(x)$ que define tal propiedad). Por tanto, r es richardiano si y sólo si r no es richardiano, una contradicción.

[18] Siguiendo a Bertrand Russell, quien en el artículo previamente citado de 1906 la atribuye a G. G. Berry, un bibliotecario de la universidad de Oxford.

Como a continuación mostramos, esta paradoja utiliza, además de la nociones de *verdad* y *definibilidad*, el *método diagonal de Cantor*. Dispónganse las definiciones y los números naturales en un arreglo bidimensional (una matriz infinita) como en el siguiente diagrama.

	1	2	3	...	n	...
$D_1(x)$	$\mathbf{D_1(1)}$	$D_1(2)$	$D_1(3)$	...	$D_1(n)$	...
$D_2(x)$	$D_2(1)$	$\mathbf{D_2(2)}$	$D_2(3)$	...	$D_2(n)$	...
$D_3(x)$	$D_3(1)$	$D_3(2)$	$\mathbf{D_3(3)}$	...	$D_3(n)$	...
...	...	...	...	...	...	...
$D_n(x)$	$D_n(1)$	$D_n(2)$	$D_n(3)$	...	$\mathbf{D_n(n)}$	...
...	...	...	...	...	...	...

En el renglón superior se enumeran los números naturales y en la columna a la izquierda todas las definiciones de propiedades de los números naturales. Para cada n y cada k, en la intersección de la fila n con la columna k se escribe el enunciado que afirma que el número k tiene la n-ésima propiedad, es decir, el enunciado $D_n(k)$. V. gr., en la intersección (2, 3) figura el enunciado $D_2(3)$. La definición de *número richardiano* resulta al recorrer el arreglo a lo largo de la diagonal, pues en ella se pide que el enunciado $D_k(k)$ sea falso: una aplicación del método diagonal de Cantor (véase la sección **2.6.3**).

Como veremos, hay una similitud estructural entre el argumento de Richard y el argumento que Gödel utiliza para demostrar la existencia de proposiciones indecidibles en la aritmética formal. Más allá del carácter polémico de la antinomias y de las dificultades ocasionadas por ellas a los distintos programas de fundamentación de la matemática, Gödel descubrió que éstas encerraban la clave para poner al descubierto la disparidad entre dos nociones que hasta entonces se habían confundido: las nociones de *verdad* y de *demostrabilidad*.[19]

Como el lector habrá notado, no todas las antinomias son del mismo rango: unas recurren sólo a nociones lógicas, otras a nociones conjuntistas, algunas apelan a nociones semánticas como la de *verdad*, otras recurren a la noción de *infinito* y otras más evitan esta noción a toda costa. Obviamente, su "grado de resolubilidad" no es el mismo. Por ejemplo, la paradoja del barbero lo único que demuestra es la imposibilidad de que haya en cualquier lugar una persona con las características indicadas. Y si bien algo semejante sucede con la

[19] Como anticipo podemos decir lo siguiente: partiendo de la paradoja de Richard, Gödel reemplaza la condición "el enunciado $D_k(k)$ es falso" por la condición "la fórmula $\phi_k(k)$ no es demostrable" y explora qué consecuencias tendría el hecho de que una fórmula perteneciente a una teoría axiomática formalizada definiera esta propiedad ... para después construir una fórmula semejante.

paradoja de Russell, en el sentido de que no puede existir tal cosa como el *conjunto de todos los conjuntos*, ésta deja tras de sí el problema de hallar un sustituto del *principio de comprensión*, de muy fácil aceptación y uso generalizado en la matemática, y algo peor: la desconfianza en los métodos utilizados. Por su parte, las paradojas de Berry y de Richard remiten a un problema de gran importancia para la lógica moderna: el de la distinción entre lenguaje y metalenguaje.[20] Hilbert fue quizá el primero en llamar la atención sobre este punto al elaborar su programa de fundamentación.

Aun así, todas las paradojas tiene algo en común: la autorreferencia o reflexibidad. Cada una de ellas expresa algo de todos los casos de un género y a partir de esta expresión surge un nuevo caso que es y no es similar a aquellos a los que el «todos» se refiere. Así, por ejemplo, la propiedad de *no pertenecerse a sí mismo*, aplicable a todos los conjuntos, da lugar al conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, un nuevo caso que es y no es similar a los demás conjuntos de este género (pues se pertenece y no se pertenece a sí mismo). Se trata de una autorreferecia evidente. Como veremos, ante esta dificultad Russell optó finalmente por establecer reglas dirigidas a impedir la autorreferencia de la que nacen las paradojas, mientras que Hilbert insistió en la vía axiomática y las pruebas de consistencia como única solución; Brouwer, en cambio, pidió las cabezas del infinito actual y del principio del tercero excluido como único remedio.

Comentario final. Originadas al final del siglo diecinueve, las polémicas en torno a las antinomias de la teoría de conjuntos han perdido mucha de su agudeza. Algunas cuestiones se han resuelto, otras se han esclarecido, y más que nada el interés de los matemáticos y filósofos se ha desplazado a otros problemas.

Si bien su importancia en relación al problema de los fundamentos no se puede negar, en algunos casos ésta se ha sobrestimado, llegándose incluso a hablar de una "crisis en los fundamentos", como si en verdad se tratara de un período en el que el edificio matemático hubiera estado a punto de derrumbarse o la actividad matemática se hubiera paralizado en espera de una solución. Nada más alejado de la realidad. Por ejemplo, Hilbert, después de bosquejar un programa para demostrar la consistencia absoluta de los axiomas de la aritmética, dirigió sus esfuerzos a las ecuaciones integrales y a la física, donde se mantuvo por más de 12 años, mostrando en ello una actitud similar a la de otros matemáticos. Incluso Zermelo, que siguió trabajando en la teoría de conjuntos, pareció no preocuparse por el problema mayormente y se limitó a ofrecer una base axiomática para la teoría, suficiente al menos para las necesidades del matemático activo.

[20] Véase al respecto el apéndice 14.

Claro está que no todos reaccionaron igual. Por el contrario, hubo un sector de estudiosos que, trabajando en torno al problema de los fundamentos desde una perspectiva más cercana a la filosofía, hicieron de las antinomias un escándalo al ver cómo se derrumbaba su proyecto: nos referimos a Gottlob Frege y Bertrand Russell. A su vez, otros pensadores optaron por reconstruir el edificio entero, aislando en las zonas inciertas un núcleo esencial y echando por la borda todo lo que no se pudiera justificar sobre una base intuitiva o empírica. En esta corriente se inscriben Poincaré, Borel, Lebesgue y Baire.[21] Lejos de la especulación filosófica, su meta era establecer qué objetos y métodos debían considerarse como válidos en la matemática para evitar el riesgo de la contradicción. Más tarde Brouwer se habría de incorporar a esta tendencia, aunque de una manera mucho más sistemática y cercana a la filosofía, principalmente a la de Kant. Proclamándose él mismo heredero del empirismo francés, Brouwer subió a la palestra en 1907 y su intervención fue la principal causa de que Hilbert retomara el problema de los fundamentos hacia 1917: había que restituir la certeza de la matemática sin renunciar a sus conquistas. En efecto, para Borel y Lebesgue, lo mismo que para Brouwer más adelante, la reconstrucción de la matemática había de empezar en la teoría del continuo —de la que surgen los materiales de que están hechos los principales objetos del análisis matemático tradicional— y continuar en la teoría de conjuntos, reconstrucción que Hilbert trata de evitar a toda costa, en la medida en que implica la supresión de sectores considerables en ambas teorías. Su plan era el opuesto: conservar el edificio intacto.

En cuanto al impacto e importancia de las antinomias en la matemática propiamente dicha, hemos incluido en el apéndice **9** un análisis de su efecto y algunas medidas que se tomaron ante ellas.

3.1.3 La propuesta de 1904

Hemos tratado de explicar el contexto en el que Hilbert planteó la reconstrucción axiomática de la aritmética de los números reales como solución al problema de sus fundamentos. Para hacer de los axiomas una sólida base, éstos se debían elegir de manera que ya no permitieran la deducción de antinomias. Esta situación sólo difería en un punto de la situación que Hilbert había encontrado años atrás cuando axiomatizó la geometría. Como en aquel momento nadie dudaba de la consistencia de los axiomas, no se consideraba indispensable dar una garantía de la misma y la prueba ofrecida en los *Grundlagen der Geometrie* (véase la sección **1.4**) era más bien una sutileza: para todo fin práctico, bastaba

[21] Ya nos hemos referido anteriormente a algunos de estos matemáticos, cuyos comentarios respecto al axioma de elección los podrá encontrar el lector en la sección **2.6.5**.

con que de los axiomas se pudieran deducir las proposiciones de la geometría. Pero cuando las críticas a la matemática clásica se acrecentaron en voz de matemáticos como Poincaré, Hilbert sintió la imperiosa necesidad de garantizar la consistencia del sistema de los números reales, es decir, de prevenir la aparición de las antinomias conocidas y de cualquier otra contradicción en el edificio de la matemática clásica. Esta solución sería a la vez una refutación del punto de vista de Kronecker, según el cuál los números irracionales no son objetos matemáticos legítimos. Retomando el lenguaje de Cantor (véase el comentario que sigue a su antinomia en esta sección), lo que Hilbert buscaba era demostrar que la multiplicidad de los números reales era una *multiplicidad consistente*, lo cual, según él, garantizaría su *existencia matemática* (*v.* la sección **2.6** en relación a esto último).[22]

Fue así como Hilbert propuso, por primera vez en la historia, convertir la demostración en un objeto de investigación matemática. Había que ensayar otros caminos en vez de restringir los conceptos y los métodos matemáticos como quería Kronecker. Junto con Cantor, Hilbert sostuvo que la esencia de las matemáticas reside en su libertad y vio en las restricciones impuestas a la noción de número un mal, una condena a la esterilidad para el análisis matemático. Su propósito era eliminar las paradojas sin cometer traición contra su ciencia. Y frente a la idea de Kronecker de que la noción de número entero es el verdadero fundamento de la aritmética, Hilbert insistió en que éstos números pueden y deben tener un fundamento.

Estas ideas las presentó en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en la ciudad de Heidelberg. Transcurría el año de 1904. Y si bien el proyecto debió esperar más de dieciocho años para madurar,[23] en sus reflexiones ya asoman algunas ideas de lo que sería su programa para fundamentar la matemática, una de las cuales reviste especial importancia para nosotros: que sea ella misma quien resuelva el problema de sus fundamentos. La necesidad de este cambio de dirección en las investigaciones obedeció a la naturaleza misma del problema. Dice al respecto:

[22] Al respecto, el método de construcción genética de los números reales a partir de los números naturales ya no era viable como criterio de existencia, pues en él concurrían distintas nociones conjuntistas ahora puestas en duda por las antinomias. Había, pues, que proceder de otra manera, al margen de los métodos de razonamiento habituales en la teoría de los números irracionales. Esta necesidad de probar la consistencia de la matemática clásica se hizo más evidente cuando Zermelo presentó sus axiomas para la teoría de conjuntos, que incluía el controvertido axioma de elección (*v.* la sección **2.6.5**).

[23] Tras el congreso, Hilbert se distanció del problema de los fundamentos en parte porque sus intereses lo condujeron en otra dirección (la física matemática), y en parte —por lo menos así se especula— porque no encontró una manera eficaz de llevar a cabo la proyectada prueba. No fue sino hasta 1917 que retomó estas cuestiones, en cierto sentido a causa de la adhesión de uno de sus discípulos, Herman Weyl, a la propuesta de Brouwer.

> Mientras que en la actualidad estamos esencialmente de acuerdo en cuanto a los caminos a seguir y las metas por alcanzar cuando se trata de investigar los fundamentos de la geometría, la situación es muy distinta en relación a la pregunta por el fundamento de la aritmética; aquí, los investigadores aun sostienen una gran variedad de opiniones incompatibles.
> De hecho, algunas de las dificultades en los fundamentos de la aritmética son de una naturaleza diferente de aquellas que debieron ser superadas cuando se establecieron los de la geometría. Al examinar los fundamentos de la geometría nos fue posible hacer a un lado ciertas dificultades de naturaleza puramente aritmética; pero el recurso a otra disciplina primordial no parece estar permitido cuando es el fundamento de la aritmética lo que está en juego.[24]

A fin de situar las distintas tendencias que había de enfrentar, Hilbert somete a una revisión crítica diversos puntos de vista, manifestando de paso su sentir respecto a los fundamentos de la matemática. En la mayoría de los casos califica la tendencia considerada otorgándole un nombre y la atribuye a alguna persona. Así, por ejemplo, habla del *dogmatismo* de Kronecker, del *empirismo* de Helmoltz, del *oportunismo* de Christoffel, del *subjetivismo* de Cantor y del método *trascendental* de Dedekind. No hace ninguna mención de Russell, pero sí de Frege, de quien dice que ha sido «uno de los académicos que ha ahondado con mayor profundidad en la esencia de los enteros».[25] Es a este pensador a quien dedica el mayor de los comentarios, reconociendo lo meritorio de su obra:

> G. Frege se asigna la tarea de establecer las leyes de la aritmética con los procedimientos de la *lógica*, tomada en el sentido tradicional. [...] Pero, fiel a su plan, acepta entre otras cosas el principio fundamental de que un concepto (un conjunto) está definido y es utilizable de inmediato si para cada objeto está determinado si éste se subsume o no en el concepto, y en ello no impone ninguna restricción a la noción de "cada"; de este modo queda expuesto precisamente al tipo de paradojas teórico-conjuntistas contenidas, por ejemplo, en la noción del conjunto de todos los conjuntos, lo cual muestra, así me parece, que las concepciones y los medios de investigación prevalecientes en la lógica, tomada en su sentido tradicional, no están a la altura de las demandas de rigor que nos impone la teoría de conjuntos. *Más bien, desde un principio una de las principales metas en las investigaciones de la noción de número debería ser evitar tales contradicciones y clarificar tales paradojas.*[26]

Tras señalar algunos puntos de desacuerdo con Dedekind y Cantor, afirma que la noción de numero no se puede fundamentar únicamente en la lógica, sino en el proceder axiomático: «Soy de la opinión de que todas las dificultades señaladas se pueden superar y

[24] Hilbert, 1904. Cita tomada de Heijenoort, 1967, p. 130.
[25] Hilbert, *ibid.*
[26] Hilbert, *ibid.* El principio fundamental al que Hilbert se refiere es el *principio de comprensión* ampliamente comentado en el apéndice 8.

que podemos procurar un fundamento riguroso y completo a la noción de número con un método que yo llamaría *axiomático* y cuya idea fundamental quiero desarrollar brevemente en lo que sigue.»[27] A lo cual añade:

> A menudo la aritmética se considera parte de la lógica y usualmente las nociones lógicas fundamentales se presuponen cuando se trata de suministrar un fundamento a la aritmética. No obstante, si observamos con atención, nos damos cuenta de que en la exposición tradicional de las leyes de la lógica se utilizan ciertas nociones aritméticas fundamentales como, por ejemplo, la noción de conjunto y, en cierta medida, también la de número. Nos hallamos así dando vueltas en círculo y es por ello que se requiere un desarrollo en parte simultáneo de las leyes de la lógica y de la aritmética, si es que se han de evitar la paradojas.[28]

Hilbert dedica el resto de la conferencia a exponer la forma en que piensa llevar a cabo esta tarea, misma que implica el perfeccionamiento de la vía axiomática. La dificultad acusaba un engorroso contratiempo, pues requería de un análisis detallado de los métodos de demostración que intervienen en las teorías matemáticas y que Hilbert no estaba en posibilidades de llevar a cabo en ese momento.[29] No obstante, en su proyecto ya vislumbramos dos ideas que no habría de abandonar en ningún momento. Son las siguientes:

I. Que la única manera de resolver en definitiva el problema de la consistencia de la aritmética es *sometiendo a un examen minucioso la estructura demostrativa de la teoría*, a fin de probar que con los axiomas y métodos de demostración admitidos es imposible *demostrar* proposiciones contradictorias entre sí.[30]

II. Que la base segura para el pensamiento matemático es la intuición del signo. Aunque esto no lo dice explícitamente en este trabajo, en todas sus consideraciones está presente la idea de que la percepción sensible es lo que nos permite reconocer con seguridad aquellas

---

[27] Hilbert, *op. cit.*, p. 131.

[28] Hilbert, *ibid.* Hilbert mantuvo durante toda su vida la opinión de que la aritmética no se puede fundamentar en la lógica, no sólo porque considera que esta última presupone desde un principio algunas nociones aritméticas, sino porque juzga, en aparente conformidad con Kant, que en la base del pensamiento matemático se halla una forma de pensamiento intuitivo que procede sin presupuestos de ninguna especie y que es irreductible a la lógica (siendo ésta una de las razones por las que propone el desarrollo simultáneo de ambas disciplinas). A esta cuestión habremos de volver más adelante.

[29] En efecto, dadas las exigencias del problema, para llevar a buen término esta investigación era necesario refinar el método axiomático más allá de lo logrado en los *Grundlagen der Geometrie*, pues la matemática usual, en la que las proposiciones se presentan bajo una extraña mezcla de lenguaje ordinario y lenguaje simbólico y en la que las demostraciones no tienen una estructura bien definida que facilite su análisis, no se prestaba para esta tarea.

[30] Es decir, habría que dejar de lado el método de los modelos que tan buenos dividendos le había producido en la geometría y llevar a cabo una *prueba* acerca de las *demostraciones*. Como más adelante reconocería Hilbert, esto requiere de un segundo nivel de consideración, es decir, de una "teoría matemática acerca de la estructura y funcionamiento de las teorías matemáticas" que habría de denominar *metamatemática* y cuya conformación debió esperar hasta 1922.

configuraciones de símbolos que constituyen una fórmula o un axioma. Como veremos, más adelante haría de esta facultad el baluarte de las pruebas de consistencia.

Aunque a la sazón Hilbert estaba muy lejos de alcanzar su objetivo y los recursos disponibles eran escasos (aún había que forjar las herramientas necesarias para alcanzar la meta), en sus reflexiones asoma la postura que tiene ante la matemática y sus fundamentos: el rechazo de toda suposición metafísica acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos, la negativa a renunciar a las conquistas de la matemática moderna (en especial a la teoría de conjuntos), una fe irrestricta en el poder de la razón, la búsqueda de una solución *matemática* al problema de los fundamentos y el recurso a la formalización. Como veremos, para que algunas de estas ideas llegaran a madurar debieron pasar algunos años y muchos otros acontecimientos, como el desarrollo del programa logicista de Russell y la resurrección de las ideas de Kronecker y del empirismo francés en manos de Brouwer. Mientras tanto, Hilbert postergaría el problema de los fundamentos para atender otra de sus predilecciones: la física matemática.

Cerramos esta sección con dos comentarios.

1) Aunque Hilbert jamás volvió a su plan de 1904 para probar la consistencia de la aritmética, queremos mostrar brevemente el tipo de ideas que éste encerraba. *Grosso modo*, el plan consistía en reconstruir la teoría aritmética como un sistema simbólico (que no sintáctico) y probar que las fórmulas iniciales tenían cierta propiedad (la de ser *homogéneas*, noción que aquí no explicaremos), para después probar que esta propiedad se transmitía con la deducción lógica, es decir, que era "hereditaria", en el sentido de que a partir de fórmulas homogéneas sólo se podían derivar fórmulas homogéneas.[31] En tal caso la prueba de consistencia se lograría al comprobar que la negación de una fórmula homogénea no lo era, lo que equivaldría a demostrar que a partir de los axiomas no se podían derivar contradicciones.[32]

---

[31] En el trabajo de 1904 esto sólo lo logra para un fragmento muy simple de la aritmética. En cuanto a la noción de «homogeneidad», tenemos dos razones para no ocuparnos de ella: primero, que para nosotros lo importante de la propuesta de Hilbert no es la forma específica en que piensa llevar a cabo la prueba de consistencia, sino los conceptos que vierte y que más tarde cobrarán una forma más acabada en lo que será su *programa de fundamentación* de la matemática clásica; la segunda razón es que Hilbert nunca volvió a hablar de ella.

[32] Quizá un símil nos ayude. Supongamos que una investigación revela dos hechos sorprendentes: que Adán y Eva efectivamente existieron y que tenían los ojos negros. Supongamos además que en el estudio se descubre que la pigmentación de sus ojos se debía a un gen superdominante que se transmite de manera infalible, en el sentido de que si alguno de los progenitores de un individuo tiene los ojos negros a causa del gen, el individuo forzosamente tendrá los ojos negros y el mismo gen. Esto probaría que los individuos que no tienen los ojos negros no son descendientes de Adán y Eva, ni siquiera de alguno de los dos. La analogía, aunque no es exacta, aclara a la perfección lo que Hilbert tenía en mente al presentar su plan de ataque: si la negación de una fórmula derivable fuera a su vez derivable, tendría que ser homogénea.

2) En la propuesta de Hilbert podemos reconocer una actitud inédita en el ámbito de la filosofía de la matemática y que en su momento ni siquiera había recibido un nombre. Dicha actitud, que podríamos calificar de *ecléctica*, se caracteriza por el afán de resolver el problema de los fundamentos de la matemática desde el interior de las matemática misma, y sin necesidad de adherirse del todo a alguno de los grandes esquemas filosóficos a la mano, como son el racionalismo, el realismo conceptual, el idealismo trascendental, el positivismo, el empirismo, etc., aunque se nutra de algunos de ellos. Si bien en su concepción de la matemática asoman principalmente algunos elementos de la filosofía de Kant, no podemos dejar de reconocer que éstos los toma fragmentadamente, de acuerdo a sus necesidades, y sin adherirse a todos sus principios. Por ejemplo, en los escritos de Hilbert no hay ninguna referencia a la lógica trascendental, sino sólo a la estética y esto de manera restringida. Simplemente, toma lo que considera pertinente y desecha o evita lo demás.

En todo caso, es a sus propios colegas a quienes Hilbert quiere convencer sobre la solidez del edifico matemático, haciéndoles ver que no es necesario recurrir a nada externo a la propia disciplina. A su vez, considera que la naturaleza del pensamiento matemático se verá aclarada a tal punto con su aporte, que ninguna otra postura tendrá cabida en la filosofía matemática y el problema de los fundamentos quedará resuelto para siempre.

Como veremos, esta actitud se agudizó con el paso del tiempo, hasta llegar al extremo de creer que podría disponer de un método general para resolver en principio cualquier problema matemático. Por otra parte, no deja de ser sorprendente el hecho de que una postura tan cautelosa respecto a la epistemología y la ontología matemáticas, culminara en un ambicioso proyecto que nos legó más bien un mar de dudas que todavía nos aquejan. Aun así, después de la intervención de Hilbert todo parece indicar que ninguna discusión seria sobre el fundamento o los principios de la matemática puede volver al estado en que la filosofía de la matemática se hallaba antes de él, mucho menos si consideramos que fue precisamente el planteamiento radical de Hilbert lo que condujo, de manera directa, a los teoremas de Gödel.

Algunas de estas ideas se desarrollarán plenamente en este capítulo. Por ahora sólo queremos advertir al lector que al leerlo deberá tener presente que uno de nuestros propósitos es mostrar cómo fue que Hilbert edificó una concepción de la matemática que, teniendo como punto de partida lo que podríamos llamar "la visión de un matemático activo", procura dotar a esta disciplina de un sólido fundamento sin siquiera salir de ella, escribiendo de este modo el primer capítulo de lo que podríamos llamar una *filosofía matemática*, cuestión que ya hemos comentado y a la que habremos de volver más adelante.

3.2 El logicismo de Russell y Whitehead

En el dominio de la filosofia podemos distinguir al menos tres definiciones básicas de la matemática, según se le considere: (a) como parte de la lógica, (b) como la ciencia de las construcciones posibles o (c) como la ciencia de lo posible.[1] Al comienzo del siglo veinte se dieron, frente al problema de los fundamentos, tres escuelas de pensamiento que expresaban estas posturas filosóficas; se les conoce como *Logicismo*, *Intuicionismo* y *Formalismo*. Cada una de ellas intentaba resolver el problema de los fundamentos de un modo específico y en su momento (nos referimos al primer tercio del siglo veinte) estuvieron abanderadas por ardientes defensores que se lanzaron al campo de batalla bajo estandartes de soluciones extremas. Sólo en un punto estaban de acuerdo: en que la lógica había dejado de ser algo seguro.[2]

Uno de los principales exponentes del *logicismo* fue Bertrand Russell quien, al igual que Frege, pretendía reducir todo el contenido de la matemática al de la lógica, para así concluir que ésta no era sino una de sus ramas.[3] Esta idea encuentra su expresión más acabada en tres de sus obras: *The Principles of Mathematics*, de 1903; *Principia Mathematica*, de 1910 (en colaboración con Alfred North Whitehead) e *Introduction to Mathematical Philosophy*, de 1919.[4] En ellas, el tema central es la reconstrucción de la aritmética como parte de la lógica. Dice Russell:

> El presente trabajo tiene dos propósitos esenciales. Uno de ellos, la prueba de que toda la matemática puede trabajar exclusivamente con conceptos definibles en función de un número muy pequeño de conceptos lógicos fundamentales y de que todas las proposiciones se pueden deducir de un número muy pequeño de principios lógicos fundamentales [...]. Si no me equivoco, la demostración de esta tesis tiene toda la certeza y precisión de que son posibles las demostraciones matemáticas.[5]

---

[1] Esta última definición corresponde a la concepción que Cantor y Hilbert tienen de la matemática y a la que nos hemos referido en varios pasajes en tanto que uno de los temas centrales de este trabajo (v. las secciones 1.5 y 2.6.6). En cuanto a las otras dos definiciones, en ésta y la siguiente sección nos ocuparemos de ellas en relación a Russell y Brouwer.

[2] Esto en modo alguno significa que estuvieran de acuerdo en el papel y la importancia de la lógica. Así, los primeros proponen reconstruir primero la lógica y después la matemática como parte de ella, mientras que los segundos abogan por excluir el principio del tercero excluido y la adopción de una lógica trivalente, mientras que los terceros propugnan la reconstrucción simultánea de la lógica y la matemática, probando la consistencia del sistema resultante como garantía de su confiabilidad.

[3] En cierto sentido, esta reducción ya está sugerida por la construcción *genética* de los números reales con base en los números naturales y la noción de conjunto. Lo único que hacía falta era identificar la noción de conjunto con la noción lógica de clase (o, como veremos, absorber esta última en la lógica de predicados) y definir la noción de *número natural* como una noción lógica.

[4] *V*. Russell, 1903, Russell y Whitehead, 1910 y Russell, 1919.

[5] Russell, 1903. Cita tomada de la traducción al español, p. 19.

En los *Principia* la lógica está constituida por dos disciplinas fundamentales: la lógica proposicional (estudio de las operaciones lógicas de negación, conjunción, disyunción, e implicación material) y la lógica de predicados (lógica de las *funciones proposicionales*, o estudio de los enunciados incompletos que contienen variables); en esta última se consideran enunciados universales y enunciados existenciales mediante los operadores «para todo *x*» (universal) y «existe un *x* tal que» (existencial).[6] Como de la lógica de predicados se deriva la teoría de los símbolos incompletos (descripciones y clases), el cálculo de clases deja de ser una disciplina fundamental de la lógica:

> La siguiente teoría de clases, aunque proporciona una notación para representarlas, evita el supuesto de que existen cosas tales como clases. Esto se logra definiendo proposiciones en cuya expresión figuran símbolos que las representan [...]
> Una clase se caracteriza por consistir de todos los términos que satisfacen una función proposicional, de tal modo que toda función proposicional determina una clase y dos funciones formalmente equivalentes (i. e., tales que la verdad de una implica la verdad de la otra) determinan una misma clase. Recíprocamente, si dos funciones determinan la misma clase, son formalmente equivalentes. Cuando dos funciones son formalmente equivalentes decimos que tienen la misma *extensión*.[7]

Como se puede ver, en los *Principia* la teoría de clases se deriva completamente de la teoría de las funciones proposicionales, de la cual constituye sólo una parte. La clase determinada por una función proposicional $F(\hat{x})$ se denota con $\hat{x}F(x)$ y la relación de pertenencia a una clase, denotada con $\in$, tiene una definición que conduce directamente a la equivalencia

$$x \in \hat{z}F(z) \leftrightarrow F(\hat{x})$$

La unión e intersección de dos clases se definen en términos de la disyunción y conjunción de las funciones proposicionales que las generan. Una vez "inmersa" la teoría de clases en la

---

[6] En el cálculo de predicados se estudian expresiones en las cuales figuran variables tales como «*x*» o «*y*». A tales expresiones se les llama *funciones proposicionales*. Una función proposicional se caracteriza porque da lugar a una proposición cuando sus variables se substituyen por términos con significado constante (es decir, porque se convierte en una entidad lógica de la que podemos afirmar que es verdadera o falsa). Por ejemplo, la expresión «$x > y$» es una función proposicional que da lugar a una proposición cuando las variables «*x*» e «*y*» se substituyen, digamos, por los términos «5» y «3». Junto a la distinción entre *proposición* y *función proposicional*, podemos establecer la distinción entre *descripciones completas* y *descripciones incompletas*. Una descripción incompleta es una expresión que contiene variables y que da lugar a una descripción (completa) cuando éstas se han sustituido por términos de significado constante. Por ejemplo, la expresión «El presidente de *x*» es una descripción incompleta, que da lugar a una descripción completa cuando, digamos, «*x*» se substituye por la palabra «México». La utilidad de las descripciones como artificios del lenguaje es que permiten hacer referencia a objetos para los cuales no se tiene un nombre, pero sí el vocabulario suficiente para describirlos o caracterizarlos. Un caso concreto es el siguiente: «el mínimo entero *x*, tal que *x* es primo y mayor que 10^{100}». Como veremos, Gödel se apoya en este recurso al construir un enunciado autorreferente.

[7] Russell y Whitehead, 1910, *20.

lógica formal, Russell y Whitehead proceden a definir los conceptos fundamentales de la aritmética mediante recursos puramente lógicos. Así, por ejemplo, el número «uno» se define como «la clase de todas las clases unitarias»[8], en su simbología:

$$1 = \hat{x}\{(\exists x)_{\bullet}\alpha = \iota' x\} \text{ Df}^{9}$$

Para resolver el problema de las antinomias, Russell y Whitehead recurren a la siguiente regla (conocida como *principio del círculo vicioso*): *un objeto cuya definición implica la totalidad de los elementos de un conjunto, no puede pertenecer a este conjunto*. El problema con esta regla es que no sólo impide la entrada de entidades como el conjunto de Russell, sino que afecta también algunas partes de la matemática que contienen definiciones de este tipo, denominadas *impredicativas*.[10] En apariencia, esto planteaba un dilema: por una parte, Russell y Whitehead estaban convencidos de que la única manera de cerrar el paso a las contradicciones era impidiendo esta clase de círculos viciosos;[11] por la otra, en la matemática se recurría a este tipo de definiciones impredicativas para introducir algunas nociones que no se podían caracterizar de otro modo. Para salir del problema, decidieron establecer una jerarquía que obligaba a una clase y sus elementos (es decir, a un predicado y sus argumentos) a mantenerse a un grado de separación, con lo que quedaba prohibida la existencia de clases que se contuvieran a sí mismas como elementos o la formación de enunciados autoreferentes (pues no se permitía que una propiedad se predicara de sí misma). A esta jerarquización se le conoce como *teoría ramificada de tipos*, y no fue todo lo satisfactoria que sus autores pensaron.

---

[8] *Op. cit.*, *52.

[9] Haciendo a un lado la notación y la teoría de tipos, podemos aproximar esta definición en una escritura más moderna como sigue: $1 = \{X \mid (X \neq \varnothing) \wedge \forall y \forall z((y \in X \wedge z \in X) \rightarrow y = z)\}$. Algo que llama nuestra atención es que para definir el primero de los números naturales, es decir, para dar inicio a la reconstrucción de la matemática propiamente dicha, los autores demoran una 350 páginas, lo que no deja de ser un elemento en contra del proyecto de Russell y Whitehead, que despierta la duda en el matemático activo sobre si será necesaria toda esta maquinaria para finalmente arribar a una noción tan simple. Sin duda, ésta es una de las razones por las que *Principia Mathematica* no alcanzó una gran difusión, ni despertó el interés de muchos matemáticos.

[10] Todas las paradojas conocidas que tratan con conjuntos recurren de alguna forma a una definición impredicativa. Por ejemplo, en la paradoja de Russell el «conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos», termina por pertenecer a él mismo (y también por no pertenecer a sí mismo: en eso radica la paradoja). Lo mismo se puede decir de las paradojas de Richard y Burali-Forti. En el análisis matemático, la definición de *supremo de un conjunto* es impredicativa, al igual que la definición de *cortadura de Dedekind*. Supongamos que M es un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente (es decir, tal que hay un número c con la propiedad de que $c > x$ para todo $x \in M$). El *supremo* de M se define como el menor de los números c con dicha propiedad. Como se ve, la definición anterior recurre a la totalidad de las cotas superiores del conjunto, de la que el supremo es un elemento.

[11] Russell en particular estaba convencido de que las antinomias en la teoría de conjuntos tenían su origen en la lógica, no en la matemática, y que evitando el circulo vicioso éstas habrían de desaparecer.

La teoría de tipos establece una distribución de los elementos con que se trabaja en niveles. Los elementos primarios (objetos individuales) constituyen las entidades de tipo 0 (primer nivel). Las clases de elementos de tipo 0 constituyen los elementos de tipo 1, las clases de elementos de tipo 1 (es decir, clases de clases de elementos de tipo 0) constituyen los elementos de tipo 2 y así sucesivamente. Por ejemplo, si consideramos a los seres humanos como entidades de tipo 0, la bondad o el ser bondadoso (esto es, el predicado expresado por «*x* es bondadoso») corresponde al tipo 1, mientras que las propiedades de ser una virtud o ser un defecto corresponden al tipo 2, ya que sólo tiene sentido afirmarlas de propiedades como la bondad. En esta teoría todo atributo debe ser de un tipo superior al de las entidades sobre las cuales puede aseverarse con sentido. Así, de acuerdo a esta teoría, enunciados como «heterológico es heterológico» ó «$B \in B$» carecen de sentido.

No obstante, a fin de obtener ciertas definiciones impredicativas que son necesarias para reconstruir el análisis (como las recién señaladas en la nota al pie #10), Russell y Whitehead se vieron obligados a recurrir a un discutible *axioma de reductibilidad* que permitía introducir propiedades de primer orden (o primer tipo) con la misma extensión lógica que propiedades de orden superior.[12] Este axioma era difícilmente justificable en los términos propuestos ("*sólo principios lógicos*") y su introducción constituía una imperfección. Los mismos autores así lo reconocen en la introducción a la segunda edición de los *Principia*: «La justificación de este principio es puramente pragmática: lleva a los resultados deseados y a ningún otro. Pero es claro que no es la clase de axioma del cual podamos estar satisfechos.».[13]

Otro aspecto polémico de los *Principia* es que la deducción de la matemática a partir de la lógica tiene como base una axiomática intuitiva, de la que se espera que sus axiomas sean creídos o al menos aceptados como hipótesis plausibles acerca del mundo. Esta manera de tratar a la lógica iba en la dirección contraria a la de Hilbert, a cuyos ojos constituía un regreso a usanzas ya superadas.[14] Una dificultad que asoma de inmediato es la siguiente: ¿sobre qué base se debería creer en el axioma de reductibilidad? Si las propiedades se construyen (como lo establece la teoría de tipos), entonces la cuestión de la existencia de una propiedad de primer orden equivalente a una propiedad dada se debería decidir en términos de construcciones, no mediante un axioma.

[12] Por ejemplo, los números reales, en tanto que conjuntos de números racionales, serían de un tipo superior al de los números racionales y éstos a su vez lo serían en relación a los números enteros y naturales. No obstante, en el análisis matemático estos objetos se consideran como de un mismo nivel, de ahí la necesidad del axioma, que garantizaría la existencia de una propiedad equivalente a aquella que define a los números reales, pero de primero orden, con lo que todos estos números se hallarían entre los objetos básicos.
[13] *Op. cit.*, Introducción, p. XIV.
[14] Al respecto, véase la sección 1.5.3 en relación al punto de vista de Hilbert.

Es más, no sólo el axioma de reductibilidad fue objeto de críticas. Al referirse al *axioma del infinito* (afirmación de la existencia de una infinidad de individuos), Cavaillès observa que este axioma también rebasa el ámbito de la lógica, pues se trata de una proposición sintética que el mismo Russell reconoce como una hipótesis, no como el enunciado de una propiedad objetiva.[15] En efecto, en un pasaje de su libro *Introduction to Mathematical Philosophy*, Russell afirma que «No se puede decir que es algo *seguro* que hay de hecho algunas colecciones infinitas en el mundo. La hipótesis de que las hay es lo que llamamos "axioma del infinito".»,[16] y más adelante agrega: «Podemos considerar el axioma del infinito como un ejemplo de proposición que, aunque se puede enunciar en términos lógicos, la lógica no la puede afirmar como verdadera. Todas las proposiciones de la lógica tienen la característica que solíamos expresar diciendo que eran analíticas o que sus contradictorias eran autocontradictorias.».[17] Junto a este pragmatismo que les permite alcanzar la teoría de los números reales o introducir colecciones infinitas, Russell y Whitehead hacen gala de un realismo semejante al de Frege, en el que, como dice Cavaillès, «las construcciones lógico-simbólicas (como aquellas en las que intervienen conjuntos y números) no son sino los medios para describir las relaciones entre objetos (relaciones) que existen en sí, independientemente de aquéllos.»[18]

Al respecto Hermann Weyl (1885-1955) hace el comentario de que en el sistema de *Principia Mathematica*, la matemática no se funda sobre la lógica, sino en una especie de paraíso para el lógico[19] y señala que quien esté dispuesto a creer en este *mundo trascendente* podría igualmente aceptar el sistema axiomático de la teoría de conjuntos (por ejemplo, ZFC) que, para la deducción de la matemática, tiene la ventaja de ser más simple en su estructura.

Si bien *Principia Mathematica* fue una fuente inagotable de conceptos y recursos simbólicos, es innegable que su publicación marcó el inicio del declive del proyecto de fundamentación russelliano. Es un hecho que en el transcurso de la segunda década del siglo veinte el mando en las investigaciones en torno a los fundamentos de la matemática pasó a manos de Hilbert, de cuya actividad en esta área se habían de derivar directamente los desarrollos subsiguientes. Una de las razones del debilitamiento del logicismo fue que la solución que ofrecía al problema de los fundamentos no era plenamente satisfactoria. Por

---

[15] Cf. Cavaillès, 1938, página 62 de la traducción al español. El axioma del infinito afirma la existencia de un conjunto inductivo, es decir, de un conjunto no vacío X con la siguiente propiedad: si $x \in X$, entonces $\{x\} \in X$. Por su misma naturaleza, todo conjunto inductivo es infinito.

[16] Russell, 1919, p. 131.

[17] Russell, *op. cit.* pp. 202-203.

[18] Cavaillès, 1938, p. 62.

[19] Cf. Weyl, 1949, pp. 267-268 de la traducción al español.

ejemplo, en su contra se argumentaba que si bien las paradojas conocidas de la teoría de conjuntos quedaban eliminadas mediante la teoría de tipos, no había garantía alguna de que no surgirían nuevas antinomias en el futuro. Obviamente la sola eliminación de las paradojas ya conocidas no constituía un resguardo seguro para la matemática. Como vimos, para Hilbert tal resguardo sería una prueba de consistencia absoluta, para lo cual no era necesario suponer la existencia de tales "paraísos lógicos"; en esto, los seguidores del formalismo eran refractarios a toda clase de suposiciones metafísicas, razón por la cual esta corriente tuvo una mayor aceptación entre los matemáticos.

Para concluir diremos que en la obra de Russell y Whitehead debemos distinguir dos aspectos: uno es la forma específica en que pretenden fundamentar la matemática; el otro es la idea (reduccionista) de que la matemática es parte de la lógica. Si bien el sistema de Russell y Whitehead no estuvo a la altura de las expectativas y en la práctica fue ignorado por los matemáticos, de la tesis logicista no podemos decir lo mismo: años más tarde un grupo de filósofos y científicos reunidos en torno a la figura de Moritz Schlik, profesor de la Universidad de Viena, le dio vida nuevamente, esta vez desde una postura antimetafísica y empirista. Al grupo se le conoció como Círculo de Viena y en él participaban, entre otros, Hans Reichenbach, Hans Hahn (asesor de Gödel en su trabajo doctoral) y Rudolf Carnap.[20]

---

[20] Consúltese, por ejemplo, Reichenbach, 1951 para una clara exposición de esta postura.

3.3 El intuicionismo de Brouwer

El *intuicionismo* matemático fue la respuesta de Brouwer al logicismo, a la matemática no constructiva y a las paradojas, y se apoya en tres tesis radicales: i) los objetos matemáticos se construyen directamente en la intuición pura, siendo por ello previos al lenguaje y a la lógica; ii) las leyes que rigen el comportamiento de dichos objetos se derivan de su construcción, no de la lógica, como pretenden Russell y los logicistas[1] y iii) en la matemática no es admisible ninguna teoría que rebase el marco de lo dable en la intuición, como sostienen Hilbert y los cantorianos.

En el umbral de la matemática intuicionista se encuentran los números naturales, más allá de los cuales la intuición no puede ir. Estos números no se deducen lógicamente (logicismo) ni se postulan (formalismo), sino que se construyen de inmediato en la mente del matemático y la verdad de sus enunciados se basa en la evidencia intuitiva.[2] De ellos se parte para construir el resto del edificio.[3] Asimismo, dado que los objetos matemáticos deben estar presentes como algo dado en la intuición o construirse a partir de aquello que así se ofrece, Brouwer tiene como norma que toda definición ha de ser constructiva, es decir, ha de indicar la manera en que los objetos definidos se pueden obtener de manera efectiva.[4] En cuanto a la noción de *construcción mental*, ésta no puede explicarse a través de conceptos que le sean más simples; es, en este sentido, primigenia.[5] Dice Dummett:

> El nombre de "intuicionismo" se debe a la aceptación por parte de Brouwer de la tesis kantiana de que nuestro concepto de la sucesión de los números naturales se deriva de la intuición temporal, de nuestra aprehensión del paso del tiempo; es decir, no se deriva de detalles cualesquiera de nuestra experiencia, sino de la forma *a priori* de dicha experiencia en tanto que incluye el suceder temporal. (Brouwer rechazó la tesis kantiana complementaria de que la geometría se basa en nuestra intuición *a priori* del espacio; en esto, fue una imagen especular de Frege, que aceptó la tesis kantiana acerca de la intuición espacial, pero negó la relativa a la intuición temporal). Por muy

---

[1] En síntesis: no es la lógica sino la intuición lo que determina la corrección matemática.

[2] Esta evidencia intuitiva no hace referencia a hechos externos de ninguna especie. En este sentido el intuicionismo considera que la matemática es una libre creación del espíritu humano, y que su única limitante es la posibilidad de la construcción. De hecho, esta corriente tiene fuertes vínculos con el constructivismo matemático, aunque este último no asume necesariamente sus supuestos filosóficos.

[3] A Kronecker se le atribuye la siguiente frase, que resume muy bien esta postura: «Dios hizo los números enteros; el resto es obra del hombre.» [Nota. Esta afirmación no se halla en ningún escrito de Kronecker, pues según dicen se trata de un comentario de sobremesa. No obstante, si hacemos a un lado la alusión a un Dios, la afirmación expresa muy bien el sentir de los intuicionistas respecto a la naturaleza de la matemática y por ello la hemos incluido.]

[4] Como es evidente, esta dirección se nutre del pensamiento de Kronecker y del empirismo francés ya referidos en estas páginas, y que se manifiesta, por ejemplo, en la polémica de Poincaré con Russell y Hilbert. Cf. [Poincaré, 1908.]

[5] En todo caso, Brouwer considera que la descripción y estudio de esta actividad constructiva del espíritu, que él identifica con la parte exacta del pensamiento humano, no es parte de la matemática, sino que se desarrolla en un plano extramatemático o, si se quiere, filosófico, y la obscuridad o vaguedad de los conceptos que se utilizan para describirla no invalida la claridad de su matemática.

importante que parezca esta idea para Brouwer, no es en modo alguno esencial para aceptar la concepción intuicionista de la aritmética. Lo que es fundamental es considerar los números naturales como construcciones mentales, generados de una manera específica mediante la aplicación reiterada de la operación sucesor a 0.[6]

De lo anterior se desprende que el intuicionismo de Brouwer comprende dos cuestiones en cierto sentido complementarias. Una es su base filosófica, que encuentra sus raíces en la filosofía de Kant y la otra es la peculiar reconstrucción que hace de la matemática, comenzando por la aritmética.[7]

Para adentrarnos directamente en la polémica con Hilbert, lo más conveniente es enunciar de manera sucinta algunas ideas de Brouwer sobre la matemática clásica y la manera en que considera se le debe rehacer. Si se tiene presente que para él la matemática es ante todo una actividad constructiva del intelecto humano y que sus métodos y procedimientos se han de supeditar a la posibilidad misma de la construcción, las siguientes conclusión extraídas de sus escritos se explican por sí mismas:

1) La aritmética no se puede justificar mediante una fundamento axiomático, pues la intuición precede a dicha estructura. La inducción matemática es una intuición fundamental, no sólo un axioma.
2) La matemática debe proveer métodos y criterios constructivos para determinar en un número finito de pasos los objetos con los que trata. Toda prueba debe ser constructiva.
   En particular, dado que el infinito actual no tiene un fundamento constructivo, tampoco tiene cabida en la matemática. Sólo se admite el infinito en potencia.
3) Toda definición debe permitir la construcción del objeto definido con cualquier grado de precisión; los objetos se deben definir mediante procedimientos finitos y verificables.
   En particular, las definiciones impredicativas no son válidas.
4) La existencia de los objetos matemáticos depende de la posibilidad de construcción de los objetos mismos; por tanto, "existen" sólo aquellos seres matemáticos que son construidos.
   En particular, el axioma de elección es inaceptable: los objetos por él introducidos no satisfacen la exigencia de ser el resultado de una construcción.

---

[6] Dummett, 1977, p. 32.

[7] La concepción de Brouwer se halla dispersa en múltiples ensayos de diferente contenido, unos de carácter técnico, otros de carácter filosófico, muchos de ellos polémicos, y no fue sino hasta la aparición de los trabajos de Arend Heyting (1898-1980), una de las figuras rectoras de esta escuela a partir de los años treinta, que estos temas fueron expuestos de manera sistemática (véase sobre todo [Heyting, 1956], donde se expone de manera ordenada la reconstrucción intuicionista de la matemática). En la actualidad se cuenta con algunos textos que abordan el tema de la filosofía y a la matemática intuicionista de manera mucho más accesible; uno de ellos, quizá el más sencillo y recomendable, es el libro recién citado, *Elements of Intuitionism* de Michael Dummett (v. Dummett, 1977).

Junto con la condena del infinito actual, otro de los temas centrales de la crítica de Brouwer fue la exclusión de las pruebas de existencia por reducción al absurdo, pues en ellas no se indica la manera de construir el objeto. Esto trajo como consecuencia la restricción del principio del tercero excluido —sobre el que se basan estas pruebas— a los conjunto finitos. De ahí la siguiente tesis:

5) El principio del tercero excluido no siempre es válido en relación a proposiciones en las que se hace referencia a conjuntos infinitos.

Como se ve, Brouwer se arroga la tarea de hacer a un lado toda la matemática existente para edificarla de nuevo, esta vez utilizando sólo conceptos y modos de inferencia con una clara justificación intuitiva, postura que a los ojos de la mayoría de los matemáticos constituye un exceso. En el punto de partida ni siquiera la lógica está prejuzgada; más bien, los principios lógicos se habrían de esclarecer una vez avanzado lo suficiente el programa de reconstrucción y sólo entonces se podría comparar la lógica intuicionista con la clásica (cosa que hicieron, en gran medida, Heyting y Gödel, entre otros). En lo que sigue examinaremos con mayor detenimiento el problema del tercero excluido, de vital importancia para Hilbert.

3.3.1 El principio del tercero excluido

En 1908 Brouwer publicó un trabajo titulado *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (La inseguridad de los principios de la lógica)[8] en el que pone en duda la creencia de que los principios de la lógica clásica tienen una validez absoluta, sin tomar en cuenta el dominio en el que se les aplica. Su crítica se centra primordialmente en el uso que se le da al *principio del tercero excluido* en relación a totalidades infinitas. Desde su punto de vista la extensión de algunos principios lógicos al dominio de los conjuntos infinitos es ilegítima, y como prueba aduce la aparición de las antinomias: si éstas se han producido es porque, ciegamente, se siguen aplicando las reglas de la lógica clásica a los conjuntos infinitos, siendo que éstas nacieron de la matemática de conjuntos finitos:

> Además, la función de los principios lógicos no es la de dirigir los razonamientos matemáticos aplicados a las realidades empíricas, sino describir, en el lenguaje de los razonamientos, las regularidades que han sido observadas. Si uno se expresa en el lenguaje siguiendo dichas regularidades y pierde el contacto con los sistemas matemáticos, corre el riesgo de caer en paradojas como la de Epiménides.[9]

[8] *V.* Brouwer, 1908.
[9] Brouwer, 1908. Cita tomada de Largeault, 1992, p. 19.

Para Brouwer, la matemática no está obligada a respetar ningún principio lógico con anterioridad a su desarrollo —no hay principios lógicos *a priori*—, pues es la intuición, no la experiencia, la que determina la validez y admisibilidad de las ideas.[10]

Quizá un par de ejemplos nos ayuden a aclarar esta cuestión. El primero es el siguiente. Todos conocemos el principio de que *el todo es mayor que la parte*, cuyo origen se remonta a la matemática de los conjuntos finitos.[11] Como hemos visto, este principio deja de ser válido en el dominio de las totalidades infinitas si por «conjuntos de igual magnitud» entendemos «conjuntos cuyos elementos se pueden poner en correspondencia uno a uno». Así, por ejemplo, el principio no se cumple en relación a los números naturales y los números cuadrados, como lo descubriera Galileo en 1638 (véase el apéndice 7).

Si bien hoy en día no se considera el principio anterior como parte de la lógica, éste ilustra a la perfección lo que queremos decir: que algunos principios considerados por un largo tiempo como universales, pueden muy bien no ser válidos en algún dominio. Es en este sentido que se pone en duda la validez del *principio del tercero excluido*, cuyo uso en la matemática debemos aclarar. En su forma general se le puede enunciar como sigue:

> **Principio del tercero excluido.-** Para toda proposición P, o P es verdadera o su negación $\neg P$ es verdadera, no habiendo una tercera posibilidad frente a estas dos; en símbolos: $P \vee \neg P$.[12]

El rechazo de este principio supone una lectura distinta de la negación. Para Brouwer, una expresión como «$\neg P$» se lee «es absurdo que P» o «es contradictorio que P». Desde este punto vista, los enunciados $\neg\neg P$ y P no son necesariamente equivalentes, pues en el primer caso lo que se tiene es la afirmación de que es absurdo que sea absurdo que P, lo cual no significa que P, ya que esta última afirmación debería estar respaldada por una construcción. Por ejemplo, puede ser el caso que $\neg\neg P$ se haya obtenido suponiendo $\neg P$ y derivando de ahí una contradicción, en cuyo caso no se cuenta con una construcción. Así, el principio del tercero excluido no es considerado como una ley universal, al no cubrir $P \vee \neg P$ todas las

[10] No podemos examinar en plenitud las ideas de Brouwer acerca de la lógica y la matemática en general, pues ello supone un trabajo de mayor o igual extensión que el presente. Por el contrario, nos habremos de limitar a aquellos aspectos relacionados con el programa y la concepción que Hilbert tiene de la matemática, aunque la imagen transmitida de su pensamiento sea muy esquemática y quizá distorsionada. Al respecto, una dificultad que hay que enfrentar es el peculiar estilo de exposición de Brouwer, un tanto oscuro en ocasiones, y el hecho de que la matemática que propone es "otra matemática", con resultados radicalmente distintos de aquellos de la matemática clásica, y un lenguaje y conceptos propios que en ocasiones no comparte con esta última.

[11] Como sabemos, Euclides incluye este principio como una *noción común* en los *Elementos* (v. sección 1.1.2).

[12] El otro principio tradicional de la lógica clásica es el *Principio de no contradicción*: para toda proposición P, es imposible que P y $\neg P$ sean ambas verdaderas; en símbolos: $\neg(P \wedge \neg P)$.

posibilidades: el que $\neg P$ sea contradictorio no garantiza que se pueda respaldar P con una construcción.[13]

Brouwer también rechaza la *demostración por reducción al absurdo* cuando se trata de probar la existencia de un objeto matemático en relación a una totalidad infinita. Para entender este rechazo consideremos un conjunto C, una propiedad $A(x)$ aplicable a los elementos de C y la proposición que afirma que algún elemento de C tiene la propiedad A (es decir, la proposición $\exists x A(x)$). En este caso el principio del tercero excluido aplicado a A da como resultado $\exists x A(x) \vee \neg\exists x A(x)$.

Supongamos que la propiedad A es *decidible*, es decir, que para cada elemento de C se puede determinar de manera efectiva si la propiedad se cumple o no para él.

Si el conjunto C es finito, el principio establece un hecho inobjetable: examinando uno tras otro los elementos de C o bien encontraremos un miembro de él que tiene la propiedad A, en cuyo caso se cumplirá la alternativa $\exists x A(x)$, o bien comprobaremos que ningún miembro de C tiene dicha propiedad, en cuyo caso se cumplirá la alternativa $\neg\exists x A(x)$. Por tanto, a pesar de las dificultades que pudiera ofrecer, la tarea de verificar si algún elemento de C tiene la propiedad A es en principio realizable. Es por ello que Brouwer considera que la ley del tercero excluido es válida para toda propiedad decidible en relación a un conjunto finito.[14]

Pero ¿podríamos decir lo mismo en el caso de los conjuntos infinitos? Supongamos que C es infinito. Si bien aun podemos decidir para cada elemento de C si la propiedad A se cumple o no para él, en este caso estamos impedidos de revisar *todos* los elementos de C en busca de uno que sí la tenga, pues esto implica un búsqueda infinita; en otra palabras: puede

[13] En realidad, Brouwer no afirma que el principio del tercero excluido siempre falla, sino que puede fallar en presencia de un conjunto infinito. Por ejemplo, dado un par de números enteros h y k, siempre se puede decidir si $h = k$ o si $h \neq k$. Por tanto, en relación al acto de comparar entre sí números enteros podemos decir que el principio es válido, y escribir:

Si h y k son número enteros, entonces $h = k \vee \neg(h = k)$

Sin embargo, en el caso de los números reales cabe la posibilidad de definir de manera aceptable para el intuicionismo dos números que no se pueden comparar, pues para ello habría que conocer un número infinito de dígitos de su expansión decimal. Por tanto, en relación a la igualdad de los números reales no podemos afirma la validez del principio del tercero excluido (en el apéndice **10** se expone un tercer argumento en contra de este principio).

De hecho, es en el terreno de la teoría de los números reales, y por consiguiente del análisis, donde Brouwer diverge de manera esencial de la teoría clásica, mientras que en la esfera de los números enteros la aritmética que propone es una parte propia de la aritmética clásica. La prueba de este hecho se encuentra en [Gödel, 1932].

[14] *V.* Brouwer, 1923, en Heijenoort, 1967, p. 336. Al respecto, Brouwer concluye que también la ley de la doble negación se cumple en relación a los conjuntos finitos: $\neg\neg A \rightarrow A$ (idea que él expresa en otro lenguaje, y con otros conceptos, bajo el nombre de *principio de la reciprocidad de las especies complementarias*: «es decir, el principio de que para cada sistema, la correctud de una propiedad se sigue de la imposibilidad de la imposibilidad de esa propiedad.». La cita corresponde al mismo lugar.

suceder que por más que alarguemos la búsqueda, sigamos sin encontrar un elemento de C con tal propiedad, sin que por ello estemos autorizados a decir que no lo hay (quizá no hemos ido suficientemente lejos en la búsqueda), ni a decir que sí lo hay (pues no conocemos ninguno que la tenga). En tal caso, dice Brouwer, no podemos afirmar la alternativa que ofrece el principio del tercero excluido, pues tal afirmación no está respaldada por una construcción o por una revisión exhaustiva.[15]

Claro está que un cantoriano diría que esto último es en cierto sentido irrelevante, pues o sucede que *hay* un elemento de C con la propiedad A, en cuyo caso se cumple la alternativa $\exists x A(x)$, o sucede que *no hay* tal elemento, en cuyo caso se cumple la alternativa $\neg\exists x A(x)$. No obstante, para Brouwer el sentido que los cantorianos le dan a los términos «hay» y «no hay» es equívoco, pues en su uso dan a entender que el conjunto C simplemente "está ahí", en espera de que las propiedades de sus elementos sean descubiertas y que en él se encuentran o no objetos con la propiedad A, independientemente de que los conozcamos. Hablar así, diría, es platonismo puro, como si el conocimiento matemático fuera acerca de entidades que tienen una existencia autónoma, y no acerca de construcciones mentales.[16]

La reducción al absurdo. Veamos cómo se puede demostrar en la matemática clásica un teorema existencial de la forma $\exists x A(x)$ con base en el principio del tercero excluido. El método es el de *reducción al absurdo*, que consiste en suponer como hipótesis la negación de lo que se quiere demostrar —en este caso la hipótesis $\neg\exists x A(x)$— y deducir de ella una contradicción, es decir, una proposición de la forma $Q \wedge \neg Q$.

Supongamos que tal ha sido el caso, y que de $\neg\exists x A(x)$ se ha deducido $Q \wedge \neg Q$. Como la conclusión alcanzada va en contra del principio de no contradicción (véase la nota al pie número 12), la hipótesis $\neg\exists x A(x)$ se rechaza, y es entonces que entra en escena el principio del tercero excluido. De la alternativa

$$\exists x A(x) \vee \neg\exists x A(x)$$

[15] Un ejemplo concreto es el siguiente: en la terminación decimal de π ¿aparece el dígito 5 diez veces seguidas, es decir, en forma consecutiva? Es, desde luego, concebible que así sea, pero, para poder afirmar que tal es el caso, habría que decir cómo encontrar dicha sucesión y esto es, precisamente, lo que no sabemos hacer. La otra alternativa desde el punto de vista clásico es demostrar, por reducción al absurdo, que tal sucesión existe, procedimiento inaceptable para el intuicionismo. Ello se debe a la imposibilidad de aludir a la ley del tercero excluido, que impone uno de los términos de una alternativa aunque se ignore cuál de ellos es el verdadero, en un dominio en que no se puede alcanzar una u otra conclusión en un número finito de etapas.

[16] En realidad, la crítica de Brouwer nos brinda la ocasión de entender, por contraste, lo proclive que es la matemática clásica al platonismo (al postular, como lo hacen Hilbert y Zermelo, ciertas entidades primitivas de las que se exige satisfagan ciertos axiomas), así como el carácter no constructivo de la matemática hilbertiana, donde la existencia se identifica con la no contradicción, una noción de existencia un tanto inusual.

sabemos que el término de la derecha es imposible, por lo que gráficamente tenemos la siguiente situación:

$$\exists x A(x) \vee \cancel{\neg \exists x A(x)}$$

Como se ve, la única posibilidad restante es la proposición $\exists x A(x)$, que así queda demostrada. La objeción de Brouwer es obvia: ¿cómo decir que un objeto *existe* sin haberlo construido o sin saber cómo se le puede construir? En casos como éste la reducción al absurdo lo que produce es una contradicción, no un objeto, y esto en nada se parece a una construcción.[17] Dice Brouwer:

> A las leyes de la lógica teórica, incluyendo el principio del tercero excluido, se les adscribió con tal persistencia un carácter *a priori*, que hasta hace poco fueron aplicadas sin reserva incluso en la matemática de los sistemas infinitos, esto sin que nos preocupara la cuestión de que los resultados así obtenidos no están abiertos, tanto teórica como prácticamente, a ninguna corroboración empírica en general. Sobre esta base se construyeron extensas teorías incorrectas, especialmente en el último medio siglo.[18]

Años más tarde Brouwer se referiría satíricamente a la aceptación del principio del tercero excluido con las siguientes palabras: «La larga creencia en la validez universal del principio del tercero excluido en matemáticas es considerada por el intuicionismo como un fenómeno en la historia de la civilización del mismo tipo que la antigua creencia en la racionalidad de π o en la rotación del firmamento en torno a un eje que pasaba por la Tierra.»[19]

Si bien la crítica de Brouwer a las leyes de la lógica clásica es mucho más compleja de lo que hemos expuesto, con lo dicho debe quedar claro que la aceptación de su propuesta equivalía a suprimir partes considerables de la matemática clásica, tributo que Hilbert no estaba dispuesto a pagar.[20] Para él, el método de prueba por reducción al absurdo es una

[17] En efecto, una demostración constructiva de la existencia de un objeto matemático sería la construcción de un ejemplo tangible del mismo, mientras que una demostración no constructiva consistiría en probar que su no existencia nos llevaría a una contradicción. En el primer caso tendríamos un objeto tangible, mientras que en el segundo no. En el análisis clásico son muy frecuentes las pruebas no constructivas o *indirectas*, muchas de las cuales, por su misma naturaleza, no se pueden convertir en demostraciones directas. Tal es el caso, por ejemplo, del teorema del valor medio. Dada la función *exp(sen x)* y el intervalo $[\pi, \pi^{\pi}]$, ¿Cual es el valor medio en este caso?.

Por otra parte, cabe señalar que el intuicionismo sí acepta el método de reducción al absurdo para demostrar la inexistencia de un objeto, es decir, para demostrar un enunciado de la forma $\neg\exists x A(x)$ (v. apéndice 11).

[18] Brouwer, 1923. Cita tomada de Heijenoort, 1967, p. 336. Obviamente, Brouwer se está refiriendo a la teoría cantoriana de conjuntos.

[19] Brouwer, 1948. Cita tomada de Benacerraf, 1964, p. 82.

[20] En 1927 Hilbert se refiere a la propuesta de Brouwer con las siguientes palabras: «Quitar al matemático el principio del tercero excluido sería lo mismo, digamos, que prohibir al astrónomo el uso del telescopio o al boxeador que use sus puños. Prohibir los enunciados [puramente] existenciales y el principio del tercero excluido es equivalente a renunciar a la ciencia matemática por completo.» [Hilbert 1927, p. 476].

conquista irrenunciable, y basta con demostrar que una proposición de la forma $\neg\exists x A(x)$ implica contradicción para asumir la existencia de una entidad matemática con la propiedad A (pues se tiene que $\neg\neg\exists x A(x)$ es equivalente a $\exists x A(x)$).

3.3.2 Comentarios generales

La matemática intuicionista es una dirección firmemente establecida hoy en día, con una propuesta original que la aleja de la forma habitual de "hacer matemáticas" y con ideas y resultados que le son propios. Para concluir esta sección queremos insistir en algunos aspectos de esta tendencia, sobre todo en relación a los fundamentos de la matemática, esfera en la que ha ejercido una considerable influencia.

1) El rechazo del principio del tercero excluido por parte del intuicionismo implica a su vez el rechazo de la ley de la doble negación, que podemos formular así: *de la doble negación de una proposición se sigue la proposición misma* (en símbolos: $\neg\neg P \rightarrow P$). En la formalización de la lógica intuicionista que hiciera Arend Heyting, ninguna de dichos principios (que son equivalentes) es deducible en el sistema. De hecho, la lógica proposicional intuicionista se puede describir como la lógica proposicional clásica sin el principio aristotélico del tercero excluido, pero con la ley de contradicción, expresada por la fórmula $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$: de una proposición y su negación se sigue cualquier cosa.

2) Otra de las razones por las que Brouwer rechaza el principio del tercero excluido es que en su opinión asumirlo equivale a suponer que todo problema matemático tiene solución, lo cual le parece inadmisible:

> Consideremos el principio del tercero excluido: éste exige que toda hipótesis sea matemáticamente verdadera o no verdadera: que para cada supuesto acoplamiento de sistemas bien determinados uno respecto al otro, esta construcción o bien puede ser llevada a término o bien es imposible llevarla a cabo. La cuestión de la validez del principio del tercero excluido equivale entonces a la de la posibilidad de problemas matemáticos no resolubles. En cuanto a la convicción a veces expresada de que no hay ningún problema matemático no resoluble, no existe a la fecha ni la sombra de una prueba de tal hecho.[21]

Las últimas palabras están dirigidas a Hilbert, quien en 1900, en la misma ocasión en que propusiera su famosa lista de 23 problemas, había proclamado su convicción de que todo problema matemático es resoluble, renovando con ello una esperanza epistemológica: la de la inexistencia de límites para la razón matemática.

---

[21] Brouwer, 1908. Cita tomada de Largeault, 1992, p. 21.

En efecto, en su discurso ante el pleno del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas de 1900, y tras una larga reflexión en torno a la importancia de ciertos problemas para el avance de la matemática (en la que alaba el espíritu matemático que no se arredra ante ellos), Hilbert concluye con las siguientes palabras:

> Sin importar cuan intrincados nos puedan parecer estos problemas ni cuan desvalidos nos sintamos ante ellos, tenemos, no obstante, la firme convicción de que su solución se habrá de obtener mediante un número finito de procesos puramente lógicos. [...] Esta convicción sobre la resolubilidad de todo problema matemático es un poderoso incentivo al investigador. Escuchamos dentro de nosotros el canto imperecedero: he ahí un problema, busca su solución. La podrás encontrar con el razonamiento puro, pues en matemáticas no hay *ignorabimus*.[22]

Hilbert utiliza la expresión «ignorabimus» en alusión a Emile Du Bois-Reymond (1818-1896), quien al abordar el problema de la existencia de límites en el conocimiento de la naturaleza, sostiene que hay problemas (llamados por él *trascendentales*) que son irresolubles, incluso de principio. Estos problemas incluyen el de la naturaleza de la materia y la fuerza, y los relacionados con el origen del movimiento, la sensación y la conciencia. Su desalentadora frase «*Ignoramus et ignorabimus*» —Ignoramos e ignoraremos—, fue la divisa de muchos científicos y filósofos en los años 1880 y a los ojos de Hilbert se trata de una aberración, por lo menos en el dominio de la matemática. En su opinión, todo problema en esta esfera es susceptible de un análisis exhaustivo, ya sea en la forma de una respuesta concreta a la pregunta planteada, ya mediante una prueba de la imposibilidad de tal solución y del fracaso inevitable de todos los intentos por resolverlo (lo cual sería una respuesta negativa al problema, pero una respuesta al fin). Esta convicción lo acompañó durante toda su vida, al punto de que una parte importante de su programa consiste en lograr una prueba de ello.[23]

Es sorprendente que Brouwer, casi un cuarto de siglo antes de la aparición de los teoremas de Gödel, negara tal posibilidad, aunque sobre una base distinta: para él, demostrar que es absurdo suponer que una construcción es imposible (es decir, probar la

---

[22] *Ignorabimus*: ignoraremos (en latín en el original). Hilbert, 1900. Cita tomada de la pág. 7 de la traducción inglesa.

[23] En 1930 Hilbert volvió a esta cuestión, al señalar que no hay tal cosa como un problema irresoluble, no sólo en la matemática sino en la ciencia en general. Dice: «En un esfuerzo por dar un ejemplo de un problema irresoluble, el filósofo Comte dijo en una ocasión que la ciencia nunca tendría éxito en revelar el secreto de la composición química de los cuerpos en el universo. Uno cuantos años más tarde éste problema fue resuelto. [....] A mi parecer, la verdadera razón de por la cual Comte no pudo encontrar un problema irresoluble radica en el hecho de que no hay tal cosa como un problema irresoluble. En lugar del necio *Ignorabimus*, nuestra respuesta es la contraria: Debemos saber, sabremos.». [Hilbert, 1930. Cita tomada de Ewald, 1966, p. 1165.] En lo que pareciera una mala pasada del destino, Hilbert hizo esta afirmación justo en el lugar y el momento en que un joven académico austriaco de 25 años de edad, de nombre Kurt Gödel, anunciaba sus ahora célebres teoremas limitativos, que significarían un duro revés a esta creencia. A la cita anterior habremos de volver posteriormente, para contemplarla desde una perspectiva más amplia.

negación de la negación de una proposición *P*), no significa que tal construcción sea realizable. Por el contrario, para afirmar que una construcción es operable el único camino es llevarla a cabo, y la reducción al absurdo no otorga ninguna garantía de esto último.

3) Como hemos visto, Brouwer considera que una de las causas de la aparición de antinomias en la teoría de conjuntos es el mal uso de algunos principios lógicos. Al respecto dice lo siguiente: «La lógica clásica fue abstraída de la matemática de conjuntos finitos y, desatenta a su humilde origen, creyó que estaba por encima de toda la matemática, y se aplicó, sin justificación alguna, a la matemática de los conjuntos infinitos. Ésta es la caída y el pecado original de la matemática por el que fue justamente castigada por las antinomias.»[24] Ciertamente, la matemática clásica otorga validez universal a los principios de la lógica, y se apoya en ellos de manera decidida para extender el conocimiento. En franca oposición a esta postura se encuentra el intuicionismo, que sostiene que al trabajar en un campo completamente nuevo, sobre todo donde intervienen magnitudes infinitas, no se puede estar seguro de que todavía se aplicarán los principios de la lógica tradicional, debiéndose en tales casos encontrar la lógica apropiada abstrayendo los patrones lógicos observables. Por tanto, restringe el empleo de los principios lógicos a aquellas áreas donde han probado su validez.

4) Brouwer también relaciona el origen de las antinomias con los principios de la teoría cantoriana de conjuntos, por lo que la rechaza por completo. Su principal objeción es que en esta teoría se alude a nociones que no se pueden construir en la intuición, como es el caso del infinito actual. En 1912 se refiere a esta teoría con las siguientes palabras:

> En el dominio de los conjuntos finitos, en el que los axiomas formalistas tienen una interpretación perfectamente clara para los intuicionistas, hay un franco acuerdo entre las dos tendencias en los resultados, mas no en los métodos; no obstante, esta situación cambia de raíz en el dominio de los conjuntos infinitos o transfinitos, donde, principalmente con la aplicación del axioma de inclusión,[25] [...] los formalistas introducen varios conceptos sin ningún significado para el intuicionista, como, por ejemplo, "*el conjunto cuyos elementos son los puntos del espacio*", "*el conjunto cuyos elementos son las funciones continuas de una variable*", "*el conjunto cuyos elementos son las funciones discontinuas de una variable*", etc. En el curso de estos desarrollos formalistas resulta que la aplicación sostenida del axioma de inclusión conduce inevitablemente a contradicciones. Un claro ejemplo de este hecho es la llamada paradoja de Burali-Forti.[26]

---

[24] Brouwer, 1908. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 110.
[25] Brouwer se refiere bajo esta denominación al principio de comprensión, expuesto en el apéndice 8 de este texto.
[26] Brouwer, 1912. Cita tomada de Benacerraf, 1964, pp 71-72.

Más adelante, al referirse a la forma en que Zermelo enuncia el principio de comprensión en su teoría axiomática (bajo el nombre de *axioma de separación*, véase el apéndice **8**), añade:

> De esta manera el axioma [de separación] permite sólo la introducción de conjuntos que sean subconjuntos de conjuntos previamente introducidos; si uno desea operar con otros conjuntos, su existencia debe ser postulada explícitamente. No obstante, puesto que para llevar a cabo cualquier cosa se debe postular desde un inicio la existencia de cierta colección de conjuntos, el único argumento válido que se puede esgrimir en contra de la introducción de un nuevo conjunto es que éste conduzca a contradicciones; en realidad, la única modificación a que ha dado lugar el descubrimiento de paradojas en la práctica del formalismo ha sido la abolición de aquellos conjuntos que dan lugar a ellas. Se sigue operando sin cuidado sobre la base del viejo axioma de inclusión; el resultado es que amplios sectores de investigación, carentes de significado para el intuicionismo, sieguen tendiendo un considerable interés para el formalismo. Un ejemplo de ello es la teoría de potencias [la aritmética cardinal].[27]

Este rechazo, junto con el de las definiciones impredicativas y aquellas proposiciones en que intervienen conjuntos o sucesiones infinitas consideradas como un todo, resulta en un final desolador para los defensores de la matemática clásica: una rigurosa aplicación de los principios propuestos por Brouwer conducía directamente al abandono de partes considerables de la misma. En particular, resultaría imposible la construcción del continuo numérico tal como lo hace Dedekind.

5) En la matemática clásica la noción de consistencia tiene precedencia sobre la noción de construcción, haciendo que las cosas "existan" incluso cuando no las podemos ver o exhibir. Por el contrario, en la matemática intuicionista la noción de construcción tiene prioridad sobre la noción de consistencia, de modo que algunos enunciados pueden quedar sin decidir, quizá por siempre, a causa de la imposibilidad de llevar a cabo una construcción.[28] Lo que está en juego no es la matemática, sino el significado de la palabra «existencia» en un sentido matemático. En este sentido, Hilbert identifica el dominio de lo "existente" con el dominio de lo posible; mas como la posibilidad de un concepto depende de la no contradicción, lo que en realidad hace es colocar los principios de la lógica tradicional como base de la noción de existencia matemática; Brouwer por su parte se abstiene de estudiar objetos cuya existencia no es un hecho en el dominio de la intuición pura.

6) A diferencia de la matemática clásica, el intuicionismo interpreta los conectivos lógicos como instrucciones sobre cómo lograr una prueba constructiva de todo enunciado que los

[27] Brouwer, *op. cit.*, p. 73.
[28] *Grosso modo*, la matemática constructiva es aquella que no rebasa los límites que nos impone la experiencia.

comprenda. Por ejemplo, un enunciado como $\neg P$ se entiende como la afirmación de que «la construcción referida en P no da el resultado esperado», es decir, como la afirmación de una imposibilidad, a la que se refiere comúnmente hablando de lo absurdo que resulta P, o bien como una construcción hipotética que desemboca en una contradicción.

Para entender correctamente esta interpretación, recordemos que la lógica intuicionista sólo alude a razonamientos o experiencias mentales, afirmando que ciertas construcciones se pueden o no llevar a cabo. Por ejemplo, un enunciado como «$7 + 5 = 12$» se debe entender como una abreviatura del enunciado «he realizado las construcciones indicadas por $7 + 5$ y 12 y he encontrado que el resultado es el mismo», lo cual expresa un hecho empírico, a saber, que se ha llevado a cabo con éxito una doble construcción mental y los resultados coinciden. En cambio, una negación como «$2 + 1 \neq 3 + 1$» se debe entender como «he realizado las construcciones mentales indicadas por $2 + 1$ y $3 + 1$ y he encontrado que el resultado no es el mismo», lo cual expresa una imposibilidad: la de llegar a lo mismo mediante las construcciones indicadas. Por tanto, la negación está referida en este caso a una doble construcción que fracasa en su intento o, mejor dicho, a dos construcciones que no concluyen en lo que se afirma. Ergo, negar un enunciado como «$2 + 1 = 3 + 1$» es una notificación, no acerca del modo de ser ciertos objetos preexistentes, sino acerca de una construcción mental, y equivale a afirmar que algo es absurdo: a saber, que el resultado de la construcción es de cierta manera.[29]

7) El intuicionismo difiere del logicismo en que trata la lógica (tal como la entiende) como una parte de las matemáticas, no como su fundamento, y del platonismo en que considera los objetos matemáticos construcciones mentales sin ninguna existencia independiente; es afín con el constructivismo de Kronecker y sobrepasa el finitismo extremo, según el cual los conjuntos infinitos no existen ni siquiera de manera potencial.[30] Al respecto, Brouwer admite ciertos números ordinales transfinitos como, por ejemplo, el número ω, aunque no acepta la existencia de números cardinales superiores a $\aleph_0$.[31]

8) Lejos de lo que Hilbert propone, Brouwer procede al margen de la pauta axiomática y sin preguntarse por la consistencia de sus teorías, pues considera que la construcción matemática es tan inmediata al entendimiento y sus resultados tan claros; que no requiere de ningún fundamento, cualquiera que éste sea (o, más bien, que esta disciplina ya nace fundamentada). Es en este contraste donde podemos apreciar el papel de la lógica

29 *V.* Franchella, 1995.

30 Aun más radical es la posición del *ultrafinitismo*, que sostiene que incluso los números muy grandes no existen, digamos aquellos mayores que 10^{100}.

31 *V.* Brouwer, 1912, en Benacerraf 1964, pp. 73-74.

tradicional en la matemática clásica, en la que a pesar de su falta de evidencia se le adscribe una validez universal. Vindicar su uso es la tarea que Hilbert se echa a cuestas: «Es absolutamente necesario alcanzar en los modos de inferencia el mismo grado de seguridad que la que existe en la teoría ordinaria elemental de los números, en la que todo mundo confía plenamente y en la que una paradoja o una contradicción sólo pueden surgir por nuestra falta de atención.».[32]

Frente a la reacción de Brouwer, Hilbert opuso la suya propia: a fin de cuentas, su fe en el método axiomático no sufrió ningún quebranto en el lapso transcurrido entre 1904 y 1917, año en que retomó el problema de los fundamentos. Para salir victorioso en esta contienda debía responder las críticas de Brouwer de manera aceptable a los ojos de la comunidad matemática y llevar a feliz término su proyectada prueba de consistencia, retos que lo impulsaron a profundizar aún más en la naturaleza del pensamiento matemático.

Una vez aclarado el contexto en que Hilbert retomó el problema de los fundamentos, volvamos al examen de sus ideas.

[32] Hilbert, 1925. Cita tomada de la traducción al español, p. 94.

3.4 La naturaleza de la matemática clásica según Hilbert

Si bien en un principio Hilbert hizo caso omiso de las críticas de Brouwer, quizá por falta de una respuesta apropiada, en 1917 decidió romper su silencio al señalar, en una conferencia dictada ante la Sociedad Matemática Suiza, la necesidad de investigar la demostración matemática. Éste fue el comienzo de un período de intensa actividad en torno al problema de los fundamentos que habría de culminar con la aparición de los teoremas de Gödel.

Un segundo estímulo para que Hilbert retomara el problema fue el hecho de que Hermann Weyl, uno de sus más queridos discípulos, cedió ante las nuevas ideas de corte intuicionista. En un libro publicado en 1918, *Das Kontinuum*, Weyl atacó el uso de métodos no constructivos en el análisis e intentó fijar las bases para un tratamiento inobjetable de la teoría de las funciones de una variable real. Hilbert se había equivocado. Los argumentos de Brouwer, que a nadie convencerían, convencieron a Weyl. ¡Esto era más de lo que podía tolerar, un hecho inaceptable! ¿Cómo él, caudillo de la matemática alemana, habría de permitir que el enemigo irrumpiera en su casa y por el pórtico del frente? Era indispensable frenar el avance de esa tendencia, resolver en definitiva el problema de los fundamentos, disipar las dudas que se pudieran tener respecto a la matemática clásica y la lógica aristotélica, que en connivencia se habían extendido más allá de la argumentación constructiva. Años más tarde diría:

> Lo que Weyl y Brouwer pretenden hacer equivale en principio a recorrer el camino que alguna vez siguiera Kronecker. Es decir, Weyl y Brouwer intentan ofrecer una fundamentación de las matemáticas que echa por la borda todo aquello que les resulta incómodo y que establece además (en el sentido de su predecesor) una serie de prohibiciones claramente dictatoriales. Pero esto no significa otra cosa que el desmembramiento, la amputación arbitraria de nuestra disciplina. Al seguir a tales reformadores nos exponemos a perder una gran parte de nuestros más valiosos conceptos, resultados y métodos.[1]

Para Hilbert el problema de los fundamentos se había de resolver de otra manera. Si bien acepta que el poder del pensamiento intuitivo no llega más allá de lo que garantizan Kronecker y Brouwer, y reconoce que ninguna de las proposiciones transfinitas de la matemática se puede justificar como verdad material evidente, eso no es un motivo para renunciar a las conquistas de una matemática que con mucho desborda esta esfera. Más

[1] Hilbert, 1922. Cita tomada de la traducción al español, p. 40. Según lo consigna Constance Reid, tras una charla que Brouwer dio en el Instituto de Matemáticas de Gotinga, Hilbert lo impugnó con las siguientes palabras: «Con sus métodos, la mayor parte de los resultados de la matemática moderna tendrían que ser abandonados, y para mí la cosa más importante no es obtener menos resultados, sino más de ellos.» [cf. Reid, 1970, p. 184].

bien, lo procedente era examinar los métodos y conceptos con que se había enriquecido la matemática y resguardarlos de cualquier peligro. Había, sobre todo, que aclarar la naturaleza del infinito, blanco favorito de todos los ataques.[2]

3.4.1 La naturaleza, el entendimiento y el infinito

Al intentar esclarecer la noción de infinito, hay ciertas cuestiones que no se pueden soslayar: ¿qué lugar ocupa el infinito en nuestro pensamiento, en el conocimiento de la naturaleza, en la matemática?, ¿tiene éste algún significado intuitivo, corresponde a alguna realidad?

En un trabajo dedicado específicamente a este problema Hilbert fija su posición.[3] En su opinión, se trata de una noción ideal en el sentido kantiano, es decir, de una idea a la que nada corresponde en la experiencia ni le podemos adjudicar validez objetiva.

Para empezar Hilbert se pregunta por el lugar que el infinito ocupa en la naturaleza. Explica que al examinarla nos podemos percatar de que a la noción de infinito —en cualquiera de sus sentidos— no se le puede asignar ningún significado, aun cuando la impresión que nos causan a primera vista los eventos naturales y el mundo material es que son uniformes y continuos. Afirma, por ejemplo, que una pieza de metal o un volumen de líquido nos dan la impresión de ser divisibles de un modo ilimitado, de que cualquiera de sus partes, no importa lo pequeña que sea, tendrá nuevamente las mismas propiedades. Sin embargo, una vez que los métodos de investigación de la física se perfeccionaron lo suficiente, se encontraron límites a la divisibilidad de la materia, límites ligados indisolublemente a su naturaleza y no a la de los experimentos. La ciencia moderna, según Hilbert, nos ha liberado con ello de lo infinitamente pequeño. La divisibilidad infinita del continuo es una operación presente tan sólo en el pensamiento; una idea que es refutada por nuestra observación de la naturaleza.[4]

---

[2] El sacrificio exigido por Brouwer era doblemente difícil de aceptar en virtud de que quienes se ocupaban del análisis matemático, fuertemente impregnado por los métodos de la teoría de conjuntos, encontraban completa certeza en sus deducciones y concordancia evidente entre los resultados, a pesar de las combinaciones más temerarias y elaboradas. Esto era un indicativo de que el problema no tenía como causa el uso del infinito actual en matemáticas, sino el descuido en su manejo.

[3] *V.* Hilbert, 1925.

[4] Esta idea de que la materia presenta límites a la posibilidad de dividirla sigue vigente. Veamos cómo se expresa Robert Frisch (físico austriaco n. 1904) en una entrevista que le hace Pierre Kister: «Kister.- ¿Qué es una partícula elemental? Frisch.- Me gustaría saberlo. La materia se compone de átomos; los átomos, de electrones y núcleos; los núcleos tienen protones y neutrones. ¿Continuará el juego de encontrar partes más pequeñas de materia, y durante cuánto tiempo? Ciertamente las reglas del juego cambian. Se ha propuesto que el protón consta de tres subunidades (quarcs) cada una de ellas de masa mucho mayor que la del protón. Esto, absurdo a primera vista, es posible debido a la ecuación $E = mc^2$; al combinar los tres quarcs, se irradia la mayor parte de su masa en forma de energía. Por tanto, puede suceder que la búsqueda de partículas elementales no conduzca a masas más y más pequeñas, como en el pasado.». Cita tomada de Pajares, 1973, p. 78.

Hilbert refuerza su argumento señalando otro problema al que tuvo que enfrentarse la ciencia moderna: el de la infinitud del espacio físico. Durante mucho tiempo fue dominante la idea de que el espacio físico era infinito. Se consideraba que la geometría euclidiana era necesariamente verdadera en relación al espacio, y dicha geometría conduce directamente a la conclusión de que éste es infinito. Sin embargo, aduce que aun cuando la geometría euclidiana sea consistente, ello no prueba que ésta sea aplicable a la realidad. Es más, es perfectamente posible que otra geometría, distinta a la euclidiana, nos proporcione un modelo finito de la misma. Éste es el caso de la geometría elíptica o de Riemann, la cual ha desplazado a la euclidiana como modelo del espacio físico y esto no sólo por consideraciones de carácter enteramente matemático o filosófico, sino por otra clase de argumentos que en principio nada tienen que ver con estas disciplinas. Este desplazamiento tuvo lugar cuando Einstein probó la necesidad de abandonar la geometría euclidiana a partir de la teoría de la relatividad. Al desarrollar su teoría de la gravitación, Einstein atacó los problemas cosmológicos mostrando la posibilidad de un universo finito. Hilbert señala que a la fecha (1925) todos los resultados obtenidos por los astrónomos son compatibles con la idea de un universo finito. De este modo, los resultados que arroja la física indican que, en ambos sentidos, el mundo físico posee límites, es finito.

No obstante, aunque el infinito no corresponde a nada en la naturaleza, Hilbert no ve en ello una razón para excluirlo de nuestra urdimbre intelectual, en donde desempeña, desde su punto de vista, un papel fundamental: «Podría ocurrir, no obstante, que el lugar propio y justificado del infinito no sea la realidad, sino *nuestro pensamiento*. Y podría muy bien resultar que en éste el infinito asuma una función conceptual absolutamente imprescindible.».[5] En otras palabras, si bien el concepto de infinito no denota realidad física alguna, Hilbert ve en él un instrumento esencial de la razón: «El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de ésta, como un concepto de razón que supera toda experiencia y por medio de la cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad.».[6]

---

[5] Hilbert, 1925. Cita tomada de la traducción al español, pp. 87-88. Es en este texto (p. 94) donde Hilbert se declara acérrimo defensor de la matemática transfinita con las siguientes palabras, ahora famosas, y que ya hemos citado: «Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros».

[6] Hilbert, *op. cit.*, p. 121. Respecto a la existencia del infinito, Hilbert se arroga las mismas reservas que Kant cuando, en una conocida nota de la *Crítica de la Razón pura*, dice: «El conocimiento de un objeto implica el poder demostrar su posibilidad, sea porque la experiencia testimonie su realidad, sea *a priori*, mediante la razón. Puedo, en cambio, *pensar* lo que quiera, siempre que no me contradiga, es decir, siempre que mi concepto sea un pensamiento posible, aunque no pueda responder de si, en el conjunto de todas las posibilidades, le corresponde o no un objeto. Para conferir validez objetiva (posibilidad real, pues la anterior es simplemente lógica) a este concepto, se requiere algo más.» [Kant, CRP, B XXVII, nota *k*.]. En este sentido, Hilbert no pretende probar la existencia real del infinito, sino legitimarlo como un objeto del pensamiento mediante una prueba de consistencia.

Pero, ¿de qué medios se vale el infinito para complementar lo concreto? Lo hace a través de la matemática, único dominio en el que se puede hacer un uso no especulativo de esta noción. Dice Hilbert: «El instrumento que media entre la teoría y la práctica, entre el pensamiento y la observación, es la matemática; ella construye los puentes que las une y los hace aun más sólidos. Sucede así que toda nuestra cultura moderna, en la medida en que se apoya en la penetración y utilización de la naturaleza, tiene su fundamento en la matemática.»,[7] a lo que más adelante añade: «Sin la matemática, la astronomía y la física modernas no serían posibles; estas ciencias, en sus partes teóricas, casi se disuelven en la matemática. Es a éstas y a muchas otras aplicaciones que la matemática debe el prestigio que tiene entre el público en general.»[8]

3.4.2 El infinito en la matemática

Las principales reflexiones de Hilbert acerca del infinito las expuso en una conferencia dictada ante la Sociedad Matemática de Westfalia.[9] El trabajo se inicia con una apología de la obra de Karl Weierstrass, quien dedicara buena parte de su obra a la fundamentación del análisis matemático. Al respecto, Hilbert afirma que fue Weierstrass quien dio un base definitiva a esta disciplina al definir de manera precisa nociones como las de *mínimo*, *función*, *limite* y *derivada*, las cuales permitieron construir la teoría sin hacer referencia al infinito, en el sentido de lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño.[10] Sin embargo, y a pesar de tales esfuerzos, advierte que la matemática clásica no pudo suprimir toda alusión al infinito, ya que esta noción reapareció de manera esencial bajo la modalidad del infinito actual. «Debido a esta circunstancia, el infinito se pudo deslizar de manera disimulada en la teoría de Weierstrass sin ser afectado en lo esencial por su crítica».[11]

En efecto, como ya vimos en sección **2.6.1**, el infinito actual se hace presente en el análisis matemático a través de las *cortaduras de Dedekind*, clases infinitas de números racionales concebidas como totalidades cerradas y existentes por sí. Esta noción también aparece al considerar ciertos conjuntos infinitos —v. gr., *todas* las funciones continuas o *todos* los números reales— como totalidades completas y acabadas. Hilbert subraya la fuerte presencia del infinito en el análisis con las siguientes palabras: «En cierto sentido, el análisis

[7] Hilbert, 1930. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 1163.
[8] Hilbert, *op. cit.*, p. 1164.
[9] El texto de la conferencia se publicó en 1926, y en la bibliografía corresponde a Hilbert, 1925.
[10] Véase la sección **2.5**.
[11] Hilbert, 1925. Cita tomada de la traducción al español, p. 84.

matemático no es sino una sinfonía del infinito».[12] Convertida la noción en un pieza fundamental de la matemática moderna, lo conducente era clarificar su uso a fin de disipar las dudas suscitadas por las paradojas, aunque la empresa iba «mucho más allá del ámbito de los intereses científicos particulares, [siendo] algo que, en realidad, se ha convertido en una *cuestión de honor para el entendimiento humano.*».[13] Al respecto, juzga que la visión más penetrante que se ha logrado de la naturaleza del infinito es la de Cantor, cuya teoría se acerca más a una forma filosófica de pensar que a la matemática misma. «En mi opinión, el sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general.».[14] Decantar esta noción es una deber que rebasa la esfera de la matemática, pues atañe a nuestra concepción de la naturaleza y a la reflexión filosófica por igual: «Como ningún otro problema, el del infinito ha inquietado desde los tiempos más remotos el *ánimo* de los hombres. Ninguna otra *idea* ha sido tan estimulante y fructífera para el entendimiento. Pero, como ningún otro *concepto*, requiere de *precisión* y *esclarecimiento* satisfactorios.».[15]

No pretendemos repetir los argumentos de Hilbert en defensa del infinito actual de la teoría cantoriana, ni abundar en su carácter ideal. En vez de ello, habremos de precisar la manera en que ésta y otras nociones ideales se enlazan con una matemática que se ocupa de objetos y propiedades de objetos concretos, y cuya fuente la encuentra Hilbert no en una actividad introspectiva como Brouwer, sino en la intuición sensible.

3.4.3 La matemática clásica

Para Hilbert, la matemática clásica comprende dos tipos de nociones: descriptivas e ideales. *Grosso modo*, las nociones descriptivas corresponden a objetos y construcciones concretas de la experiencia sensible. Por el contrario, las nociones ideales son ideas de razón que trascienden el ámbito de la percepción e incluso de toda experiencia; su función es completar las teorías matemáticas. Entre las nociones ideales no sólo se encuentra el infinito actual, sino ciertos principios lógicos que no se pueden justificar con base en

[12] Hilbert, *op. cit.*, p. 89. Adoptando un punto de vista todavía más general, Hermann Weyl destaca la importancia de esta noción en la matemática moderna con las siguientes palabras, aún más elocuentes: «Si al resumir se necesita una frase breve que describa el centro vital de las matemáticas, uno bien puede decir: matemáticas es la ciencia del infinito.» [Weyl, 1949. Cita tomada de la traducción al español, p. 73].

[13] Hilbert, *op. cit.*, p. 85.

[14] Hilbert, *op. cit.*, p. 90.

[15] Hilbert, *op. cit.*, p. 85.

consideraciones intuitivas. Por ejemplo, el principio del tercero excluido.[16] Tales principios hacen las veces de *enunciados ideales* que, sin ser susceptibles de una verificación directa, complementan el aparato demostrativo a fin de preservar las leyes de la lógica aristotélica.

Para entender mejor estas ideas conviene atender la exposición que Hilbert hace de la teoría elemental de los números, «la criatura más pura e ingenua del espíritu humano».[17] Dicha exposición permite precisar el alcance de los métodos finitos en la matemática, y entender a qué se refiere Hilbert cuando habla de una matemática que trata con objetos y propiedades de objetos concretos.

La teoría elemental de los números. Consideremos una fórmula numérica cualquiera, como, por ejemplo, la igualdad

$$\sum_{1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\#)$$

En ella, la variable n se puede reemplazar por un número natural cualquiera como, por ejemplo, 7 ó 586, por lo que en realidad la fórmula contiene una *infinidad* de enunciados. «Esto es precisamente lo esencial de la misma, y es gracias a ello que puede representar la solución de un problema aritmético [en este caso, el de encontrar una expresión para la suma de los primeros n números naturales] y requerir de un genuino argumento aritmético para su prueba.».[18] Por contraste, toda ecuación numérica particular como

$$1 + 2 + \ldots + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} \quad \text{ó} \quad 1 + 2 + \ldots + 586 = \frac{586 \cdot 587}{2}$$

se puede verificar directamente llevando a cabo las operaciones indicadas, por lo que ninguna de ellas tiene, por sí misma, un interés especial. En otras palabras: la verdadera riqueza de la teoría aritmética radica, no en los enunciados de carácter particular, sino en aquellos de carácter general de los que los primeros se obtienen como casos específicos, y en la posibilidad de establecer vínculos deductivos entre todos ellos (a esto es a lo que se refiere Hilbert cuando habla de un "genuino argumento aritmético"[19]).

---

[16] En efecto, dado un dominio infinito D y una propiedad P aplicable a sus elementos, la aceptación incondicional del principio del tercero excluido presupone la facultad de agotar todas las posibilidades, al presuponer que *o bien la propiedad* P *se cumple para todos los elementos de* D, *o bien existe un objeto en* D *para el que no se cumple* P, aunque no se cuente con los medios para inclinarse en favor de alguno de los términos de esta alternativa. Al respecto véanse las consideraciones que hacemos en ésta y la sección **3.3.1**.

[17] Hilbert, *op. cit.*, p. 88.

[18] Hilbert, *ibid.*

[19] Por ejemplo, de la fórmula (#) se sigue que $n + 2n + 3n + \ldots n^2 = \frac{1}{2}\cdot(n^3 + n^2)$, otro enunciado de carácter general. El argumento se basa en el hecho de que $n + 2n + 3n + \ldots + n^2 = n(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$. En este caso el "genuino

Tenemos, por tanto, una primera división de los enunciados de la teoría aritmética en dos clases: por un lado, los que se pueden verificar directamente (v. gr., igualdades y desigualdades numéricas) y por el otro, enunciados de carácter general que sólo se pueden establecer mediante una *prueba*. Esto nos lleva a dos problemas: al del *significado* de los enunciados aritméticos y al de los *métodos de prueba* admisibles.

¿Sobre qué base se establece el saber aritmético? No nos referimos a la teoría axiomática de Peano que, como hemos visto, no es sino la ordenación de diversos hechos aritméticos que le son previos (*v.* sección **1.5.3**). Nos referimos más bien a la formación de la teoría aritmética: ¿de qué trata? ¿a qué clase de objetos se refiere? ¿bajo qué circunstancias decimos que sus enunciados son verdaderos? Para Hilbert, esta teoría tiene un objeto de estudio que se puede exponer en el ámbito de la intuición. Se trata de los numerales

| || ||| |||| ||||| ...

los cuales se caracterizan por el hecho de que a cada trazo | siempre le sigue, si acaso, otro trazo igual. Estos numerales carecen de todo significado, pero podemos formar enunciados significativos acerca de ellos con la ayuda de otros signos, que sirven como abreviaturas (por ejemplo, el signo 2 como abreviatura de ||, el signo 3 como abreviatura de |||, etc.) o para comunicar información (como, por ejemplo, los signos <, =, +, etc.). Así, por ejemplo, un enunciado como «7 + 5 = 12» es una comunicación que nos dice que 7 + 5 y 12 son, tomando en cuenta las abreviaturas utilizadas, el mismo numeral.[20] Estos signos adicionales incluyen letras como m, n, p, k, etc. para representar numerales cualesquiera.

Llamemos *números* a estos objetos (es decir, a los numerales). En esta teoría es posible llegar a resultados de alcance general. Por ejemplo, con base en inferencias materiales que comprenden la manipulación de trazos y un argumento de carácter inductivo se pueden demostrar enunciados como

$$n + m = m + n$$

argumento aritmético" mediante el cual se establece la segunda igualdad consiste en un cálculo algebraico que lleva de la primera ecuación a la segunda.

[20] Las convenciones son más o menos obvias: $a = b$ significa que los numerales a y b tienen la misma *longitud*, es decir, que al eliminar simultáneamente un trazo de cada uno de ellos una y otra vez, se agotan al mismo tiempo. En cambio, si al agotarse los trazos de uno de los numerales, digamos a, aún quedan algunos trazos de b, entonces escribimos $a < b$. A su vez, $a + b$ denota el numeral que resulta de concatenar los numerales a y b, y $a \cdot b$ es el numeral que resulta de sustituir cada uno de los trazos de a por el numeral denotado con b. Por ejemplo, por definición el numeral $2 \cdot 3$ es el numeral 6, que se obtiene así:

||
↙ ↘
||| ||| = ||||||

Nótese que por el modo en que se construye la teoría, un enunciado como «7 + 5 = 12» es sintético *a priori*, pues la construcción tiene lugar en la intuición pura y es independiente de la experiencia. Hilbert no elimina el apriorismo kantiano, sino que lo coloca en una esfera más reducida del *Anschauung*.

que expresa la igualdad entre dos numerales en su forma general. El argumento requerido para ello no es de carácter hipotético, sino que se basa en consideraciones estrictamente constructivas. Hilbert y Bernays se refieren a este tipo de razonamientos como *inferencias finitistas* [das finite Schließen].[21] «Utilizaremos la palabra "finitista" para indicar que la discusión, afirmación o definición en curso se mantiene dentro de los límites de la plena realización de los objetos y que, en conformidad, se puede llevar a cabo dentro del dominio de la inspección concreta.».[22]

Todas la definiciones que hemos visto en relación a los numerales son finitistas y podemos dar una interpretación finitista de los dos procedimientos aritméticos de prueba y definición más importantes: nos referimos a las *definiciones por recursión* y a las *pruebas por inducción matemática*.

Inducción. Una prueba por inducción de un teorema $A(n)$ debe proporcionar los medios para verificar $A(n)$ para cualquier numeral n en un número finito de pasos, número que se puede acotar de antemano.

Recursión. Una definición recursiva de una función $f(n)$ debe indicar cómo evaluar $f(n)$ para cualquier numeral n en un número finito de pasos previamente acotado.[23]

Con estos procedimientos a la mano es posible expresar en términos finitistas los argumentos usuales con los que se establecen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva de la suma y la multiplicación, introducir las nociones de *divisor* y *número primo*, y demostrar el teorema fundamental de la aritmética, según el cuál *todo número entero es representable de una y sólo una manera como un producto de factores primos*.[24]

El transfinito. Algo esencial al razonamiento finitista es que los objetos considerados sean producibles, al menos en principio, en el ámbito de la percepción, y que no admite ningún procedimiento de definición o de cálculo a menos que éste termine en un número finito de pasos y se pueda fijar de antemano una cota a tal número.[25] Obviamente, estas limitaciones se convierten en una pesada carga cuando se adopta el punto de vista finitista en relación a proposiciones que contienen cuantificadores. Por ejemplo, un enunciado $\forall nA(n)$ se debe

[21] Hilbert y Bernays, 1934, p. 32.
[22] Hilbert y Bernays, *ibid*. Más adelante intentaremos una caracterización más precisa de esta clase de argumentos.
[23] Para un comentario más extenso sobre la inducción matemática y las definiciones por recursión, véase el apéndice 11.
[24] Este teorema es fundamental en la demostración de los teoremas de incompletud de Gödel, y el hecho de que pertenezca a la aritmética recursiva lo ha convertido en un instrumento esencial de la teoría de la representación.
[25] En otras palabras, los objetos de la matemática finitista se construyen, no se postulan, y su construcción no es parcial. Por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ no es susceptible de una definición finitista, aunque se cuenta con una regla para aproximarlo tanto como se desee. Por el contrario, la matemática clásica lo que hace es tomar la sucesión de aproximaciones como el número mismo.

entender como significando que, para cada numeral n, se puede demostrar finitariamente que la proposición $A(n)$ es verdadera; a su vez, un enunciado $\exists n A(n)$ sólo se puede proferir cuando se conoce un numeral n para el que $A(n)$ es verdadero o al menos se cuenta con un procedimiento efectivo para calcular tal numeral en un número predeterminado de pasos.

Por ejemplo, la afirmación de que hay una infinidad de números primos no es finitista. Este teorema lo podemos expresar así (donde $p(n)$ significa «n es primo»):

$$\forall m \, \exists n \, (p(n) \wedge m < n) \qquad (*)$$

En el libro IX de los *Elementos*, Euclides establece este teorema en una forma más precisa, y siguiendo un procedimiento que marcha acorde con el punto de vista finitista. Lo que él demuestra es que si p es un número primo, entonces entre $p + 1$ y $p! + 1$ existe al menos otro número primo (de donde se sigue la infinitud del conjunto formado por tales números).[26] Como se ve, el teorema que demuestra Euclides [proposición IX.20] dice algo más que (*), pues señala el rango donde se halla el siguiente número primo. En tal caso la fórmula (*) se puede sustituir por la más precisa

$$\forall m \, \exists n \, (p(n) \wedge m < n \leq m! + 1) \qquad (**)$$

en cuyo caso el enunciado $\exists n \, (p(n) \wedge m < n \leq m! + 1)$ se puede sustituir en favor de

$$p(m + 1) \vee p(m + 2) \vee \ldots \vee p(m! + 1)$$

de corte finitista. No deja de ser sorprendente que un enunciado como (*), aunque más impreciso que (**), signifique un salto al transfinito. En efecto, si quisiéramos eliminar el cuantificador existencial en (*), lo que obtendríamos sería un *seudoenunciado* infinito

$$p(m + 1) \vee p(m + 2) \vee \ldots \vee p(m! + 1) \vee p(m! + 2) \vee \ldots$$

con una infinidad de términos, y sin interpretación finitista. Hay que tener claro que un enunciado como $\exists n \, (p(n) \wedge m < n)$ no se puede interpretar como una expresión compuesta por una infinidad de aseveraciones enlazadas por la conectiva «$\vee$» (la palabra «o»).[27] Más bien, lo correcto es interpretarlo como un enunciado hipotético que afirma algo toda vez que ya tengamos un numeral (es decir, toda vez que conozcamos un número primo mayor que m). De hecho, los enunciados que denominamos *puramente existenciales*, en los que se afirma la existencia de un objeto dentro de una infinidad de posibilidades sin saber cuál es,

[26] En general, $n!$ denota al número que resulta de multiplicar entre sí todos los números menores o iguales que n:
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

[27] Es decir, nos topamos con el transfinito cuando tratamos con enunciados existenciales que no pueden interpretarse como una disyunción finita, al igual que lo hacemos con los enunciados universales que no pueden interpretarse como una conjunción finita.

son enunciados ideales. Tienen la característica de que no comunican de manera inmediata ningún contenido y por lo general se demuestran por reducción al absurdo.[28]

Métodos finitos y métodos transfinitos. Como consecuencia de todo lo anterior tenemos que, desde la perspectiva finitista, no es lícito utilizar indiscriminadamente el principio del tercero excluido, según el cual o bien hay un número primo mayor que m o no lo hay. De la misma manera, la interpretación finitista de ciertos enunciados no elementales que contienen negaciones es muy complicada,[29] llegándose a extremos tan alarmantes como la imposibilidad de negar enunciados tan simples como $\forall m \forall n(m + n = n + m)$.

Someterse a tales limitaciones tendría consecuencias terribles para la teoría aritmética. Por ejemplo, un teorema tan simple como el *Postulado de Bertrand*[30]

Para todo número n, *existe un número primo* p *tal que* n < p ≤ 2n

no tendría cabida en ella, pues las únicas pruebas conocidas proceden por reducción al absurdo,[31] y este tipo de argumentos sobrepasan el tratamiento intuitivo y concreto de los numerales. En palabras de Hilbert:

> Podemos concluir entonces que cuando permanecemos, tal y como estamos obligados a hacerlo, en la esfera de los enunciados finitos, dependemos de relaciones poco claras, y esta ausencia de claridad se convierte en algo intolerable cuando el "todos" y el "existe" se combinan en enunciados subordinados. Como sea, las leyes lógicas utilizadas por el ser humano desde que éste tiene la capacidad de pensar y que Aristóteles nos ha enseñado no tienen aquí validez.
>
> Así las cosas, podríamos proponernos como tarea inicial la determinación explícita de la leyes lógicas que son válidas para la esfera de las proposiciones finitarias. Sin embargo, esto no bastaría, pues, en realidad, lo que no queremos es renunciar al uso de las sencillas leyes de la lógica aristotélica, y nadie, no importa qué tan persuasivamente argumente, podrá impedir que los hombres continúen negando

---

[28] Dos enunciados de este tipo son el *axioma del supremo* (sobre el que se fundamenta todo el análisis) y el *teorema del valor medio*. El primero afirma que todo conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente tiene una mínima cota superior. El segundo asevera que si $f: [a, b] \rightarrow R$ es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe un número c en este último intervalo con la propiedad de que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

[29] Por enunciado *elemental* entendemos cualquier enunciado que no contiene ni variables ni cuantificadores, y que sólo trata de igualdades y desigualdades numéricas.

[30] Agradezco al Dr. José Antonio Robles el siguiente comentario. Ante mi desconcierto sobre por qué a este teorema se le llama *postulado*, El Dr. Robles me explicó que en 1845 Joseph L. F. Bertrand (1822-1900) formuló este enunciado sin demostración, llamándosele quizá por ello "postulado", y que fue P. L. Tchebychef (1821-1894) quien finalmente lo demostró en 1850. Como referencia me dio la siguiente: [Boyer, 1968, p. 551].

[31] Es decir, mediante un argumento de la forma: «supongamos que hay un número n para el que no se cumple esta propiedad» a partir de lo cual se deduce una contradicción. (*v.* la sección **3.3.1**).

> afirmaciones de todo tipo, haciendo juicios parciales y aplicando el principio del tercero excluido. Pero entonces, ¿cuál será nuestra actitud?[32]

La respuesta la encuentra mirando hacia el interior de la matemática, en la que ya se han presentado con anterioridad situaciones igualmente difíciles. Exclama: «ha sido el genial método de los elementos ideales el que en tales circunstancias nos ha salvado.»[33] Hilbert se refiere a la incorporación de "objetos" como los puntos al infinito en geometría o el número $i = \sqrt{-1}$ en el álgebra, que sin corresponder a nada en la "realidad" estudiada, permitieron simplificar las leyes al dar uniformidad a su tratamiento.[34]

En el caso de la matemática clásica, los elementos ideales que se añaden son de dos tipos: por una parte, ciertos enunciados cuya función es conservar las reglas de la lógica aristotélica en su simplicidad original; por la otra, ciertas nociones imaginarias (v. gr., la de infinito actual) que permiten introducir principios demostrativos como el axioma de elección. Al respecto dice lo siguiente:

> Para estar seguros, el método de los elementos ideales está sujeto una sola condición que le es indispensable, y ésta es la prueba de consistencia; pues la extensión [de una teoría] mediante la adición de elementos ideales es legítima sólo si en el viejo y más estrecho dominio no se introduce ninguna contradicción, esto es, si las relaciones que resultan para los viejos objetos cuando se eliminan los objetos ideales son válidas en el viejo dominio.[35]

Como veremos, la manera en que Hilbert pretende probar la consistencia de la teoría que resulta al extender la matemática finitista mediante nociones ideales es sumamente ingeniosa y tiene como base la estricta formalización de la teoría.[36]

Para finalizar, algunos comentarios.

1) Hilbert jamás ofreció una definición muy precisa de lo que es la matemática finitista. No obstante, por lo que dice en sus escritos debemos entender que se trata de una teoría matemática de naturaleza puramente combinatoria, que trata con configuraciones de objetos

---

32 Hilbert, 1925. Cita tomada de la traducción al español, pp. 99-100.
33 Hilbert, *ibid.*
34 En el apéndice 12 el lector encontrará un comentario más extenso acerca de estas nociones.
35 Hilbert, 1928. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 471.
36 Creemos que para Hilbert la matemática es, en última instancia, una actividad humana que reviste cierto gozo, y si hubiera que pasar por todas las limitaciones que Brouwer impone, nadie querría ser matemático. En todo caso, la opinión generalizada es que mientras no se exhiba una contradicción en la matemática clásica nadie dejará de aplicar las leyes usuales de la lógica, que con elegancia y economía de pensamiento permiten un rápido avance. Sin embargo, proceder de esta manera implica desbordar el cauce de la matemática finitista, cuyos métodos operan como una camisa de fuerza. Así, en vez de echar por la borda todo aquello que resulta inseguro, Hilbert se impone la tarea de conciliar los métodos y conceptos de la matemática finitista con los métodos y las nociones ideales de la matemática transfinita mediante una prueba de consistencia. Al respecto, véase el tercer comentario al final de esta sección.

finitos y discretos que se pueden representar de manera concreta, e inspeccionar en todas sus partes.

En este sentido, la aritmética que aprendemos en la escuela primaria se puede considerar como típicamente finitista: trata de los números naturales y ciertas operaciones *específicas* con ellos (v. gr., la suma y la multiplicación) y tiene un carácter enteramente combinatorio. Por ejemplo, aprender a "sumar" consiste en asimilar, en el contexto del sistema decimal, ciertas reglas combinatorias y ciertos algoritmos que permiten obtener la representación decimal de "la suma" de dos números a partir de la representación decimal de estos últimos.

2) En [Gödel, 1958], Gödel precisa las características que debería tener una noción para *no* ser finitista, delimitando de este modo el alcance de la matemática finitista. Dice que por nociones *abstractas* (o no intuitivas) debemos entender nociones que son esencialmente de segundo orden o de orden superior, es decir, que no encierran propiedades o relaciones de *objetos concretos* (por ejemplo, combinaciones de signos), sino que se relacionan con *construcciones mentales* (por ejemplo, demostraciones, enunciados significativos, etc.). De la misma manera, una demostración es no finitista cuando en ella hacemos uso de *discernimientos* [insights] que resultan, no de las propiedades combinatorias (espacio-temporales) de combinaciones de signos, sino sólo de su *significado*.

Concluimos entonces, como resultado de nuestro análisis, que aunque no se cuente con una definición rigurosa de la misma, por *matemática finitista* se debe entender la parte de las matemáticas que trata de objetos perceptuales y en la que la evidencia descansa en la intuición sensible. En ella, las demostraciones se apoyan en exclusiva en la consideración de objetos concretos (combinaciones de signos, por ejemplo) y sus relaciones mutuas. Por esta razón en la matemática finitista no se acepta ningún tipo de evidencia abstracta como, por ejemplo, la relacionada con las demostraciones de existencia por reducción al absurdo o con la noción de *construcción mental*. Al contrario, todas las pruebas consideradas en este dominio sólo hacen referencia a las propiedades combinatorias (espacio-temporales) de las combinaciones de signos consideradas y su único punto de apoyo es la intuición del signo.

3) Como sabemos, para conciliar las nociones descriptivas de la matemática clásica con las nociones transfinitas de Cantor Hilbert busca apoyarse en la consistencia. Según Stephan Körner,[37] esta idea es de extracción kantiana, y si bien Hilbert no hace ninguna referencia a Kant en lo tocante a esta cuestión, el principio del que parte para la reconciliación —probar su consistencia— ya se encuentra en la *Crítica de la razón pura*.

[37] Cf. Körner, 1960, cuarto capítulo.

Por ejemplo, en la tercera antinomia de la razón pura Kant aborda el conflicto entre la libertad y la ley natural. Por *libertad*, Kant entiende la independencia de toda causalidad, la autodeterminación; en cambio, por *ley natural* entiende el principio según el cual *todo cuanto sucede posee una causa*: dos ideas en oposición aparente.

Este problema reviste cierta importancia. Por una parte, Kant debe dar cuenta de la libre voluntad del hombre, cuyos actos aparecen como resultado de una autolegislación (la ley moral) que se halla por encima de las leyes naturales; por la otra parte, Kant debe guardar la física de Newton, fundada en la noción de causa: dos ideas en aparente conflicto.

La propuesta de Kant consiste en afirmar que la noción de libertad es una idea pura, trascendental, que no contiene nada proveniente de la experiencia y que no puede aplicarse a ella.[38] Por el contrario, la física de Newton es un sistema integrado por nociones aplicables primordialmente a objetos concretos. Según Kant, este sistema se puede ampliar mediante nociones ideales siempre y cuando la extensión se haga de manera coherente, es decir, a condición de que la nociones con que se amplía no entren en conflicto con ella. Ésta es, precisamente, la tarea que se impone para solucionar el aparente conflicto: probar que naturaleza y libertad son compatibles, mostrando que ambas alternativas se pueden cumplir simultáneamente y desde un punto de vista distinto en un mismo acontecimiento, sin contradecirse.[39]

En clara semejanza con Kant, Hilbert sostiene que la extensión de la matemática finitista mediante nociones ideales sólo está sujeta a una condición: que el sistema extendido no sea contradictorio, sin importar si tales nociones se pueden referir a intuiciones. Tal es el caso, por ejemplo, de la noción de infinito actual, en la que ve el complemento ideal de las nociones de la matemática finitista.

3.4.4 Un cambio en el punto de vista

Entre el pensamiento de Hilbert en 1904 y el de la década de los años 20 hay grandes similitudes y diferencias. En ambos casos encontramos la misma convicción, la misma seguridad de que a la matemática se le puede dar un fundamento seguro. Sin embargo, en el segundo caso se percibe otra actitud, otra intención. Esencialmente, observamos dos cambios. Por una parte, el reconocimiento de que la matemática tiene un objeto de estudio que le es asegurado independientemente de la lógica; por la otra, el abandono del problema

---

[38] Kant denomina *ideas de razón* a las nociones cuyos objetos no pueden ser dados en ninguna experiencia posible . Al respecto, admite la posibilidad de extender el conocimiento mediante la adjunción de nociones ideales a condición de que el sistema amplificado no sea contradictorio. No obstante, advierte que tal extensión no acrecienta el conocimiento teórico y que su función es meramente práctica, cuestión en la que Hilbert está de acuerdo, como en seguida veremos.
[39] *V.* CRP, La antinomia de la razón pura, III.

de la existencia matemática (en el sentido de la sección 1.5.4) y su sustitución por la idea de que la matemática transfinita no es sino un recurso o *método* para probar enunciados finitistas, como en seguida veremos.

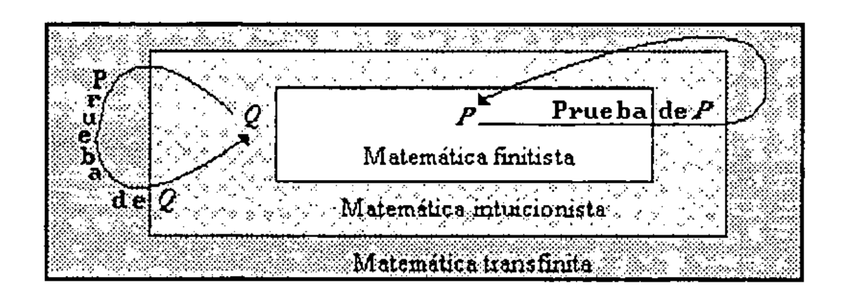
Por ejemplo, en la conferencia de 1925 ya no se encuentra por ningún lado la preocupación por asegurar la existencia de conjuntos infinitos mediante una prueba de consistencia;[40] ahora el interés se centra en asegurar la verdad de aquellos enunciados finitistas que se prueban a partir de los axiomas aritméticos, finitistas y no finitistas. «[...] podemos defender perfectamente la idea de que, en realidad, las matemáticas no son sino una especie de aparato que al ser aplicado a números enteros debe proporcionar igualdades numérica verdaderas. El problema que en ese caso se plantea es el de investigar la construcción de ese aparato hasta el punto en el que toda duda al respecto haya desaparecido.»[41] En otras palabras, lo que ahora le preocupa a Hilbert ya no es el problema de la existencia matemática de ciertas entidades —cuestión demasiado elusiva y un tanto irrelevante en la práctica matemática—, sino probar la legitimidad y conveniencia de una matemática que con mucho ha sobrepasado los límites impuestos por la evidencia intuitiva.

Consideremos en detalle esta cuestión. En [Hilbert, 1925] y [Hilbert, 1927], Hilbert sostiene que la matemática clásica es el resultado de adjuntar a la matemática finitista nociones y proposiciones ideales, junto con la maquinaria deductiva necesaria para preservar la lógica aristotélica. Como acabamos de ver, esta situación ya se presenta en la matemática elemental, la cual contiene, primero, enunciados finitistas —principalmente ecuaciones e inecuaciones numéricas o enunciados más complejos hechos de éstas— que pueden ser considerados los enunciados reales de la teoría y, segundo, enunciados ideales que nada significan por sí mismos, pero que son gobernados por las mismas reglas lógicas que los enunciados finitistas. Dichos enunciados ideales tratan con *objetos y nociones ideales*, que no corresponden a nada en el ámbito de la sensibilidad o la experiencia.[42]

Hilbert sostiene que la importancia de este procedimiento radica en que permite extender y completar las teorías matemáticas, yendo más allá de lo que garantiza el pensamiento intuitivo.[43] En tales casos lo que procede no es discutir si la matemática está en posibilidad de conocer un mundo trascendente, sino considerar la teoría como un todo. Por ejemplo, lo que se debe esperar de la matemática clásica es que ésta conduzca a resultados numéricos correctos en las aplicaciones, sin tener en cuenta si para ello hubo de realizar una digresión

[40] Nos referimos a Hilbert, 1925.
[41] Hilbert, 1925. Cita tomada de la traducción al español, p. 96.
[42] Cf. Hilbert, 1927, página 470 de la traducción al inglés.
[43] Esto significa, entre otras cosas, que tras su adopción no se debe esperar que cada proposición matemática sea verificable de manera individual. En relación a este problema véase el comentario (6) de la sección 3.3.2.

por el infinito. Éste es precisamente el problema que a la sazón preocupa a Hilbert y que pretende resolver: si la matemática clásica es consistente, en ella no se podrán derivar proposiciones aritméticas falsas, pudiéndose confiar plenamente en ella.[44] Es más, el éxito en esta empresa convertiría la matemática clásica en un método de prueba para el intuicionismo, y la adjunción de nociones y proposiciones ideales probaría ser una poderosa herramienta que permitiría desarrollar la teoría con facilidad, dándole uniformidad y una base lógica independiente de la intuición y la experiencia. Con ello Hilbert pretende conciliar la matemática transfinita con la matemática finitista y refutar las críticas de Brouwer.



Esquema de la matemática clásica según Hilbert.[45]

Para Hilbert la matemática finitista consiste en una especie de «reflexión directa acerca de un contenido que procede sin presupuestos axiomáticos y por medio de experimentos mentales sobre objetos imaginados en toda su concreción».[46] La diligencia de colocar esta forma de pensamiento al centro de la matemática es una abierta concesión a Brouwer, quien al igual que Kant le otorga primacía a la intuición y a la argumentación constructiva. En la matemática finitista nada hay que amenace la certeza de las conclusiones, ni existe la posibilidad de incurrir en contradicciones. Aduce para ello que en la esfera de lo perceptible no hay lugar para la contradicción: «Siempre he creído que lo único que puede dar lugar a contradicciones son las afirmaciones y las hipótesis, en tanto que conduzcan, por medio de

[44] Respecto al problema de la "existencia" de conjuntos como el de los números naturales, los números reales o los alephs de Cantor, no es que Hilbert haya cambiado su manera de pensar, sino que el problema quedaría resuelto de paso. Se trata simplemente de que ahora la preocupación de Hilbert es prevenir los efectos de las críticas de Brouwer y evitar que los matemáticos miren con desconfianza la teoría clásica, cuya eficacia y probidad debería estar más allá de toda sospecha.

[45] Explicación de la figura. La matemática finitista forma parte de la matemática intuicionista, mas no se puede decir que coincida con ella, pues la segunda puede incorporar métodos que no corresponden a nada que esté dado en la intuición sensible. Por ejemplo, una demostración puede depender en exclusiva de construcciones del pensamiento (por ejemplo, las aducidas por Brouwer), que sólo tratan con la *posibilidad* de disponer de objetos con ciertas características específicas. En casos como éste la seguridad de la construcción no necesariamente depende de intuiciones ligadas a la sensibilidad, sino de otro tipo de certezas como, por ejemplo, las basadas en el significado de ciertos conceptos. La figura también incorpora la idea de que la prueba de un enunciado finitista P (un enunciado intuicionista Q) puede dar un rodeo por la matemática transfinita, sugiriendo con ello que para Hilbert la extensión se puede pensar como un método de demostración, y que en ello radicaría el valor de las nociones ideales.

[46] Hilbert y Bernays, 1934, p. 32.

inferencias, a otras afirmaciones, por lo que la idea misma de una contradicción entre los hechos me parece un ejemplo paradigmático de descuido conceptual y absurdo.».[47]

No obstante, lo que Hilbert rechaza es que la matemática tenga como límite la esfera de lo intuitivo: éste es el sitio de discrepancia con Brouwer y de coincidencia con Cantor. Es más, considera que la propuesta de Brouwer y Kronecker es una imposición arbitraria que fija límites a la matemática con base en una concepción filosófica que no ha lugar, pues la matemática se puede fundamentar sin renunciar a sus conquistas ni recurrir a nada extraño. Esta postura se revela con toda claridad en el siguiente pasaje:

> La matemática es una ciencia sin presuposiciones. Para fundamentarla no necesito a Dios, como lo hace Kronecker, ni la suposición de una facultad especial de nuestro entendimiento en consonancia con el principio de inducción matemática, como lo hace Poincaré, o la intuición primaria de Brouwer, ni, finalmente, como lo hacen Russell y Whitehead, axiomas de infinitud, reducibilidad o completud que de hecho son suposiciones materiales que no se pueden compensar con pruebas de consistencia.[48]

La teoría cantoriana no es conocimiento de nada, pero es una extensión de una teoría que sí es conocimiento de algo, aunque ese "algo" pertenezca a una esfera muy reducida: se trata de objetos que podemos producir en el ámbito de la sensibilidad. Con ello Hilbert evita incurrir en suposiciones de carácter incierto a la vez que niega la vacuidad de las matemáticas. Más allá de este contenido mínimo, ni siquiera la lógica está presupuesta: los modos de argumentación prevalecientes entre las proposiciones finitistas nacen de la naturaleza de los objetos considerados. Asimismo, la ampliación de la lógica finitista a la lógica clásica no tiene como base consideraciones de orden metafísico, estético u ontológico, sino un argumento que se escuda en la brevedad y economía de pensamiento.

En cuanto a la conformación del programa de Hilbert, si bien no hemos faltado ni un ápice a la verdad, tampoco hemos contado la historia completa. Para apreciar el verdadero sentido del proyecto (reducir la matemática a un mero juego simbólico), debemos primero saber de su creencia en la certeza absoluta del razonamiento finitista, del lugar de la lógica y algo acerca de las condiciones de posibilidad del pensamiento matemático efectivo, así como detallar el radicalismo epistemológico al que Hilbert finalmente llegó y frente al cual el intuicionismo parece un derroche.

---

[47] Hilbert, 1925, p. 85. En efecto, si la matemática se restringiera —como en este caso— a la descripción de objetos concretos y a las relaciones lógicas entre tales descripciones, entonces ninguna antinomia podría producirse en ella.

[48] Hilbert, 1927. Cita tomada de la traducción al inglés, pp. 464-479. Al fondo de este argumento se encuentra la idea de que para fundamentar la matemática (es decir, para darle una base segura) no es necesario recurrir a ningún tipo de suposiciones, sin por ello afirmar o negar que sea obra de Dios, presuponga facultades especiales o esté referida a un mundo inmaterial de esencias matemáticas.

3.5 La intuición del signo

Hilbert nunca dejó de insistir en la vía axiomática como único camino para resolver el problema de los fundamentos. Al respecto, En 1922 se expresó con las siguientes palabras:

> El objetivo que nos hemos propuesto es entonces el de dar un fundamento seguro a las matemáticas. Nuestra intención es devolver a nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles, del que las paradojas de la teoría de conjuntos parecieron despojarla. Tenemos la firme convicción de que esto es realizable y que no significa ningún tipo de renuncia a sus partes constitutivas. El método adecuado para la realización de estos fines es, por supuesto, el método axiomático.[1]

Para entonces Hilbert estaba convencido de dos cosas: primero, que la axiomática y el intuicionismo no eran incompatibles, como sostuvieran Weyl y Brouwer;[2] segundo, que para resolver el problema de los fundamentos no había que salir de la matemática, sino solucionar el problema de la consistencia en ella misma.

> En la filosofía sí ha sido reconocida la importancia del problema de la consistencia de los axiomas de un sistema. Sin embargo, en la literatura existente al respecto no hemos logrado encontrar ninguna exigencia clara de solución de este problema en un sentido matemático. Por el contrario, los viejos esfuerzos por fundamentar la teoría de los números y el análisis en la teoría de conjuntos y ésta en la lógica tocan el núcleo mismo de toda esta problemática.[3]

Fue entonces que retomó el problema de una prueba directa de la consistencia y anunció la creación de una *teoría de la demostración* [Beweistheorie] cuyo objetivo sería someter a un análisis exhaustivo la demostración matemática.[4] No obstante, la justificación última de su proyecto la debió encontrar en el plano filosófico, donde hubo de aventurarse hasta precisar las intuiciones básicas sobre las que, considera, se apoya el conocimiento matemático. Como a continuación veremos, Hilbert halló en el apriorismo kantiano una fuente de inspiración, aunque para él el *a priori* en que se basa la matemática no va más allá de la intuición del signo.

---

[1] Hilbert, 1922. Cita tomada de la traducción al español, p. 41.

[2] Hilbert incluso va más allá de esto, al asegurar, respecto a las tendencias constructivistas, que la vía axiomática es la única capaz de hacerles justicia. Cf. Hilbert, 1922, p. 41 de la traducción al español.

[3] Hilbert, *op. cit.*, p. 43. Cuando habla de «los viejos esfuerzos por fundamentar la teoría de los números y el análisis en la teoría de conjuntos y ésta en la lógica» Hilbert se refiere a Frege y Dedekind, cuyos proyectos consideraba que estaban condenados al fracaso desde un principio.

[4] Dice al respecto: «Hemos dicho ya que para realizar nuestros objetivos tenemos que hacer de las demostraciones mismas el objeto de nuestra investigación. Nos vemos obligados así a desarrollar una *teoría de la demostración*, cuya materia de estudio la constituye el manejo y la operación de las demostraciones mismas.» [Hilbert, 1922. Cita tomada de la traducción al español, p. 53.]

En efecto, así como Russell buscó en la lógica la fuente del conocimiento matemático, extrayendo de la primera el contenido de la segunda y Brouwer la halló en la intuición temporal kantiana, Hilbert creyó encontrarla en el dominio de la intuición sensible. En particular, considera que si bien el pensamiento matemático ha de proceder con apego a la lógica, ello no significa que haya de extraer su contenido de la misma. Por el contrario, no hay tal cosa como el *pensamiento lógico puro*: la lógica es un constituyente imposible de aislar del pensamiento matemático efectivo, el cual actúa sobre un objeto que le es asegurado al margen de ella. En otras palabras, las operaciones lógicas que tienen lugar en el pensamiento matemático efectivo se aplican, no a abstracciones, sino a objetos concretos dados previamente en la intuición, cuya presencia es una condición necesaria para aplicar la lógica con seguridad. Es más, la posibilidad de ejercer el pensamiento de manera efectiva descansa en nuestra aptitud para captar dichos objetos en todos sus aspectos, que en el caso de la matemática son los signos. Estos supuestos filosóficos, básicos para su proyecto de fundamentación, Hilbert los enunció por vez primera en 1922:

> Como hemos visto, el manejo abstracto de las extensiones de conceptos y de los contenidos ha mostrado ser no sólo insuficiente, sino también bastante inseguro. Más bien, lo que se hace necesario como medida previa a la aplicación de inferencias y operaciones lógicas es la existencia en la representación [Vorstellung], como algo dado, de ciertos objetos extralógicos discretos, intuitivamente presentes antes de cualquier pensamiento como vivencia inmediata.
>
> Si la inferencia lógica ha de tener la seguridad que deseamos, estos objetos deben ser susceptibles de una visión global y completa de todas sus partes, y su postulación, distinción y sucesión deben presentarse ante nosotros de inmediato con los objetos mismos de manera intuitiva, como algo irreductible.
>
> En este enfoque, en clara y explícita oposición a Frege y Dedekind, son los *signos* mismos los objetos de la teoría de los números. Entendemos aquí por signo algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce, de las variaciones insignificantes en su trazado y que, en general y de manera segura, puede ser identificado.[5] El enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no sólo de las matemáticas puras, sino en general de todo el pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo: *en un principio era el signo*.[6]

Hilbert refrendó este punto de vista en 1925 al señalar su coincidencia con Kant: el matemático, para ejercer el pensamiento efectivo, necesita de la previa existencia de objetos concretos, presentes directamente en la intuición e irreductibles a cualquier otra cosa. Recordemos el siguiente pasaje, tantas veces citado:

---

[5] En este sentido, llamaremos "el mismo signo" a aquellos signos que tengan la misma forma [nota de Hilbert].

[6] Hilbert, 1922. Cita tomada de la traducción al español, pp. 44-45.

[...] Y ¿no estará fallando en alguna parte la inferencia lógica concreta [das inhaltliche logische Schliessen] y dejando de satisfacer nuestras expectativas cuando la aplicamos a objetos o sucesos reales?

La respuesta a esto último es definitivamente negativa. La deducción lógica concreta es absolutamente indispensable. Sólo puede conducirnos a errores cuando aceptamos construcciones conceptuales arbitrarias, en particular aquellas que se aplican a una infinidad de objetos.

Lo que en tales casos ha sucedió es que hemos usado de manera ilícita la inferencia lógica concreta, es decir, hemos hecho caso omiso de las condiciones previas y necesarias para su aplicación.

Por lo demás, en esta observación relativa a las condiciones de aplicabilidad de tales deducciones e inferencias y de la necesidad de su cumplimiento satisfactorio coincidimos plenamente con los filósofos, en particular con Kant.

Kant nos enseña, en efecto, en una de las partes centrales de su filosofía, que las matemáticas poseen un contenido [Inhalt] propio e independiente de la lógica, y que, en consecuencia, ésta no puede nunca constituir por sí sola un fundamento para aquéllas.

Se sigue de esto que los intentos de Frege y Dedekind estaban desde un principio condenados al fracaso. La existencia de algo dado en la representación, de ciertos objetos extralógicos concretos, presentes intuitivamente como vivencia inmediata, previa a todo pensamiento, es una condición necesaria para la aplicación de las inferencia lógicas y el funcionamiento de las operaciones de este tipo.

Es necesario entonces, si es que hemos de tener a nuestra disposición deducciones e inferencias lógicas confiables, que los objetos sean susceptibles de una visión global completa de todas sus partes y que su presencia, sus diferencias mutuas, su ordenación, su sucesión o su concatenación acompañe a los objetos, al mismo tiempo, como algo dado de manera inmediata en la intuición, como algo irreductible a cualquier otra cosa, como algo que no requiere de ninguna reducción.

Ésta es la concepción fundamental que, en mi opinión, resulta necesaria no sólo para las matemáticas, sino también para todo pensamiento, toda comprensión y toda comunicación científicos.

En el caso particular de las matemáticas, el objeto preciso de nuestro examen lo constituyen los signos concretos mismos, cuya forma es, en consonancia con el punto de vista que hemos adoptado, inmediatamente clara y reconocible.[7]

Para Hilbert, los objetos del conocimiento matemático no son entidades de naturaleza ontológica especial. Por el contrario, la realidad asequible al pensamiento matemático se sitúa en la esfera de lo signos concretos —únicos objetos de su conocimiento— y no en un mundo ideal, platónico. De aquí la importancia de la matemática finitista: el conocimiento matemático no puede ir más allá de lo que ésta puede alcanzar.

En lo que sigue examinamos con mayor detenimiento el punto de vista de Hilbert expresado en esta sección.

[7] Hilbert, 1925. Cita tomada de la traducción al español, pp. 94-95.

1) Para Hilbert, el error de Frege y de Dedekind al tratar de fundamentar la matemática fue que se apoyaron en suposiciones extrañas a la matemática como, por ejemplo, que la extensión de un concepto es algo dado sin más (Frege) o que existe tal cosa como el sistema de todos los objetos (Dedekind). Si algo había que aprender de todo esto, era que la matemática no podía depender de suposiciones de esta naturaleza y que debía ser ella misma la que resolviera el problema de sus fundamentos, profesando con ello una especie de *filosofía matemática*. De ahí la necesidad de la *teoría de la demostración*.

2) A fin de no incorporar la matemática al dominio de la lógica, entendida ésta con Russell, Hilbert le asigna a la primera un objeto de estudio independiente de la segunda: los signos concretos. Y si, para Russell, tanto la certeza como la exactitud de la matemática son consecuencia de su pretendida reductibilidad a la lógica, para Hilbert dicha certeza reside en la posibilidad de "captar" de inmediato y con un máximo de claridad sus objetos, lo cual no puede celebrarse sino en la intuición sensible, esto es, en el ámbito de la percepción.

Así, la solidez del pensamiento matemático descansa, según Hilbert, en la intuición del signo, la cual, en palabras de Jean Ladrière, disfruta de una «evidencia privilegiada».[8]

3) Para Hilbert, la lógica no es una disciplina autónoma con un objeto propio. Más bien, es algo común a las diversas actividades científicas, todas las cuales la desbordan de la misma manera; se trata, como dice Cavaillès, de «un constituyente, imposible de aislar, de todo pensamiento que funciona verdaderamente».[9] Es por ello que la lógica y la matemática se deben desarrollar simultáneamente, haciendo explícitos desde el principio los procedimientos lógicos aceptados.

Si la lógica llevó a contradicciones en el pasado, ello se debió a que, perdida en el vacío, se le dio un objeto falso: el infinito actual. He ahí la causa de las paradojas.

4) Hilbert no riñe con Russell y Whitehead en virtud de que su interés se centra en la teoría cantoriana y la teoría de tipos poco tiene que ver con ella. El propósito de Whitehead y Russell es reconstruir la aritmética a partir de la lógica, no la teoría de conjuntos, tarea que Hilbert considera irrealizable desde un principio. De ellos habrá de tomar su lenguaje simbólico.

5) Hilbert está persuadido de que el pensamiento finitista es infalible. Esta creencia se funda en el convencimiento de que el pensamiento finitista se adecua perfectamente a la realidad que pretende estudiar, ya que ésta le es perfectamente "visible" en todos sus aspectos.

6) En relación a los signos, se podría pensar que Hilbert les atribuye una existencia independiente del entendimiento, en un reino platónico. No obstante, desde cualquier punto de vista, esto es una

[8] Cf. Ladrière, 1957. Cita tomada de la traducción al español, p. 27.
[9] Cavailles, 1938. Cita tomada de la traducción al español, p. 92.

equivocación. La existencia a la que Hilbert hace referencia sólo acaece en el entendimiento (v. gr., cuando imaginamos los símbolos) o en la intuición sensible.

Ciertamente, en sus reflexiones Hilbert entiende por «signo» algo más general que los trazos sobre el papel. No obstante, esta consideración no la debemos entender en un sentido trascendente. Por ejemplo, cuando afirma que «el signo es algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce», no es con la intención de situarlo en un mundo ideal, sino en el lugar que de manera espontánea le otorgan los matemáticos y todo aquel que sabe leer y escribir. Si su forma es algo independiente del tiempo y del espacio, es porque así se sirven de él los matemáticos.

En efecto, sería absurdo decir, por ejemplo, que el objeto de estudio en la aritmética elemental son ciertas marcas individuales escritas en el papel o en el pizarrón, a las cuales podemos llamar *inscripciones*. Más bien, con lo que se trabaja es con clases de tales inscripciones, cuyos elementos tienen la misma forma (lo cual se expresa diciendo que son *equiformes*), aunque en la práctica tales clases se identifican con los signos concretos.

Así, un mismo signo se puede hacer presente en varios sitios a la vez, "ocurrir" en diversos lugares, tal como las letras lo hacen en esta página escrita. No obstante, al pensar los signos como clases no se pretende que estas entidades existen sin más, pues la noción de "clase de inscripciones equiformes" se desarrolla de un modo natural en el ámbito de la experiencia (por ejemplo, cuando aprendemos a leer y a escribir) y tiene como base nuestra capacidad para reconocer de manera inmediata la forma de los objetos intuidos.[10]

Podemos decir entonces que en cuanto al modo de ser de los objetos matemáticos, Hilbert adopta un punto de vista nominalista, según el cual la única realidad matemática es la de los signos concretos, evitando de este modo suponer que la matemática es conocimiento de una realidad suprasensible, constituida por entes abstractos y universales.

7) En cuanto a Kant, si bien no podemos decir que Hilbert representa la renovación de su punto de vista al interior de la filosofía matemática moderna —se podría reclamar el mismo derecho para

[10] En la frase «intuición del signo» nosotros pondríamos el énfasis en la intuición, no en el signo. Esta intuición es un hecho cotidiano en la matemática. Observamos figuras, manejamos guarismos, manipulamos expresiones simbólicas sin siquiera reparar en ello. En ocasiones llevamos a cabo largos cálculos con la sola consideración de las expresiones y algunas reglas formales para su manejo (esto es especialmente notorio en la aritmética y en el álgebra elemental). La seguridad que se tiene en el manejo de tales expresiones descansa, en última instancia, en la intuición sensible. Por ejemplo, tras observar que en la ecuación $3xy - x = 5xy - x + 2$ la expresión «$- x$» figura en ambos lados del signo «=», podemos escribir la igualdad $3xy = 5xy + 2$ (con base en la *ley de cancelación de términos iguales*) sin importar el significado de los signos «x», «=», «2», etc. ¿Cómo puede ser esto? En parte, porque la intuición sensible nos permite reconocer la misma expresión «$- x$» en ambos lados de la igualdad. Por tanto, sería absurdo pretender que el objeto de estudio es esta o aquella inscripción sobre el papel, pues en tal caso todos los signos serían distintos y no identificables como inscripciones equiformes. En todo caso, el origen de la discusión se debe al afán de explicar qué es lo que Hilbert entiende por «signo», cuando en la práctica matemática esto es algo obvio y perfectamente entendido, tan obvio que pasa desapercibido y ni siquiera es objeto de discusión.

Brouwer, que riñe con él—, en su obra filosófica hay constantes referencias y coincidencias con el filósofo de Königsberg. Por ejemplo, el «signo», tal como lo concibe Hilbert, cae dentro del concepto de *intuición pura* kantiano, aunque Hilbert no utiliza esta terminología. Dice Kant:

> Las representaciones en las que no se encuentra nada perteneciente a la sensación las llamo *puras* (en sentido trascendental). Según esto, la forma pura de las intuiciones sensibles en general, donde se intuye en ciertas relaciones toda la diversidad de los fenómenos, se hallará *a priori* en el psiquismo. Esta forma pura de la sensibilidad se llamará igualmente *intuición pura*. Así, al apartar de la representación de un cuerpo lo que el entendimiento piensa de él, —sustancia, fuerza, divisibilidad, etc.— y al apartar igualmente lo que en dicha representación pertenece a la sensación —impenetrabilidad, dureza, color, etc.— me queda todavía algo de esa intuición empírica, a saber, la extensión y la figura. Ambas pertenecen a la intuición pura, y tienen lugar en el psiquismo como mera forma de la sensibilidad, incluso prescindiendo del objeto real de los sentidos o de la sensación.[11]

En términos kantianos, los signos escritos serían intuiciones empíricas y los signos en general intuiciones puras. Podemos decir entonces que Hilbert limita la intuición espacio-temporal de Kant a configuraciones con un número finito de objetos discretos —esto es lo que Hilbert quiere decir cuando se refiere al *Anschauung*— y basa en ella su creencia de que el verdadero contenido de la matemática se encuentra en la matemática finitista.

Es precisamente esta insistencia de Hilbert en el conocimiento *concreto* lo que hace tan débil la matemática finitista, pues excluye muchas cosas que son en general aceptadas como evidentes en la teoría elemental de los números. Esta cuestión será examinada con mayor detenimiento en el siguiente inciso.

8) Hilbert ve en la reflexión finitista una forma de discernimiento intuitivo en el que el pensamiento básico y general de Kant retiene su importancia, a condición de que el *a priori* no se considere más que la expresión de ciertas condiciones preliminares e indispensables para el pensamiento y la experiencia. Esta posición la fija con toda claridad en el siguiente pasaje:

> Los filósofos han mantenido —y Kant es el clásico representante de este punto de vista— que junto a la lógica y la experiencia tenemos cierto conocimiento *a priori* de la realidad. Yo admito que en la construcción del marco teórico son necesarios ciertos discernimientos *a priori* y que éstos siempre están detrás de la génesis de nuestro conocimiento. También creo que el conocimiento matemático se apoya en última instancia en cierta clase de discernimiento intuitivo[12] [anschaulicher Einsicht] de este tipo e incluso que para construir la teoría de los números necesitamos cierta perspectiva intuitiva y *a priori*. Así, la idea más

[11] Kant, CRP, B36.
[12] En alemán el adjetivo «Anschaulich» se utiliza para indicar que algo es gráfico, expresivo, claro o evidente y el sustantivo «Einsicht» además de 'discernimiento' también significa juicio, vista, inspección, examen, comprensión, conocimiento e inteligencia. *Anschaulicher Einsicht*: «comprensión sensible» es otra traducción de las palabras utilizadas por Hilbert.

> general y fundamental de la epistemología kantiana retiene su significancia: a saber, el problema filosófico de determinar dicha perspectiva intuitiva y *a priori* y de ese modo investigar las condiciones de posibilidad de todo conocimiento conceptual y toda experiencia. Yo creo que en esencia eso ha ocurrido en mis investigaciones en torno a los principios de la matemática. El *a priori* no es otra cosa que una perspectiva fundamental, o la expresión de ciertas condiciones previas indispensables al pensamiento y a la experiencia. Pero nosotros debemos trazar en forma diferente la frontera entre lo que poseemos *a priori* y lo que se requiere de la experiencia: Kant sobrestimó el papel y el alcance del *a priori*.[13]

Tras largas consideraciones, en las que muestra cómo la epistemología, sacudida por la ciencia moderna, se vio forzada a abandonar los apriorismos espacial y temporal de Kant, Hilbert llega a la siguiente conclusión: «la teoría kantiana del *a priori* aún contiene impurezas antropológicas de las que debe ser liberada; después, sólo queda la actitud [Einstellung] *a priori* que también subyace al conocimiento matemático puro: esencialmente, la actitud finitista que he caracterizado en diverso trabajos.»[14] Esta actitud es lo que hemos caracterizado como la intuición espacio-temporal limitada a configuraciones finitas y discretas.

Otro punto espinoso es que para Hilbert la intuición del signo nos permite reconocer algunas propiedades generales de los números cuando se le aplica, por ejemplo, a los numerales. En esto difiere de Kant, quien difícilmente admitiría una opción de esta naturaleza, en la que la intuición aplicada a cierta clase de expresiones simbólicas llevaría al conocimiento de proposiciones de carácter general. No obstante, más allá de esta divergencia, Hilbert considera que el pensamiento básico y general de Kant sigue presente en la reflexión finitista. En efecto, la confianza que Hilbert deposita en la intuición del signo ya se encuentra en Kant, quien al referirse al álgebra se expresa con las siguientes palabras:

> El mismo procedimiento del álgebra con sus ecuaciones, a partir de las cuales, por reducción, produce la verdad juntamente con su prueba, aunque no es una construcción geométrica, es una construcción característica por la cual se presentan en la intuición los conceptos a través de los signos, especialmente los que se refieren a relaciones de magnitud. Aun sin atender a su elemento heurístico, este método garantiza la ausencia de errores en todas las inferencias por el hecho de poner a la vista cada una de ellas.[15]

Tal parece que Hilbert se inspiró en este pasaje al momento de idear la formalización. Al igual que en el álgebra, en un sistema formal las pruebas son figuras expuestas a la mirada y la presencia de una contradicción se manifestaría en la existencia de dos pruebas formales que concluirían en fórmulas contradictorias, de las formas A y $\neg A$. De este modo, Hilbert vio en la formalización una

---

[13] Hilbert, 1930. Cita tomada de la traducción al inglés, pp. 1961-1962.
[14] Hilbert, *op. cit*, p. 1163. En una nota al pie de página, Hilbert se refiere a [Hilbert, 1925] como uno de tales trabajos.
[15] Kant, CRP B762.

manera de transformar el problema de la consistencia en un problema relativo a un juego reglamentado de símbolos, es decir, en una cuestión que caia directamente en el ámbito de la intuición de signo.

9) En general, la actitud de Hilbert ante la matemática consiste en evitar toda postura que atribuya a sus conceptos un "contenido objetivo" más allá de lo que garantiza la evidencia sensible. Por ello su insistencia en desarrollar sus teorías dentro de un marco axiomático, para así evitar en todo momento recurrir al significado que se le pueda dar a sus términos y relaciones, ocupándose tan sólo del despliegue de dichas relaciones. Hilbert esconde detrás de la axiomática una postura antimetafísica. Y si bien no se puede decir que esta solución sea del todo satisfactoria, él la prefiere antes que verse obligado a suponer un trasmundo de esencias matemáticas o una intuición primígena que va más allá de la intuición del signo. Digamos que Hilbert actúa con incredulidad ante el problema de las esencias matemáticas y sólo adopta el mínimo indispensable para fundamentar la matemática, como implorando, *concédanme al menos la intuición del signo, pues sin ella la matemática es, literalmente, ciega y vacía.*

10) En relación al problema de los fundamentos, lo que Hilbert hace es señalar aquellas intuiciones sobre las que considera se ha de sustentar el conocimiento matemático. Al respecto, llama la atención el siguiente pasaje de Jean Ladrière:

> Si en el pasado se habían suscitado falsas evidencias fue porque se había creído poder conseguir mediante la intuición verdades o conceptos abstractos. Regresando a la intuición sensible del signo, y limitándose estrictamente a ella, puede caminarse por un terreno sólido en que la adecuación entre el pensamiento y el objeto no puede dejar de producirse, asegurando al pensamiento esta objetividad absoluta que debe constituir el ideal del matemático y de cualquier hombre de ciencia.[16]

A partir de 1922 la epistemología matemática de Hilbert tuvo como base esta posición tan radical, mucho más tajante que las de Kronecker y Brouwer quienes, más allá del finitismo, aceptan como evidentes ciertas intuiciones no necesariamente relacionadas con la sensibilidad (v. gr., intuiciones puras ligadas al principio de inducción). En este sentido, para Hilbert el único "terreno sólido" sobre el cual se puede apoyar una prueba de consistencia es la matemática finitista, pues sólo en él se puede alcanzar la certeza absoluta.[17]

---

[16] Ladrière, 1957. Cita tomada de la traducción al español, p. 28.

[17] Esta última condición es inevitable: una prueba de consistencia es una *demostración acerca de las demostraciones*, con lo que se corre el peligro de caer en la *falacia de la petición de principio*, consistente en probar algo a partir de otra cosa que no es epistemológicamente anterior a ella (en cuyo caso lo más conveniente es asumir como principio aquello que se intenta probar).

3.6 El programa de Hilbert

3.6.1 La formalización

Habiendo precisado la base sobre la que se asienta la *teoría de la demostración*, veamos cómo procede Hilbert en su intento por demostrar la consistencia absoluta de la matemática clásica. Es obvio que la axiomatización no le era suficiente: una teoría axiomática es un objeto mal definido del pensamiento y es parte esencial del pensamiento finitista el ser sólo aplicable a entidades definidas y dadas constructivamente. Ni la representación de la teoría en el ámbito de la percepción, ni el estudio de su estructura deductiva eran posibles a este nivel. Para satisfacer estas exigencias sólo había un camino: la formalización.

Respecto a esta tarea, se podría pensar que para llevarla a cabo Hilbert debió realizar un gran esfuerzo; no obstante, lo que sucedió fue lo contrario: los medios apropiados para hacerlo ya habían sido creados por Russell y Whitehead,[1] aunque por otras razones.

En efecto, en *Principia Mathematica* Russell y Whitehead habían mostrado que la matemática clásica se podía reconstruir utilizando, en lugar del lenguaje ordinario, una especie de estenografía o lenguaje simbólico en el que sus enunciados quedaban representados a manera de fórmulas. Pero sus creadores no sólo se limitaron a desarrollar dicho lenguaje, sino que fueron más lejos: reunieron suficientes evidencias como para convencerse y convencernos de que *todas las demostraciones de la matemática clásica se podían reducir a una cuantas reglas simples de razonamiento que ellos establecieron, reglas que sólo se referían a combinaciones de signos sin tomar en cuenta su significado*. Justo lo que Hilbert necesitaba. Como por arte de magia, la herramienta apropiada para formalizar la demostración ya estaba preparada, situación a la que se refiere como "un suceso afortunado", aunque no poco frecuente en la historia de la ciencia.[2] Para adaptarla a sus propósitos, Hilbert sólo tuvo que hacerle algunos cambios en la presentación.

> Es evidente —dice Hilbert— que este cálculo [lógico][3] se creó en el marco de una perspectiva completamente diferente a la nuestra. De acuerdo con este enfoque, los signos del cálculo lógico se introducen como un medio de comunicación. Resulta consecuente con el curso que hemos seguido despojar ahora a los signos lógicos, lo mismo que los signos matemáticos, de cualquier significado. Según esto, las fórmulas del cálculo lógico no poseen absolutamente ningún significado; todas ellas son ahora enunciados ideales.[4]

[1] Éstos, a su vez, siguiendo a Frege y a Peano.

[2] En particular, Hilbert menciona el caso de Einstein, quien encontró ya listo el cálculo general de invariantes al momento de desarrollar su teoría general de la gravitación.

[3] Hilbert utiliza esta voz, hoy en desuso, para referirse al sistema de Russell y Whitehead y afines. En la actualidad, por «cálculo lógico» se entiende el cálculo de predicados.

[4] Hilbert, 1925. Cita tomada de la traducción al español, p. 103

Pero, ¿en qué consiste la formalización? Básicamente, en liberar de su contenido a los símbolos que intervienen en la construcción de una teoría matemática, compensando el vacío semántico que se crea con ello con la introducción de signos complementarios y un manejo reglamentado de los símbolos, incluyendo las reglas para la deducción lógica. Por tanto, la formalización requiere que la teoría se reconstruya desde abajo, comenzando por su lenguaje. En el caso de la matemática clásica podemos describir el procedimiento como sigue:[5]

1. En primer lugar, es preciso enumerar todos los símbolos lógicos y matemáticos de la teoría. Estos símbolos, denominados *primitivos*, deben incluir símbolos especiales para las operaciones lógicas, como lo son el símbolo $\neg$ para la negación, las conectivas $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\rightarrow$ (implica) y $\leftrightarrow$ (si y sólo si), los cuantificadores $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe), un conjunto numerable de variables x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... y, por lo general, un símbolo = para la igualdad.[6]

2. En segundo lugar, es preciso caracterizar sin ambigüedad todas las combinaciones de símbolos primitivos que representan enunciados de la teoría. A estas combinaciones se les llama *fórmulas*.

3. En tercer lugar, es preciso suministrar un procedimiento que permita construir en forma sucesiva todas las fórmulas que corresponden a los enunciados demostrables en la matemática clásica. A este procedimiento de derivación formal se le llama *prueba* y a las fórmulas con él obtenidas, *teoremas*. Esto último se logra definiendo la noción de *prueba* como sigue:

i) Ciertas fórmulas, caracterizadas efectivamente y sin ambigüedad, se postulan como *axiomas* de la teoría.

ii) Ciertas reglas formales, caracterizadas efectivamente y sin ambigüedad, se postulan como *reglas de inferencia*. Cada regla de inferencia debe indicar cómo se pasa de un conjunto finito de fórmulas, llamadas *hipótesis*, a otra fórmula, llamada *conclusión*. En cada caso se dice que la conclusión se *infiere* de las hipótesis.

---

[5] La descripción la haremos en conformidad con una notación y terminología actuales. La diferencias con respecto a Hilbert son de matiz. Por ejemplo, Hilbert no especifica con detenimiento el lenguaje, su notación ha caído en gran medida en desuso, (v. gr., el símbolo ε) y su presentación axiomática se ha simplificado con el paso del tiempo. Empero, más allá de estas "desavenencias" un tanto superficiales, las ideas siguen siendo las mismas.

[6] Los símbolos propiamente matemáticos dependen, en general, de la teoría que se formaliza. Dependiendo del caso se utilizarán signos especiales para las relaciones y operaciones básicas de la teoría (v. gr., relaciones de orden, incidencia, divisibilidad, etc. u operaciones como la suma, el producto, etc.) así como constantes individuales para representar en el formalismo algunos elementos distinguidos (v. gr., el número cero, la transformación idéntica, etc.). Por tanto, deberá haber un *símbolo de función* para cada operación básica considerada, un *símbolo de relación* para cada relación básica considerada, y una *constante individual* para cada constante considerada. Básicamente, el lenguaje será el de la lógica de predicados. Nosotros no iremos a través de tantos detalles. Al respecto, el lector podrá consultar los apéndices 16 y 17.

En este contexto una *prueba* o *derivación* se define simplemente como una sucesión finita de fórmulas, cada una de las cuales es un axioma o se infiere de otras fórmulas que le anteceden en la sucesión por medio de alguna regla de inferencia. A la última fórmula de una prueba se le llama *teorema*.[7]

Un sistema de esta naturaleza constituye, en palabras de Hilbert, «un lenguaje de signos con la capacidad no sólo de dar cuenta en fórmulas de las proposiciones matemáticas, sino igualmente de expresar por medio de procesos formales las inferencias lógicas.»,[8] y añade:

> [tras la formalización] En lugar de la ciencia matemática concreta, lo que en último término obtenemos con todo ello es un inventario de fórmulas que contienen signos tanto lógicos como matemáticos, y que se ordenan según reglas definidas. Algunas de estas fórmulas corresponden a los axiomas matemáticos, y ciertas reglas (de acuerdo con las cuales ciertas fórmulas se siguen de otras) corresponden a la inferencia concreta. En otras palabras, la inferencia concreta es reemplazada por un manejo externo [äusseres Handeln] según reglas. Con ello se realiza de manera estricta el tránsito del tratamiento intuitivo e ingenuo a uno formal.[9]

Fue así como Hilbert, en su obstinación por lograr una prueba de consistencia absoluta —es decir, con base en un mínimo de suposiciones—, llegó a la idea, *reduccionista*, de que la matemática se podía condensar en un cálculo simbólico.[10] Si bien tal reducción es imposible (eso lo sabemos a partir de Gödel), podemos decir, retomando un lenguaje más cercano a la filosofía, que con la formalización lo que Hilbert logró fue convertir la inferencia lógica en algo concreto, dable en la percepción, y aislar la matemática no sólo de los falsos objetos que se le dieron en el pasado (v. gr., el infinito actual), sino de todos los objetos.

3.6.2 Posibilidad de una prueba finitista de consistencia

Ciertamente, al formalizar una teoría lo que resulta es un sistema simbólico en el que la demostración es la figura central y en el que, a diferencia de la matemática usual, cada demostración se puede examinar de manera exhaustiva. Quizá un ejemplo baste para ilustrar las diferencias entre la demostración en una teoría no axiomatizada, en una teoría axiomática y en un

---

[7] Como se ve, la empresa de la formalización requirió de dos tareas complementarias. primero, sustituir el lenguaje usual, con sus numerosas irregularidades, por un lenguaje de signos desprovistos de todo significado; segundo, describir los axiomas que habían de servir como punto de partida para la demostración y especificar las reglas de inferencia a utilizar. Ciertamente, el procedimiento recién descrito sigue teniendo vigencia en la actualidad, aunque la noción de *formalismo* se han generalizado con el concepto de *sistema formal* que exponemos debidamente en el apéndice **13** y cuya lectura consideramos indispensable.

[8] Hilbert, *op. cit.*, p. 103.

[9] Hilbert, *op. cit.*, pp. 103-104.

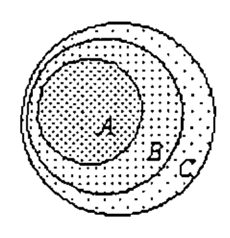
[10] Como veremos, las investigaciones de Gödel parten de la duda de que este proyecto sea factible. En cuanto al reduccionismo, véase la sección **3.6.4**.

sistema formal.[11] Para ello, consideremos un conocido teorema de la teoría elemental de los conjuntos y veamos cómo se le demuestra en cada caso. El teorema es el siguiente:

Si $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$, *entonces* $A \subseteq C$

i) prueba en la teoría informal de conjuntos

Si el conjunto A está contenido en el conjunto B, y el conjunto B está contenido en el conjunto C, entonces, tal como se muestra en la figura a la derecha, el conjunto A también está contenido en el conjunto C.



ii) prueba en la axiomática no formalizada

Por definición, $A \subseteq B$ significa que para todo a, si $a \in A$, entonces $a \in B$. Asimismo, $B \subseteq C$ significa que para todo b, si $b \in B$, entonces $b \in C$.[12]

Sea a un elemento de A.

De $a \in A$ y $A \subseteq B$ se sigue que $a \in B$. A su vez, de $a \in B$ y $B \subseteq C$ se sigue que $a \in C$. Por tanto, si $a \in A$, entonces $a \in C$. Como esto último vale para todos los elementos de A, concluimos que $A \subseteq C$, lcqd.

iii) prueba en el cálculo de predicados

A continuación mostramos una deducción en el cálculo de predicados de la fórmula $x \subseteq z$ a partir de las hipótesis $x \subseteq y$ e $y \subseteq z$ (es decir, mostramos que $x \subseteq y, y \subseteq z \vdash x \subseteq z$). En relación a los axiomas lógicos y a las reglas de inferencia, véase el apéndice 15.[13]

[11] La definición del concepto de *sistema formal* es más general y rigurosa que lo dicho en estas páginas, en donde sólo nos hemos referido a la idea de *formalizar*, es decir, de suplantar una teoría axiomática con un sistema de signos con ciertas características. Para no distraer la atención del lector con demasiadas cuestiones técnicas, hemos enviado al apéndice 13 la definición precisa de este concepto, así como un ejemplo en el que exponemos con todo detalle un sistema formal que **no** proviene de la práctica matemática. Recomendamos ampliamente su lectura a quienes no tienen un pleno dominio de estos temas. La idea es mostrar el grado de arbitrariedad que puede haber al momento de definir un sistema de esta índole y poner en relieve el hecho de que el manejo de esta clase de sistemas es puramente formal, al margen de lo que sus símbolos pudieran significar (en el ejemplo esto queda claro en virtud de que en este caso no se tiene ningún indicio de los que pudieran significar fórmulas del sistema *AB*); este ejercicio sirve, además, para ilustrar el carácter finitista de la metamatemática, que pronto habremos de abordar. Además, en los apéndices 16 y 17 el lector encontrará sendos sistemas formales para la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel y para la aritmética de Peano de primer orden.

[12] Véase al respecto el párrafo 2 de texto de Zermelo en el apéndice 8.

[13] A partir de este momento, supondremos por parte del lector cierta familiaridad con el cálculo de predicados y con la noción de sistema formal, tal como éstas se presentan en los apéndices 15 y 13, respectivamente.

Deducción formal	**Análisis de la prueba**
1. $\forall u(u \in x \rightarrow u \in y)$	hip.: $x \subseteq y$
2. $\forall u(u \in y \rightarrow u \in z)$	hip.: $y \subseteq z$
3. $\forall u(u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in y)$	Ax. λ_{10}
4. $u \in x \rightarrow u \in y$	MP 1, 3
5. $\forall u(u \in y \rightarrow u \in z) \rightarrow (u \in y \rightarrow u \in z)$	Ax. λ_{10}
6. $u \in y \rightarrow u \in z$	MP 2, 5
7. $(u \in y \rightarrow u \in z) \rightarrow (u \in x \rightarrow (u \in y \rightarrow u \in z))$	Ax. λ_1
8. $u \in x \rightarrow (u \in y \rightarrow u \in z)$	MP 6, 7
9. $(u \in x \rightarrow (u \in y \rightarrow u \in z)) \rightarrow ((u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in z))$	Ax. λ_2
10. $(u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in z)$	MP 8, 9
11. $u \in x \rightarrow u \in z$	MP 4, 10
12. $(u \in x \rightarrow u \in z) \rightarrow (\forall u(u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in z))$	Ax. λ_1
13. $\forall u(u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow (u \in x \rightarrow u \in z)$	MP 11, 12
14. $\forall u(u \in x \rightarrow u \in y) \rightarrow \forall u(u \in x \rightarrow u \in z)$	$I_\forall$ 13
15. $\forall u(u \in x \rightarrow u \in z)$	MP 1, 14. Es decir, $x \subseteq z$

Un análisis comparativo de las tres pruebas arroja los siguientes resultados. En (i), no hay ni siquiera un argumento: es suficiente con observar la figura para convencerse de que lo que se dice es verdad (o si se prefiere: la figura es el argumento). La representación gráfica es esencial en este caso, y en ella podemos descubrir, "ver", la relación enunciada por la proposición. A este nivel, para establecer un conocimiento suele ser suficiente con mostrar una imagen visual adecuada.

En (ii) ya se tiene un argumento más o menos elaborado. Para empezar, se recurre a la definición de la relación «$X \subseteq Y$» y al significado de expresiones tales como la palabra «todo»; ya no hay figuras —o éstas no forman parte de la demostración—, y se supone que el argumento se puede exponer de manera rigurosa dentro del marco de la lógica formal, es decir, llevarlo a la forma silogística, aunque esto último nunca sucede.

En (iii) todos los recursos anteriores han desaparecido. Lo único que se tiene es un despliegue simbólico sujeto a reglas muy precisas y susceptible de un análisis exhaustivo. El que una fórmula pueda figurar en una derivación ya no depende de su aceptación como "cierta" o "evidente", sino de la observancia de las reglas del juego. Aquí no se permite rechazar un argumento aduciendo que "no es convincente", pues toda consideración semántica desaparece. Por ejemplo, para verificar que la sucesión de fórmulas anterior es una deducción de $x \subseteq z$ a partir del conjunto $\Gamma = \{x \subseteq y, y \subseteq z\}$ no hace falta saber lo que significan estas fórmulas; por el contrario, lo único que se necesita es comprobar que la sucesión cumple con la definición de *derivación a partir de* Γ, es decir, que cada una de sus fórmulas es un elemento de Λ, un elemento de Γ, o se infiere de fórmulas anteriores con base en alguna de las reglas de inferencia. Esta tarea es rutinaria, y se lleva a cabo examinando la forma de las fórmulas (los pasos 1-15), no su significado, lo cual se

expresa en la actualidad diciendo que en principio la revisión la podría realizar autómata. De algún modo, en este nivel ya no hay lugar para confusiones: la intuición del signo no nos puede engañar a tal grado.

En cuanto a la intuición, si bien ésta ya no afecta al sistema en su contenido, sigue estando presente como aquello que nos faculta para reconocer los símbolos, combinarlos, y/o examinar las operaciones que se pueden realizar con ellos. En otras palabras: si bien en una teoría formal la intuición ya no interviene como un agente que proporciona verdades y conceptos abstractos, no por ello se le ha eliminado. Desplazada a otro lugar, si se quiere más elemental, ahora interviene como un factor imprescindible en el manejo externo del formalismo, como un elemento que nos permite reconocer las componentes del sistema y asegurar que las reglas del juego no han sido quebrantadas.

Volviendo al tema de la matemática clásica, es claro que Hilbert vio en la formalización un instrumento ideal para lograr una prueba de consistencia finitista. Es más, hacia 1925 ya contaba con un plan específico para tal fin,[14] mismo que presentó en 1928 como sigue:

> En la situación actual [...] el problema de la consistencia es susceptible de un tratamiento preciso. Pues el punto es demostrar que, cuando se introducen elementos ideales, es imposible que obtengamos dos proposiciones lógicamente contradictorias, A y $\neg A$. Sin embargo [...] la fórmula lógica
> $$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$$
> se sigue [en el cálculo lógico] de los axiomas para la negación. Si en ella sustituimos [...] la inecuación $0 \neq 0$ en vez de B, obtenemos
> $$(A \wedge \neg A) \rightarrow 0 \neq 0$$
> y, una vez en posesión de esta fórmula, podemos derivar $0 \neq 0$ a partir de A y $\neg A$. Por tanto, para probar la consistencia sólo necesitamos mostrar que $0 \neq 0$ no se puede obtener de los axiomas mediante las reglas de inferencia como la última fórmula de una prueba, y por ende que $0 \neq 0$ no es una fórmula derivable.[15] Esta es una tarea que en principio se halla en la provincia de la intuición, de la misma manera que en la teoría concreta de los números se halla la tarea de [...] demostrar que es imposible encontrar dos numerales a y b que satisfagan la relación $a^2 = 2b^2$, un problema en el que se debe mostrar que es imposible exhibir dos numerales que tengan cierta propiedad. Similarmente, para nosotros el punto es

[14] Cf. [Hilbert, 1925], p. 107 de la traducción al español.

[15] [N. del autor] La explicación de por qué la consistencia se sigue de la imposibilidad de derivar la fórmula $\neg(0 = 0)$ es la siguiente: en cualquier sistema formal que incluya una formalización de la lógica clásica (codificada en el cálculo de predicados), son derivables todas las fórmulas de la forma $(X \wedge \neg X) \rightarrow B$, que son tautologías. Por tanto, si fuese posible derivar una contradicción $A \wedge \neg A$, con ésta y la fórmula $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$ se podría derivar, por *modus ponens*, cualquier fórmula B. En otras palabras, en un teoría inconsistente, *todas la fórmulas son derivables*. Por tanto, bastaría con demostrar que hay una fórmula B que no es teorema para asegurar la consistencia del sistema. Hilbert, en particular, escoge la fórmula $\neg(0 = 0)$.

> mostrar que es imposible exhibir una prueba de cierta clase. Pero una prueba formalizada, al igual que un numeral, es un objeto concreto e inspeccionable.[16]

El ejemplo que Hilbert elige es aleccionador y tiene importancia histórica. Se trata de la demostración, atribuida a lo pitagóricos, de que $\sqrt{2}$ es un número irracional —es decir, que no se puede escribir como el cociente p/q de dos números enteros—; se trata, también, de la primera demostración de *inexistencia* de que se tiene noticia.

El argumento es el siguiente. Si $\sqrt{2}$ fuera un número racional, entonces habría dos números enteros a y b tales que $\sqrt{2} = a/b$. Elevando al cuadrado se obtiene la ecuación $2 = a^2/b^2$, o bien, $2b^2 = a^2$. Por tanto, el problema de escribir a $\sqrt{2}$ como un cociente se resolvería hallando dos números a y b con la propiedad de que *el doble del cuadrado de b, es igual al cuadrado de a.*

¿Será posible hallar tales números? Para responder a esta pregunta escribamos los números cuadrados en una lista, en estricto orden creciente. Supongamos que al recorrer la lista (infinita) $1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, (n + 1)^2, ...$ encontramos un número, digamos b^2, con la propiedad de que su doble también es cuadrado. Sin menoscabo en nuestro argumento, podemos suponer que b^2 es el primer número en la lista con esa propiedad, es decir, que hemos realizado la inspección con esmero. En tal caso habrá un número a^2 con la propiedad de que $a^2 = 2b^2$ (*). De la última igualdad se sigue que a^2 es un número par, y por ende que a también es par, pues los números cuadrados son como sus raíces: pares o impares (esto último era sabido por los pitagóricos). Por tanto, se tiene que hay un número c menor que a tal que $a = 2c$. Ahora bien, al sustituir $2c$ en vez de a en la ecuación (*) se obtiene la igualdad $(2c)^2 = 2b^2$, es decir, $4c^2 = 2b^2$ o, lo que es lo mismo, $2c^2 = b^2$. Así, ahora tenemos que c^2 es un número cuadrado, anterior a b^2 en la lista (pues es igual su mitad), y con la propiedad de que su doble también es cuadrado, ¡en contra de la suposición de que b^2 era el primero de ellos! Por tanto, no podemos aceptar la existencia de un número con tal propiedad, ya que al recorrer la lista de números cuadrados (en orden ascendente) y llegar al primero de ellos, ya deberíamos haber llegado antes a otro menor que él, lo cual es absurdo.[17]

La demostración anterior ha lugar en la aritmética finitista, y establece una *imposibilidad*: la de encontrar dos numerales a y b con cierta propiedad.[18] Similarmente, Hilbert pretende demostrar la consistencia de la aritmética y de la matemática clásica estableciendo otra *imposibilidad*: la de

[16] Hilbert, 1927. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 471. En el texto hemos realizado algunos cambios inocuos en la notación y en la fórmulas utilizadas.

[17] Esta es, de hecho, la primera demostración por reducción al absurdo de que se tiene noticia.

[18] Esto significa, entre otras cosas, que las demostraciones por reducción al absurdo si son admisibles en la aritmética finitista para probar que algo no existe. La razón es que para probar una *inexistencia*, los métodos de demostración no se pueden limitar a métodos constructivos, pues *lo que no existe no se puede mostrar* (¡mucho menos construir!). Curiosamente, esta es quizá la razón de que los latinos denominaron «demostración» al procedimiento lógico utilizado en matemáticas, pues el prefijo «de» significaría en este caso «alejarse de»: *de-mostrar* sería alejarse de lo que se muestra, marchar por la vía de la razon.

construir una prueba de la fórmula $\neg(0 = 0)$, lo cual tiene sentido desde el punto de vista finitista: una prueba formal es un objeto tan concreto como un numeral. Por tanto, bastaria con encontrar un argumento finitista que mostrara la imposibilidad de derivar la fórmula $\neg(0 = 0)$ —una expresión simbólica formada por seis símbolos— para resolver el problema de la consistencia con las herramientas seleccionadas.[19]

Un ejemplo de prueba finitista de consistencia. Veamos un ejemplo de prueba finitista de consistencia: la del *cálculo puro de predicados* (donde «puro» significa «sin la igualdad»).

Los axiomas del cálculo de puro de predicados (*CPP*) son los axiomas λ_1-λ_{11} del apéndice **3.7** (es decir, los mismo que del cálculo de predicados *CP* menos los axiomas λ_{12} y λ_{13} que tratan con la igualdad); las reglas de inferencia son las mismas: MP, $I_\forall$ e $I_\exists$.

Hay al respecto una prueba de consistencia basada en consideraciones semánticas. El argumento es el siguiente:

1) todos los axiomas del *CPP* (al igual que los del *CP*) son fórmulas válidas (verdaderas bajo todas las interpretaciones posibles),

2) las reglas de inferencia MP, $I_\forall$ e $I_\exists$ preservan la validez, en el sentido de que si las hipótesis de las que se parte son fórmulas válidas, la conclusión también lo es.

3) combinando (1) y (2) se tiene que todas las fórmulas que se pueden derivar del los axiomas son necesariamente válidas. Dado que una fórmula A y su negación $\neg A$ no pueden ser válidas a la vez, resulta imposible deducir fórmulas contradictorias en el *CPP* (o en el *CP*), pues ambas deberían ser válidas.

Por muy convincente que nos parezca el argumento anterior, no es ni finitista ni admisible en la teoría de la demostración de Hilbert, pues en él se apela a nociones semánticas como las de *verdad*, *satisfacción* y *validez* que no tienen ninguna legitimidad desde tales puntos de vista. No obstante, hay una prueba finitista del mismo hecho.

Consideremos la siguiente transformación sintáctica h: dada una fórmula A del cálculo de predicados, $h(A)$ es el resultado de borrar en A todos los términos (variables, constantes, simbolos

[19] En varios pasajes Hilbert establece un abierto paralelismo entre la aritmética finitista y la teoria de la demostracion, como en el siguiente: «Para la teoría intuitiva y concreta [konkret-anschaulich] de los números que hemos expuesto antes son los números los que constituyen lo objetivo y ostensivo, mientras que las demostraciones de los teoremas numéricos caen ya en el ámbito del pensamiento [gedanklich]. En nuestra investigación presente [i. e., la teoría de la demostración], la demostracion misma se convierte en algo concreto y ostensivo, las consideraciones y la argumentación concretas no tienen lugar sino a partir de la demostración.» [Hilbert, 1922. Cita tomada de la traducción al español, p. 53]. En este mismo pasaje explica la necesidad de la teoría de la demostración con las siguientes palabras, muchas veces citadas: «Así como el físico examina sus aparatos, el astrónomo sus punto de referencia y el filósofo lleva a cabo una crítica de la razón, también el matemático se ve obligado a asegurar sus teoremas, y para ello requiere de una teoría de la demostración.» [Hilbert, *Ibid.*]. En cuanto a la fórmula sugerida, $\neg(0 = 0)$, ésta se podría cambiar por cualquier otra igualdad o desigualdad numérica cuya negación fuera derivable en el formalismo, no habiendo en principio ninguna razón para escogerla precisamente a ella, a no ser su simplicidad.

de función aplicados a otros términos) y todos los cuantificadores, junto con los paréntesis y comas correspondientes. El resultado es una fórmula del cálculo proposicional. Por ejemplo,

- Si A es la fórmula $\forall x P(x, f(x))$ entonces $h(A)$ es P
- Si A es la fórmula $\forall x \exists y (R(x, y) \vee \neg S(x, f(x, y))$ entonces $h(A)$ es $R \vee \neg S$
- Si A es la fórmula $\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists z \forall x R(x, z)$ entonces $h(A)$ es $R \rightarrow R$

Nótese que la operación h es enteramente sintáctica y sólo toma en consideración la estructural formal de las fórmulas. Con un poco de paciencia se puede comprobar que h tiene la siguientes propiedades:

1) $h(\neg A) = \neg h(A)$

2) $h(A \wedge B) = h(A) \wedge h(B)$

3) $h(A \vee B) = h(A) \vee h(B)$

4) $h(A \rightarrow B) = h(A) \rightarrow h(A)$

5) $h(A \leftrightarrow B) = h(A) \leftrightarrow h(B)$

6) Si A es un axioma, entonces $h(A)$ es una tautología.[20]

7) Si $h(A)$ y $h(A \rightarrow B)$ son tautologías, entonces $h(B)$ también es tautología.

8) Si $h(K \rightarrow A(x))$ es tautología, entonces $h(K \rightarrow \forall x A(x))$ es una tautología.

9) Si $h(A(x) \rightarrow K)$ es tautología, entonces $h(\exists x A(x) \rightarrow K)$ es una tautología.

De (1)-(5) se infiere (6), es decir, que todos los axiomas del *CPP* se transforman en tautologías bajo h, y de (7)-(9) se sigue que las reglas de inferencia MP, $I_\forall$ e $I_\exists$ tienen la siguiente propiedad: si h transforma las hipótesis en tautologías, también transforma la conclusión en una tautología. Por tanto, hemos probado finitariamente que todas las fórmulas derivables en el *CPP* se convierten bajo h en tautologías, es decir, hemos probado lo siguiente:

Si A *es un teorema del* CPP, *entonces* h(A) *es una tautología.*

[20] Recuérdese que una *tautología* es una fórmula proposicional cuyo valor de verdad es "verdadero" cualesquiera que sean los valores de verdad de la letras que la componen. En este contexto la noción de "verdad" considerada no tiene ningún valor semántico, pudiéndose pensar que se trata simplemente de uno entre dos valores posibles ("verdadero", "falso") asignables a las letras y a las fórmulas proposicionales conforme al método de las tablas de verdad, que es de naturaleza sintáctica. Para no dar lugar a confusiones, algunos autores prefieren hablar de dos valores posibles, tomados del conjunto $V = \{0, 1\}$. Estas consideraciones están en la base de la lógica clásicas o *bivaluada* y se pueden extender a sistemas con mas de dos valores de verdad, como en el caso de la lógica trivalente intuicionista, o el de las lógicas polivalentes de Lukasiewicz, donde $V = \{0, 1, ..., n\}$ para algún $n > 1$. Además, el procedimiento para verificar si una fórmula proposicional es tautología es enteramente mecánico y finito, y cae por completo dentro de la matemática finitista.

Ciertamente, si los axiomas se transforman en tautologías y las reglas de inferencia preservan tal condición, entonces cualquier fórmula derivable se transforma bajo *h* en una tautología.

De lo anterior se sigue que el *CPP* es consistente.

Veamos. Para probar que el *CPP* es no contradictorio basta con mostrar una fórmula de su lenguaje que no sea derivable, lo cual, en este caso, es muy sencillo: la fórmula en cuestión puede ser cualquier *fórmula atómica.* En efecto, si *A* es una fórmula atómica del *CPP*, digamos que de la forma $R(t_1, ..., t_n)$, entonces $h(A)$ es simplemente *R*, una letra proposicional y, como sabemos, ninguna letra proposicional es tautología. Por tanto, *A* no es un teorema del *CPP*, pues de lo contrario su transformada $h(A)$ sería una tautología, lo cual, como es evidente, no es el caso. Otra prueba finitista de una imposibilidad.[21]

La demostración anterior es enteramente análoga a la ofrecida por Hilbert y Ackermann en relación a la consistencia del cálculo restringido de predicados sin igualdad.[22] En ambos casos la demostración sólo hace referencia a la forma de las fórmulas, al modo en que el procedimiento *h* las modifica y a los aspectos estructurales de las reglas de inferencia (cómo se alteran o disocian las hipótesis al aplicar las reglas); además, en ningún momento se hace llamado alguno al sentido de las fórmulas, pues todo el argumento se apoya en la evidencia sensible.

Claro está que alguien podría objetar los siguiente: "lo que realmente importa, y de ello es un ejemplo la demostración anterior, es que la selección de axiomas para el cálculo puro de predicados es correcta en relación a la noción semántica de *validez*, lo cual coloca a esta noción en un primer plano". No obstante, dos podrían ser las respuestas de un formalista. La primera, estamos convencidos, es la que daría Jacques Herbrand: "en el sentido que Ud. menciona, la demostración anterior lo único que nos hace ver es que la noción de *prueba formal en el CPP* es el sucedáneo constructivo de la más bien vaga, imprecisa e incluso *prematemática* noción de validez, que ahora podemos lanzar al cesto de la basura". Hilbert en cambio podría responder en el siguiente tenor: "De ninguna manera. Lo que hemos hecho no ha sido resolver un problema lógico, sino un problema de combinatoria: dado un sistema simbólico gobernado por tales y cuales reglas, ¿es posible producir en él ciertas combinaciones específicas de signos? Como Ud. verá, no hay nada detrás de nuestros signos (esto último, acompañado quizá por una sonrisa irónica). La importancia que Ud. atribuye al *CPP* es, en todo caso, ajena al sistema."

Ciertamente, uno de los propósitos de la formalización es despojar los símbolos de su función "evocativa", obligando al pensamiento a detenerse en ellos en vez de acceder, por su intermedio, a

[21] Esta demostración sigue los lineamientos generales del procedimiento esbozado al final de la sección 3.1.3 en relación a la consistencia de la aritmética. Véase al respecto el comentario (1) en dicha sección.

[22] El *Cálculo restringido de predicados* es aquél en el que no figuran símbolos de función, de modo que el conjunto de términos está constituido por las variables y las constantes. Cf. Hilbert y Ackermann, 1928. Cap. III, §9.

la cosa simbolizada. Esta idea la representamos gráficamente en la siguiente figura, en la que se da a entender que la interpretación de los símbolos $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$ ha sido postergada para sólo concentrar la atención en los símbolos mismos.

Con la formalización, a los símbolos se les retira la función designativa que les es propia, a fin de tomarlos como objetos últimos.

Esta idea marcha acorde con el espíritu del programa, según el cual no se debe recurrir a nada externo al sistema. En este sentido, para fijar las condiciones precisas en que se habría de dar la prueba de consistencia sólo nos falta puntualizar la relación entre los distintos actores que en ella intervienen: la matemática informal, la matemática formalizada y la *metamatemática*, que se encargaría de la prueba. De esto nos ocuparemos en la siguiente sección, en la que habremos de penetrar en el sentido último del programa y señalar algunos problemas que con el tiempo se fueron incorporando al mismo. Asistiremos también a la ceremonia de fundación de la metamatemática, que en su momento Hilbert identificó con la *teoría de la demostración*.[23]

3.6.3 La teoría de la demostración

La labor de Hilbert en torno a los fundamentos tuvo considerable importancia en el desarrollo de la lógica matemática, no tanto por los resultado concretos a los que nunca llegó, sino por el peso de los métodos de investigación que introdujo. Si hubiéramos de señalar las figuras más relevantes en este dominio, mal haríamos en no volver la mirada hacia Hilbert, pues sin los planteamientos y recursos introducidos por él la lógica moderna difícilmente habría logrado los niveles alcanzados.[24] Hilbert no sólo introdujo los sistemas formales, sino que planteó ciertas cuestiones básicas que siguen dominando las investigaciones en la actualidad: problemas de consistencia, completud y decidibilidad que antes de su intervención habían ocupado si acaso un lugar marginal, y que colocó al centro de su programa. Incluso la teoría de modelos, cuyo resurgimiento está

[23] Esta identificación perdió toda su fuerza con el paso del tiempo. En la actualidad, la teoría de la demostración desborda con mucho las restricciones impuestas por Hilbert a la metamatemática, y constituye una de las áreas mas activas de la lógica matemática, en la que se examinan numerosas cuestiones relativas a la noción sintáctica de prueba, ya sin ninguna relación con el problema de los fundamentos (o, al menos, no en el sentido de Hilbert), y en la que los métodos de prueba se extienden hasta alcanzar los de la matemática clásica en general.

[24] Por ejemplo, los teoremas de Gödel difícilmente se habrían dado sin la pertinaz insistencia de Hilbert en que la matemática se podía traducir en sistemas formales carentes de todo contenido.

vinculado al fracaso del programa y que tanto auge cobró en la segunda mitad del siglo veinte, se sirve de los métodos y conceptos de la teoría de la demostración, que de alguna manera ha irrumpido en toda la lógica contemporánea.

La noción de *sistema formal* o *formalismo* debe su importancia a que se le considera un sustituto adecuado de las teorías matemáticas al investigar sus propiedades lógicas. A partir de cierto estadio en su desarrollo, cualquier teoría matemática se puede traducir a un formalismo que, de momento, la representa con un alto grado de fidelidad. El prodigio de la formalización es que convierte cada teoría en símbolos, y a los símbolos en una petrificación de la teoría. De esta manera la teoría deviene en un objeto concreto, susceptible de un examen preciso en todas sus partes. Esta cualidad se ha subrayado en la literatura de diversas maneras, con distintas metáforas: *mosaico de fórmulas expuestas a la mirada, juego de marcas sin sentido escritas en el papel, imagen gráfica de nuestras teorías matemáticas.* Fue justamente este doble cometido lo que atrajo a Hilbert. Una formalización es dos cosas a la vez: imagen de nuestro pensamiento y reunión de signos asignificativos que se combinan y disocian según reglas establecidas:

> El juego de fórmulas que Brouwer tanto desprecia tiene, además de su valor matemático, una significancia filosófica general muy importante. Pues este juego de fórmulas se lleva a cabo de acuerdo con ciertas reglas definidas, en las que la *técnica de nuestro pensamiento* se expresa. Estas reglas forman un sistema cerrado que puede ser descubierto y establecido definitivamente. La idea fundamental de mi teoría de la demostración no es otra que describir la actividad de nuestro entendimiento, hacer un protocolo de las reglas acorde a las cuales nuestro pensamiento procede en realidad. El pensamiento, así sucede, guarda un estrecho paralelismo con el habla y la escritura: formamos enunciados y los colocamos uno tras otro.[25]

El valor de la formalización radica, entonces, en que permite expresar de manera uniforme todo el pensamiento contenido en la ciencia matemática y desarrollarlo de modo que, al mismo tiempo, se aclaren los vínculos entre los enunciados particulares. Para Hilbert, las fórmulas no son meras formas vacías: también son *imágenes de pensamientos*; las pruebas, no son tan sólo sucesiones inertes, sino *la seriación que se oculta detrás de nuestros argumentos*: «Los axiomas y teoremas, esto es, las fórmulas que surgen en estas transformaciones, son las representaciones [Abbilder] de las ideas que constituyen los procedimientos utilizados hasta ahora en las matemáticas, sin constituir ellos mismos verdades en un sentido absoluto.»[26]

Si seguimos el pensamiento de Hilbert desde los *Grundlagen der Geometrie*, hallaremos la razón por la cual su proyecto axiomático termina, necesariamente, en la formalización. Si bien todas las

[25] Hilbert, 1927. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 475.
[26] Hilbert, 1923. Cita tomada de la traducción al español, p. 65.

teorías axiomáticas ya manifiestan un orden, en ellas la sutil estructura demostrativa no es del todo explícita, pues aún falta precisar la noción de *demostración*.[27] Y la única manera de fijar esta última noción es recurriendo a la formalización: el canon de la lógica se ha de expresar bajo la forma de *reglas de transformación* que actúan directamente sobre los signos y sus combinaciones; sólo así se tendrá pleno conocimiento del modo en que procede el pensamiento matemático. Dice Hilbert: «Si alguna totalidad de observaciones y fenómenos merece ser el objeto de una investigación seria y detallada, es ésta —pues, después de todo, es parte de la tarea científica liberarnos de la arbitrariedad, de los sentimientos y los hábitos y protegernos del subjetivismo que ya se hizo sentir en el punto de vista de Kronecker y que, así me parece, encuentra su culminación en el intuicionismo.»[28] La matemática ha de sustentarse sobre una base racional, igualmente alejada del idealismo, del subjetivismo, del realismo conceptual y de cualquier otra consideración ajena a las matemáticas.[29] Es aquí donde entra en escena la teoría de la demostración, pues es a su través que el entendimiento matemático pone a prueba las leyes de su propio pensamiento.[30]

El anterior punto de vista se consolidaría tras superar un último escollo: la prueba de consistencia de la aritmética. Dice al respecto: «es la prueba de consistencia la que determina el alcance efectivo de mi teoría de la demostración y constituye su núcleo.».[31] Mas en esto había que evitar cualquier confusión: una prueba de no contradicción es una prueba acerca de las pruebas formales, un teorema sobre otros teoremas. Para distinguir los distintos niveles en que se mueve la demostración (el formal y el intuitivo), Hilbert acuñó un nuevo término y creo una nueva teoría que denominó *metamatemática*, dando a entender desde el mismo nombre que se trata de una teoría matemática acerca de las teorías matemáticas formalizadas, es decir, una teoría que trata

[27] Por ejemplo, esta situación se observa con toda claridad en el caso de la teoría de los números. En sus orígenes, esta teoría se desarrolla en contacto con imágenes geométricas e intuiciones sensibles (v. gr., los números reales como puntos de una línea recta, los números enteros como numerales, etc.), y no es sino posteriormente que se transforma en una teoría axiomática. No obstante, con ello no se logra el pleno conocimiento de la estructura demostrativa de la teoría, pues el análisis lógico lo único que produce en este caso es una ***trama de conceptos*** en la que la estructura deductiva aún se halla sujeta a determinaciones semánticas y/o subjetivas.

Por otra parte, cabe señalar que no todas las teorías matemáticas nacen de esta manera. Por ejemplo, la teoría de grupos surge de la reflexión en torno a las similitudes estructurales entre diversos dominios de la matemática. No obstante, los materiales sobre los que se forjan sus conceptos se pueden considerar como materiales empíricos que la nueva teoría subsume en ellos. Se trata de una construcción teórica en la que los objetos de origen son a su vez conceptos (raíces de ecuaciones, permutaciones. transformaciones, operaciones con matrices, etc.) que se "conocen" a través de otras teorías y sobre los que se forma un nuevo entramado conceptual a través del contacto directo con ellos. Aquí también, una vez acumulados los hechos de esta esfera particular del saber, éstos se ordenan con apego al método axiomático.

[28] Hilbert, 1927. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 475.

[29] No podemos prescindir en este punto de la cita que hicimos al final de la sección 3.4.4 acerca de la matemática como ciencia sin presuposiciones, y que rogamos al lector la lea de nuevo.

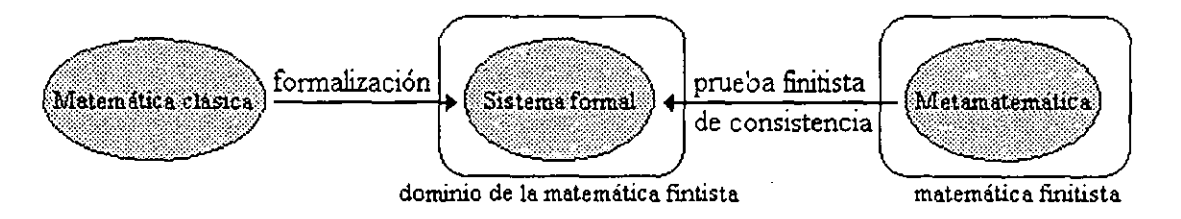
[30] La axiomatización de una teoría constituye un paso en la dirección de la abstracción. Podría parecer entonces que la formalización es un segundo paso en la misma dirección. No obstante, lo que esta última operación produce es un objeto sintáctico que se puede examinar directamente, con base en nociones susceptibles de cobrar vida en el ámbito de la sensibilidad.

[31] Hilbert, *op. cit.*, p. 479.

con las propiedades de los sistemas formales, con sus demostraciones y las expresiones que figuran en ellos.[32] La siguiente es el acta de fundación de esta nueva teoría:

> A la matemática real [eigentlich] así formalizada se añade una especie de nueva matemática, una metamatemática, necesaria para salvaguardar a aquélla y en la que, en contraposición con los métodos puramente formales de inferencia de la matemática real, la inferencia concreta es utilizada, pero únicamente para las pruebas de consistencia de los axiomas. La metamatemática trabaja con las demostraciones de la matemática real y, en realidad, éstas constituyen su objeto de investigación.
>
> Las matemáticas en general se desarrollan entonces por medio de la transición constante en dos sentidos: por una parte, obteniendo a partir de los axiomas nuevas fórmulas demostrables por medio de la inferencia formal; y por la otra, añadiendo nuevos axiomas junto con la prueba de su consistencia por medio de inferencias concretas.[33]

La seguridad en la empresa era tal que en un principio la metamatemática fue pensada como un protocolo, como una disciplina cuya función se limitaría a conducir la ceremonia de aceptación de cualquier teoría que aspirara a formar parte del reino de las matemáticas. La ceremonia sería muy sencilla y la condición de ingreso muy simple: ser consistente; además, la prueba se aplicaría en cada caso, no a la teoría misma, sino a su formalización.[34]



Esquema de la prueba de consistencia absoluta de la matemática clásica.[35]

[32] *Metamatemática:* más allá de la matemática. En la expresión utilizada, el prefijo «meta» indica con claridad la necesidad de separar los razonamientos matemáticos (representados por las pruebas formales) de los razonamientos matemáticos *acerca de* los razonamientos matemáticos. Esta distinción era muy importante para Hilbert y su inadvertencia ya había dado lugar a paradojas (entre las que se cuentan, por ejemplo, las de Richard y Berry).

[33] Hilbert, 1922a. Cita tomada de la traducción al español, p. 65. Como se ve, en manos de Hilbert la matemática se escinde en dos. Por un lado se hallan los sistemas formales, donde en lugar de deducciones materiales hay reglas formales para el manejo de fórmulas; por el otro, la metamatemática, cuyo cometido es el examen intuitivo de los sistemas formales con métodos deductivos tan sencillos y seguros que nadie pueda dudar de su corrección. Por una curiosa inversión de papeles, sólo en la metamatemática se ejerce el pensamiento efectivo, capaz de procurar una verdad, pues sólo ella posee un genuino objeto de estudio: los signos y sus agrupaciones, i. e., el sistema visto como una totalidad de derivaciones definida constructivamente.

[34] Si Hilbert considera que por esta vía habría de garantizar la consistencia de la matemática clásica, es porque parte de una suposición especial, que más adelante sería puesta en duda por Gödel: a saber, que *toda teoría se identifica plenamente con su formalización*, en el sentido de que toda proposición demostrable en la primera se traduce en una fórmula derivable en la segunda, y viceversa. Esta creencia no pude ser objeto de una demostración rigurosa, pues la noción intuitiva de *demostración* no es susceptible de una definición estricta; más bien, lo que se puede decir es que el concepto de *prueba formal* es un sucedáneo constructivo de la noción informal de prueba, el cual se considera adecuado.

[35] El diagrama presenta de manera esquemática el lugar que ocupa cada uno de los distintos actores que intervienen en la teoría de la demostración: la teoría cuya consistencia se quiere probar (en este caso la matemática clásica), la teoría formalizada y la metamatemática, esta última con el cometido de proporcionar una prueba finitista de consistencia.

Hacia el final de los años veinte todo parecía indicar que la teoría de la demostración se vería coronada por el éxito: los conceptos estaban a punto, las herramientas relucientes, los distintos actores dispuestos en su lugar; los sistemas formales parecían contener las teoría formalizadas y caían directamente en el ámbito de la percepción, el problema de la consistencia se había formulado en términos puramente combinatorios y la metamatemática lucía capaz de producir la prueba anhelada. En apariencia todo encajaba; la solución al problema de los fundamentos parecía cuestión de tiempo. Incluso se contaba con algunos avances, aunque incipientes: hacia 1927 ya se conocían pruebas de consistencia finitista para algunos fragmentos de la aritmética de Peano.[36] El tono era triunfalista. Basten algunas citas al respecto:

- «Estoy convencido de haber logrado lo que me había propuesto y había adelantado en relación a la teoría de la demostración: la eliminación definitiva del problema de los fundamentos de las matemáticas como tal.»[37]
- «Mediante este nuevo fundamento de las matemáticas, que conviene denominar teoría de la demostración, me considero en condiciones de eliminar definitivamente la cuestión de los fundamentos y transformar toda proposición matemática en una fórmula que se puede exhibir en concreto y derivar rigurosamente, lo cual traslada todo el nudo de problemas al dominio de la matemática pura.»[38]
- «Podemos decir entonces que la teoría de la demostración, cuyos rasgos principales acabamos de bosquejar, no sólo se encuentra en condiciones de dar una base firme y segura a las matemáticas, sino que también abre una vía novedosa para abordar los problemas generales de carácter fundamental que caen dentro del dominio de nuestra disciplina y a los que antes no podíamos abocarnos.»[39]

Como se colige de la última cita, la confianza depositada en los medios llevó a Hilbert a imaginar que la teoría de la demostración resolvería muchos otros problemas relacionados con la lógica y la matemática. Tres de ellos llaman la atención: el *problema del continuo*, el *problema de la completud de los axiomas de la aritmética*, y el *problema de la decisión*. La solución del primero sería una prueba de la fecundidad de los métodos utilizados; la solución del segundo, una prueba del alcance de los métodos sintácticos; la solución del tercero, una prueba del poder de la teoría. Históricamente, estos problemas ocuparon un lugar especial en el desarrollo de la lógica y fueron el motor de muchas investigaciones.[40] Para los fines que perseguía el programa, los dos últimos

[36] Las pruebas se dieron a conocer en [Ackermann, 1924] y [von Neumann, 1927]. Los fragmentos en cuestión eran el resultado de restringir el esquema inductivo a fórmulas no muy complejas, en la que la estructura cuantificacional era muy simple.
[37] Hilbert, 1927. Cita tomada de la traducción al español, p. 135.
[38] Hilbert, 1928, Cita tomada de la traducción al francés, p. 179.
[39] Hilbert, 1925. Cita tomada de la traducción al español, p. 108.
[40] Al respecto, véase el resumen que aparece en apéndice **18**.

fueron de mayor importancia que el primero, y de ellos nos ocuparemos en la siguiente sección. En cuanto al problema de continuo, de éste sólo haremos un breve comentario.

Ciertamente, una prueba de la eficacia de la teoría de la demostración sería resolver un problema para el que no había sido proyectada. Hilbert eligió para el caso el primer problema de su famosa lista de 1900, el relativo al cardinal del continuo.[41] Dice al respecto: «La prueba definitiva para la evaluación de cualquier teoría nueva la constituye su capacidad para resolver problemas planteados antes de que ella existiera, problemas cuya solución no formaba parte de las razones específicas para crearla. "Por sus frutos los conoceréis" es también un principio válido para las teorías.»,[42] a lo que más adelante añade: «La solución del problema del continuo es algo que puede realizarse con la teoría que hemos desarrollado. De hecho, la prueba de que todo problema matemático tiene una solución representa precisamente el primer paso de importancia en esta dirección.».[43]

Al comentario anterior siguió un intento por demostrar la hipótesis del continuo. Según Hilbert, la prueba quedaría lista al reformular y probar de manera finitista dos lemas que enuncia sin demostración. Obviamente, la demostración quedó por siempre inconclusa y ahora sabemos por qué: la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas del Zermelo-Fraenkel, de la misma manera en que el quinto postulado de Euclides lo es de los otros cuatro postulados.[44]

3.6.4 La completud de los axiomas de la aritmética y el problema de la decisión

Como hemos visto, la confianza de Hilbert en la teoría de la demostración lo llevó a imaginar que con ella podría probar su vieja sospecha: que *todo problema matemático tiene solución*. Esta idea suya se remonta al día en que se aventuró a decir, ante el pleno del Congreso Internacional de Matemáticas de 1900, que tal suposición tenía la jerarquía de un axioma:

> Quizá sea este importante hecho [el poder demostrar que ciertas soluciones a los problemas son imposibles] junto con otras razones filosóficas lo que da lugar a la convicción (que todo matemático comparte, pero que nadie ha respaldado con una prueba) de que todo problema matemático definido debe, por necesidad, ser susceptible de una solución exacta, ya sea en la forma de una respuesta precisa a la cuestión planteada, o mediante una prueba de la imposibilidad de tal solución y con esto del necesario fracaso de todos los intentos. [...] ¿Es este axioma de la resolubilidad de todo problema sólo un rasgo distintivo del pensamiento

---

[41] Nos referimos a la lista de 23 problemas ya mencionada al final de la sección 1.4, de la cual el problema relativo a la hipótesis del continuo ocupa el primer lugar. Hilbert se refiere a este problema como «El problema de Cantor relativo al número cardinal del continuo» (como ya vimos, el segundo es el relativo a la consistencia de los axiomas de la aritmética). En la sección 2.6.4 el lector hallará una amplia referencia al problema del continuo.

[42] Hilbert, *op. cit.*, pp. 108-109.

[43] Hilbert, *ibid.*

[44] Esto fue probado por Gödel (compatibilidad: 1938) y Paul Cohen (independencia: 1963).

> matemático, o es posiblemente una ley general inherente a la naturaleza de la mente el que todas las preguntas que hace deben tener una respuesta?[45]

Ciertamente, la teoría de la demostración ofrecía a Hilbert la esperanza de probar que todo problema matemático tiene una solución.[46] Según parece, tal expectativa tenía como base las siguientes consideraciones. En una teoría formal, la fórmula que expresa la existencia de una solución a un problema propuesto es de la forma $\exists xA(x)$. Supongamos que se tiene a la mano un procedimiento efectivo para decidir si una fórmula es o no es consistente con los axiomas. Si la fórmula anterior es consistente con los axiomas, entonces se tiene una prueba metamatemática de la posibilidad de resolver el problema y actuar en conformidad, buscando la solución o añadiendo el enunciado $\exists xA(x)$ a los axiomas. Si, por el contrario, la fórmula $\exists xA(x)$ no es compatible con los axiomas, entonces se tiene una prueba formal de que el problema no tiene solución, pues al no ser la fórmula consistente con los axiomas, su negación, la fórmula $\neg\exists xA(x)$, es derivable de los axiomas, con lo que se tiene una prueba de la irresolubilidad del problema.[47]

Lo anterior en modo alguno significa que la existencia de un método efectivo para probar consistencias implique la existencia de un método general para resolver cualquier problema, pues un problema que pregunte por la existencia de un objeto sólo está enteramente resuelto cuando se tiene una solución tangible del mismo, mientras que la consistencia de una fórmula $\exists xA(x)$ con los axiomas lo único que indica es la posibilidad de tener una solución.

Esta situación pronto condujo a dos nuevos problemas: al de la *completud de los axiomas de la aritmética*, y al *problema de la decisión*.

Veamos. La consistencia de una teoría formal establece que a partir de los axiomas y siguiendo las reglas de inferencia, nunca se llegará a dos fórmulas una de las cuales es la negación de la otra. La *completud sintáctica* de la teoría es el complemento perfecto de esta propiedad: un sistema formal es *sintácticamente completo* cuando para todo enunciado A se cumple que o él o su negación $\neg A$ es derivable en el sistema.

Claro está que el ideal de la formalización es un formalismo consistente y completo, pues en tal caso el dilema «de los enunciados A y $\neg A$, ¿cuál de ellos se verifica?» se puede *decidir* por inferencia lógica. Y así como la consistencia evita que ambos enunciados A y $\neg A$ sean derivables, la completud garantiza que se puede probar al menos uno de ellos. En tal caso, el sistema llevaría

---

[45] Hilbert, 1900. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 7. A esta proclama sigue el famoso pasaje en el que Hilbert declara que en las matemáticas no habrá *ignorabimus*, al que ya nos hemos referido en la sección **3.3.2**.

[46] El lector hallará referencias explícitas a esta cuestión en [Hilbert, 1917, p. 32 de la trad. al español; Hilbert, 1925, p. 108 de la trad. al español; Hilbert, 1927, p. 473 de la trad. al inglés y Hilbert, 1930, p. 1165 de la trad. al inglés].

[47] En efecto, en este caso se tiene que la fórmula $\neg\exists xA(x)$ es derivable a partir de los axiomas. La base de todo esto es el siguiente resultado, válido en el cálculo de predicados: si un enunciado B es incompatible con un conjunto de enunciados K, entonces $\neg B$ es deducible a partir de K, es decir, $K \vdash_{CP} \neg B$. Cabe señalar que detrás de este resultado se halla la utilización del principio del tercero excluido dentro del cálculo de predicados, una razón más para que Hilbert se aferrara a él.

a una decisión para cada problema pertinente y la investigación perdería importancia: bastaría con señalar cuál de las fórmulas A o $\neg A$ es inconsistente con los axiomas para saber que la otra es derivable en el sistema.

Se puede pensar que en el caso de la aritmética elemental Hilbert ya cuenta con la prueba de que el sistema de Peano es categórico y, por tanto, completo.[48] No obstante, la demostración de tal hecho no es de corte finitista —en ella se utilizan nociones provenientes de la teoría de conjuntos— y el sistema no está formulado en el lenguaje de la lógica de predicados, sino en el de los conjuntos. En vista de lo anterior, Hilbert se vio en la necesidad de reemplazar tal teoría de Peano con una de primer orden (véase al respecto el apéndice **17**) e intentar una prueba finitista de la siguiente proposición:

- Si a los axiomas de la aritmética se añade una fórmula (aritmética) que no es derivable en dicho sistema, entonces se puede derivar una contradicción en el sistema extendido.[49] (*)

La ventaja de esta formulación es que sólo hace referencia a las pruebas formales del sistema, no a sus interpretaciones. Detrás de la aparente sencillez del problema de la completud se ocultaba un ideal: el de determinar, para cada problema aritmético, si éste tiene solución mediante la aplicación de un algoritmo, pues, como acabamos de ver, demostrar el enunciado (*) equivaldría a demostrar que los axiomas de la aritmética constituye un sistema completo.

Otra ventaja de la formulación anterior es que pone en claro que la derivabilidad de una fórmula en un sistema sintácticamente completo es equivalente a su consistencia con los axiomas, pues si ésta no los contradice y el sistema es completo, la fórmula es derivable. Por tanto, cuando estas condiciones se cumplen, la noción de *verdad* se puede reemplazar con la noción de *consistencia*, conforme a las expectativas que Hilbert se había trazado. Si a esto añadimos que Hilbert estaba seguro de poder construir un método finitista para verificar si un sistema de enunciados es o no consistente, nos daremos cuenta de la importancia que tiene en su proyecto el problema de la completud sintáctica de los axiomas aritméticos.

La construcción de un sistema formal con tales características habría otorgado a Hilbert el derecho de arrojar por la borda la engorrosa noción de *verdad*, dejando en su lugar la más precisa noción de *prueba formal* o, mejor, la noción de *consistencia*. Esto sería el triunfo de su postura

---

[48] Un sistema categórico es lo máximo a lo que se puede aspirar al formalizar una teoría. La categoricidad lo que afirma es que todos los modelos de la teoría son isomorfos entre sí, es decir, que desde un punto de vista estructural todas sus interpretaciones son indistinguibles entre sí, difiriendo entre ellas sólo en la terminología y la notación que empleamos. Se sabe que toda teoría categórica es completa, y que lo recíproco es falso. En cuanto a las teorías de primer orden (es decir, cuyo lenguaje es el de la lógica de predicados de primer orden), sabemos, por el teorema de Löwenheim-Skolem, que ninguna teoría que tiene un modelo infinito es categórica. Al respecto, véase el apéndice **18**.

[49] Cf. Hilbert, 1928.

radical. No obstante, ahora sabemos que un formalismo completo que abarque todas las verdades aritméticas —y aquí nos disculpamos con Hilbert por utilizar la noción de *verdad*, tan prohibida en su epistemología— es una cosa imposible de hallar.[50]

Fue así como Hilbert amplió el horizonte de la teoría de la demostración, hasta incluir problemas para los que no había sido pensada. Veamos ahora el problema de la *decisión*.

Resolver este problema fue quizá el más ambicioso de todos los planes ideados por Hilbert, una ilusión nacida de una creencia: la de haber descubierto una *lingua philosophica* (el lenguaje de la lógica de predicados) y un *calculus raciocinator* (el cálculo de predicados) como los soñados por Leibniz,[51] situación que empalma muy bien con su convicción de que todo problema matemático es resoluble.[52]

Hilbert relacionó rápidamente la cuestión de la completud de los axiomas de la aritmética con la cuestión de la completud del cálculo de predicados,[53] que en principio es un problema de naturaleza lógica. En este caso por *completud* se entiende, no la *completud sintáctica*, sino la *completud semántica* del sistema, que podemos formular así:

- Si A es una fórmula del cálculo de predicados que es *válida*, entonces A es derivable en el sistema.[54]

Cuando Hilbert abordó esta cuestión en 1928 se trataba de un problema abierto.[55] No obstante, aun sin saber que la respuesta sería favorable, Hilbert se percató de que la completud referida no tenía el mismo alcance que la completud sintáctica y que, a diferencia de ésta, no garantizaba de suyo la resolubilidad en principio de todo problema matemático en el sentido recién señalado. Fue por ello que planteó el *problema de la decisión* [Entscheidungsproblem]:

---

[50] De eso trata el primer teorema de incompletud de Gödel, que pronto veremos.

[51] En un célebre manuscrito, Leibniz se refiere a la creación de una *lingua philosophica* y sobre de ella un *calculus racionator* que proporcionaría un método cuasi-mecánico de extracción de conclusiones, llegando incluso a imaginar que, una vez elaborado ese lenguaje, quienes desearan solucionar cualquier controversia sólo tendrían que tomar el lápiz y decir: *¡calculemos!*. Cf. Gerhardt, vol. 7, p. 200.

[52] Véase al respecto el comentario **(2)** de la sección **3.3.2**. Como veremos, esta creencia fue puesta en duda con los teoremas de Gödel, que de alguna manera imponen un límite a lo que se puede alcanzar con los sistemas formales. Esto lo veremos más adelante.

[53] En [Hilbert, 1928], Hilbert se refiere al cálculo de predicados como *el sistema de reglas lógicas*, mientras que en [Hilbert y Ackermann, 1928] se utiliza la expresión *cálculo funcional* que, en la segunda edición de 1937, Ackermann cambia por *cálculo de predicados*, siguiendo el uso general.

[54] *Válida* significa *verdadera en todas las interpretaciones posibles*. Al respecto, véase el apéndice 18, donde se examina esta noción con mayor detenimiento.

[55] El problema fue resuelto por Gödel en 1930, y la respuesta fue favorable: todas las fórmulas válidas del cálculo de predicados son derivables en el sistema. Al combinar este resultado con la demostración señalada en la sección **3.6.2** (toda fórmula derivable en el cálculo de predicados es válida) resulta lo siguiente: *Una fórmula A es un teorema del cálculo de predicados (CP) si y sólo si es válida*. Se tiene, pues, un cálculo completo en relación a la noción de *validez*, mas no en el sentido fuerte de que entre una fórmula y su negación, alguna de las dos es derivable. Por ejemplo, dadas una fórmula atómica $P(a)$ y su negación $\neg P(a)$, ninguna de ellas es derivable en el CP, pues ninguna de las dos es válida.

¿Habrá un método efectivo para determinar si una fórmula cerrada de la lógica de predicados de primer orden es derivable en el sistema?

El vínculo de este problema con el de la resolubilidad de todo problema matemático es el siguiente. Como sabemos —y sabía Hilbert—, si una fórmula A es derivable en el cálculo de predicados a partir de un conjunto K de enunciados, entonces hay un conjunto de fórmulas B_1, B_2, ..., B_n pertenecientes a K con la propiedad de que la fórmula $(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \rightarrow A$ es válida (digamos que las fórmulas B_1, B_2, ..., B_n son aquéllas que participan efectivamente en la derivación de A), y recíprocamente.[56]

Se tiene, pues, que los problemas de *validez* y *deducibilidad formal a partir de axiomas* están relacionados entre sí,[57] y el *problema de la decisión* se puede expresar también de la siguiente manera:

¿Habrá un método efectivo para determinar si una fórmula cerrada de la lógica de predicados de primer orden es valida?[58]

Cuando Hilbert formuló este problema, el tono del programa ya era otro: la solución del problema de la decisión sería la guirnalda de flores que coronaría el análisis de las reglas con que se conduce la razón matemática. Eran los años de la esperanza y de la fe reduccionista, que se resumen muy bien en el siguiente pasaje, más bien extenso, que ilustra a la perfección cómo llegó a creer que su programa era la panacea:

> Mi exposición de hoy muestra cuántos problemas aguardan solución [Hilbert se refiere a diversos problemas relativos a la completud, decisión, consistencia, etc. que acaba de enumerar]. Mas sobre el plan de la teoría general, incluso la más pequeña traza de ambigüedad es imposible: toda cuestión que se plantea encuentra, en el cuadro de la teoría de la demostración que he esbozado, una respuesta dotada de la precisión y la univocidad matemáticas. Las aseveraciones correspondientes son a partir de ahora demostrables de manera absolutamente segura y puramente matemática mediante los resultados ya obtenidos, y por tanto no están sujetas a impugnación. Todo aquel que pretenda refutarme

---

[56] Esto lo podemos expresar así: $K \vdash_{CP} A$ si y sólo si existe $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \subseteq K$ tal que $\models (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \rightarrow A$.

[57] En [Hilbert y Ackermann, 1928] los autores no sólo se refieren a la validez, sino a la satisfacibilidad de las fórmulas, cuestión que aquí no tocaremos dado que nuestro interés es tan sólo mostrar la clase de problemas que Hilbert intente resolver con la teoría de la demostración.

[58] Tras los trabajos de Alonso Church (1903-1995) de 1936 y siguiendo a Hilbert y Ackermann en la segunda edición de su libro *Grundzüge der Theoretischen Logik*, esto se puede expresar como sigue: *¿existe un procedimiento recursivo para las fórmulas individuales que asigne a una fórmula el valor 1 si ésta es válida y el valor 0 si no lo es?*. Cf. [Church, 1936], [Turing, 1937] y la segunda edición de [Hilbert y Ackermann, 1928]. Esta última formulación tiene la ventaja de que en ella el tema de la *decidibilidad* se relaciona con el de las *funciones recursivas*, las cuales desempeñan un importante papel en la demostración de los teoremas de incompletud de Gödel y en la lógica moderna en general. Al respecto, véase el apéndice 3.11, especialmente el apartado §8 sobre el problema de la decisión.

> debe, según una costumbre que ha prevalecido desde siempre en las matemáticas y que lo continuará haciendo en el provenir, mostrarme exactamente en qué me equivoco. [...]
>
> Creo que mi teoría de la demostración nos proporciona además un servicio de orden más general. ¿Qué sería de la verdad de nuestro saber, qué sería de la existencia y del progreso de las ciencias si no hubiera una verdad segura en las matemáticas? Es frecuente en nuestros días encontrar hasta en las publicaciones especializadas o en las conferencias públicas una expresión de duda y desánimo en cuanto a la ciencia; he ahí una especie de ocultismo que considero nefasto. La teoría de la demostración hace imposible esta actitud y nos otorga la certeza de que el entendimiento matemático no conoce límites y es capaz de poner a prueba las leyes de su propio pensamiento. Cantor decía que la esencia de las matemáticas reside en su libertad; frente a los incrédulos y los pusilánimes yo quisiera añadir: en la matemática no hay lugar para el *ignorabimus*, siempre podemos hallar respuesta a cualquier cuestión a condición de que tenga sentido, y lo que fue sin duda el presentimiento de Aristóteles se confirma: que nuestra inteligencia no se entrega a artificios misteriosos, sino que procede únicamente según reglas bien determinadas que uno puede descubrir, reglas que son al mismo tiempo la garantía de la objetividad absoluta de su juicio.[59]

Palabras de aliento frente al escepticismo, en las que a la formalización se le otorgan las dotes de un compendio exhaustivo y a la razón un poder ilimitado. En la matemática no hay *ignorabimus*, como tampoco lo habrá en la ciencia natural: «En vez del necio *ignorabimus*, nuestra respuesta es la contraria: Debemos saber, Sabremos.».[60]

Como ahora sabemos, el problema de la decisión no tuvo una respuesta favorable: en 1936-7 Alan M. Turing (1912-1954) y Alonso Church, de manera independiente, mostraron la imposibilidad de que tal procedimiento exista, al menos con los medios disponibles.[61] Esto significó un duro revés a las pretensiones de Hilbert: no hay un algoritmo para determinar la validez de las fórmulas del cálculo de predicados —*el problema central de la lógica*, en sus propias palabras—, como tampoco hay una forma mecánica para decidir, en principio, si todo problema matemático tiene o no solución.[62]

Como sea, la mayor frustración del programa no vino de este fracaso, sino de la caída de su principal objetivo: la proyectada prueba de consistencia. Esto será tema del siguiente capítulo.

Para terminar, algunos comentarios:

1) Es obvio que Hilbert no ideó el programa de un solo golpe, sino que lo fue afinando con el paso del tiempo. En [Hilbert, 1922] comenzó a utilizar los términos «teoría de la demostración» y

[59] Hilbert, 1928. Cita tomada de la traducción al francés, p. 185. En el pasaje hay un reconocimiento implícito de que la formalización es completa, aunque falta la prueba de ello.
[60] Debemos saber, Sabremos: *Wir müssen wissen, Wir werden wissen.* Éstas son las últimas palabras pronunciadas por Hilbert en su discurso de retiro como profesor en 1930, y son el epígrafe sobre su tumba. Cf. Hilbert, 1930. La cita fue tomada de la traducción al inglés, p. 1165. Recomendamos al lector que vuelva a leer el comentario (2) de la sección 3.3.2.
[61] Cf. [Church, 1936] y [Turing, 1937].
[62] A esta cuestión habremos de volver más adelante.

«metamatemáticas», y formuló su punto de vista finitista con su dramático «en un principio era el signo»; en [Hilbert, 1925] realizó un análisis del papel del infinito en la matemática, expuso con cierto detenimiento lo que entendía por *métodos finitistas*, y anunció una demostración de la hipótesis del continuo cuya terminación, dijo, sólo dependía de la prueba de un lema; en [Hilbert, 1927] presentó un sistema formal para la teoría de los números que incluía las clases transfinitas de Cantor y ofreció una formulación muy simple del problema de la consistencia para dicho sistema: sería suficiente con demostrar que la fórmula $\neg(0 = 0)$ no es derivable en él (argumento aplicable a todos los sistemas de este tipo); en [Hilbert, 1928] planteó como un reto el problema de la completud de los sistemas formales para la teoría de los números y el análisis y abordó el problema de la decisión. A estas alturas, el programa se mostraba como algo maduro, con sus métodos, objetivos, sistemas formales y soporte filosófico bien decantados. Al respecto, el lector habrá notado que nosotros abordamos el programa siguiendo un orden distinto al de su desarrollo histórico, habiéndonos referido a sus conceptos sin importar en qué orden se presentaron.

2) Hilbert confiere a la teoría de la demostración (tal como él la entiende) el rango de una ciencia, opinión con la que todo mundo estaría de acuerdo. En lo que hay discrepancias es en torno al siguiente problema: ¿lo es en la misma medida que la Aritmética o el Análisis? Según Hilbert, el lugar que ocupa es de primera importancia: «[...] el desarrollo de las matemáticas tiene lugar mediante la alternación constante de dos niveles. En primer término, obteniendo nuevos *teoremas*, esto es, nuevas fórmulas demostrables a partir de los axiomas, por medio de la inferencia formal; en segundo, añadiendo nuevos axiomas junto con la prueba de su consistencia mediante una argumentación concreta.».[63] La teoría de la demostración sería, según esto, una pieza esencial en el imprevisible desarrollo de la matemática. A lo anterior habría que agregar la siguiente acotación de Cavaillès, en la que nos advierte el alto rango que Hilbert le confiere a esta teoría: «La metamatemática, o teoría de la demostración, deviene la verdadera ciencia: sus objetos serán las reuniones de signos o fórmulas y la organización de éstos en unidades de dependencia o teorías. Es en el agrupamiento de éstas, en la adjunción de axiomas y en la prueba de su fecundidad relativa, en lo que consiste el trabajo real, capaz de procurar una verdad.».[64]

Al respecto Bourbaki opina que estas pretensiones son injustificadas:

> Una consecuencia de esto [la idea de que toda teoría se debía justificar con una prueba de consistencia] fue la creencia, muy extendida también entre los formalistas, de que la teoría de la demostración formaba parte integrante de la matemática, de la que constituía un preámbulo indispensable. Este dogma no nos parece justificado, y consideramos que la intervención de la metamatemática puede y debe reducirse a la parte muy elemental que trata del manejo de los símbolos abreviadores y de los criterios deductivos. No se pretende

[63] Hilbert, 1922. Cita tomada de la traducción al español, p. 59.
[64] Cavaillès, 1938. Cita tomada de la traducción al español, p. 98.

con esto, contrariamente a lo que decía Poincaré, "reivindicar la contradicción", sino más bien considerar, con Hadamard, que la ausencia de contradicción, aunque no se demuestre, se constata.[65]

No deja de ser extraño que mientras para algunos la teoría de la demostración es una disciplina fundamental, para otros, que también profesan una filosofía formalista, apenas si ocupa un lugar secundario al exterior de la matemática.

3) Desde el punto de vista que Hilbert adopta en los años veinte, la matemática se habrá de desarrollar siguiendo una doble pauta: derivando de los axiomas nuevas fórmulas demostrables —mediante deducciones formales— y agregando nuevos axiomas como ampliación de sus teorías, acompañados de la correspondiente prueba de no contradicción. Con ello la matemática se constituye en una disciplina autónoma y libre de desarrollarse en todas las direcciones posibles, teniendo como único límite la no contradicción. Esto no hace sino corroborar la tesis ya mencionada: en manos de Hilbert la matemática deviene la *ciencia de lo posible*. En esto, Hilbert fue el máximo defensor de la libertad y la autonomía que Cantor le confiere a la matemática.

4) En 1927 Brouwer señaló que las diferencias entre el formalismo y el intuicionismo se disiparían a partir del momento en que Hilbert aceptara las siguientes exigencias:[66]

i) La necesidad de diferenciar la construcción del "inventario de fórmulas", de la teoría intuitiva que se ocupa de las leyes de tal construcción, y reconocer que la matemática intuicionista de los números naturales es indispensable para esta última teoría.

ii) Que el principio del tercero excluido no se puede utilizar indiscriminadamente, reconociendo, primero, que la investigación de la validez de este principio es algo justificado y forma parte del núcleo de las investigaciones en torno a los fundamentos de la matemática y, segundo, que la validez de este principio en la matemática informal (intuitiva) se limita a los conjuntos finitos.

iii) Que el principio del tercero excluido se identifica plenamente con el principio de que todo problema matemático es resoluble.

iv) Que la justificación de la matemática formal mediante una prueba (intuitiva) de consistencia encierra un círculo vicioso, pues se apoya en la suposición de que *si una proposición es consistente, entonces es correcta* (i. e., no puede ser falsa en cuanto a su contenido), lo cual supone la correctud (material) del principio del tercero excluido.

[65] Bourbaki, 1969. Cita tomada de la traducción al español, p. 63.
[66] Cf. Brouwer, 1927.

En un tono conciliador, suavizando sus críticas, Brouwer añade que la escuela formalista sólo ha recibido beneficios del intuicionismo, y que debería de esperar más. «Es más, dice, la escuela formalista debería ponderar el hecho de que en el marco del formalismo *nada* de la matemática se ha asegurado a la fecha (pues, después de todo, la prueba metamatemática de la consistencia del sistema de axiomas es un faltante, hoy como ayer), mientras que el intuicionismo, [...] ha reedificado varias de las teorías matemáticas con propiedad y firmeza. Si, por lo tanto, la escuela formalista [...] ha detectado modestia por parte del intuicionismo, debería de aprovechar la ocasión para no quedar rezagada en relación a esta virtud.»[67]

Si bien Hilbert estaría de acuerdo en lo fundamental con los tres primeros puntos, el cuarto de ellos le parece simplemente inadmisible. Además, el intento de conciliación llegó demasiado tarde, justo en el momento en que Hilbert lanzaba las campanas al aire seguro de lograr lo que se había propuesto, y no sólo eso, sino en el momento en que su postura reduccionista se había agudizado al máximo, al punto de creer que el problema de la decisión estaba al alcance de la mano (un síntoma de arrebato). Por supuesto, nada fue del intento por llegar a un arreglo.

3.6.5 El programa: un resumen

Podemos resumir el programa de Hilbert como sigue:

1) Formalizar la matemática clásica.
2) Demostrar, con base en la matemática finitista, que la formalización es consistente.
3) Demostrar, en caso de que así sea, que la formalización es sintácticamente completa.
4) Construir un algoritmo para determinar la validez de las fórmulas del cálculo de predicados.

El programa se sustenta en la idea de que la matemática clásica se puede reducir a un sistema formal, es decir, que es posible formalizar por completo la matemática clásica y que la noción sintáctica de *derivación formal* es el correlato preciso de la nociones de *verdad* y *demostración* de la matemática usual. En cuanto a la prueba de consistencia, si bien no hay una definición precisa del concepto de "demostración finitista", Hilbert no considera necesario contar con tal definición, pues una vez hecho el trabajo, el análisis de los métodos utilizados descubrirá si éstos son o no satisfactorios.

Visto desde la matemática, el programa de Hilbert se presenta como un examen de la estructura lógica de la matemática clásica a fin de probar su consistencia. No obstante, el programa es también la expresión de un proyecto filosófico que podemos abreviar así:

[67] Brouwer, 1927. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 492.

Fundamentar la matemática en la intuición pura del signo[68]

Desde este punto de vista, el programa se contempla como un intento por sustentar la validez de las principales teorías matemáticas (la aritmética y el análisis) sobre una base intuitiva, ligada a la sensibilidad, y establecer este hecho al interior de la matemática misma. Así, con la realización de su proyecto Hilbert pretende resolver un problema filosófico, no mediante la discusión verbal, sino dando respuesta a cuestiones precisas, es decir, *haciendo* matemáticas. Podemos decir entonces que la posición de Hilbert es la de abrir paso a una filosofía derivada de las matemáticas, una *filosofía matemática*, en oposición a una *filosofía de las matemáticas* que buscaría ajustar el trabajo concreto de los matemáticos a posiciones tomadas desde afuera de esta ciencia.

En cuanto a las restricciones impuestas al programa, Hilbert busca satisfacer con ellas las exigencias de Brouwer, no al momento de construir las teorías matemáticas, sino al probar su consistencia, en un intento por conciliar ambas tendencias. A cambio, lo único que pide es que Brouwer acepte como algo lícito valerse de cualquier noción cuya compatibilidad con los principios constructivos de la teoría se pruebe de esta manera, propuesta que este último nunca aceptó.

Los problemas que con el paso del tiempo Hilbert anexó al programa son un signo de optimismo y pérdida de la perspectiva, sobre todo en relación a lo que se podía esperar de una empresa de tal naturaleza. Prueba de ello es el hecho de que aun sin haber logrado nada en concreto, en diversas ocasiones proclamó tener prácticamente resuelto el problema de la consistencia o el problema de la completud de los axiomas aritméticos.[69] Indudablemente, Hilbert representa una figura que no se arredra ante los problemas, pero la posteridad también lo recordará como alguien que "perdió piso" y creyó poder lograr más de lo que se podía. La forma final de su programa parece fuera de toda proporción y nos debe servir como una advertencia de que detrás de las cosas de simple apariencia se pueden ocultar enormes dificultades.

En su momento, el programa dominó prácticamente toda la escena. Para superarlo, para dar fin a su hegemonía y al radicalismo epistemológico de Hilbert, se requirió de algo más que buenas intenciones. No servia de nada continuar una polémica que en el plano filosófico ya no tenía salida. Por el contrario, había que tomarle la palabra a Hilbert y examinar los alcances de su programa en un sentido matemático, ver qué tan lejos se podía ir con los medios propuestos y así construir una filosofía matemática, una filosofía que en vez de argumentos bizantinos ofreciera

[68] En ningún lugar Hilbert hace algún señalamiento de esta índole. Más bien, se trata de una conclusión a la que llegamos a través del examen de sus ideas y del análisis de su programa.
[69] Por ejemplo, en [Hilbert, 1928], da por un hecho que la prueba del isomorfismo de los modelos de la aritmética (de segundo orden) no va más allá de la matemática finitista y de este isomorfismo se sigue la completud de los axiomas. De manera semejante, en [Hilbert, 1927], sugiere que la consistencia del análisis es cuestión de minucias, que sólo depende de la extensión finitista del método de Ackermann para la aritmética elemental restringida.

teoremas y demostraciones. En esto, Gödel fue quien mejor entendió las cosas: en vez de polemizar con él, como único argumento le presentó dos teoremas que sacudieron desde sus cimientos no sólo el programa, sino la visión que Hilbert tenía de la matemática.

Pero esto será el tema de nuestro siguiente capítulo. Por lo pronto, queremos concluir con un comentario en torno a la importancia y significación del programa.

Ciertamente, la aparición del programa fue un parteaguas en el desarrollo de la lógica y el estudio de los fundamentos de la matemática. Con él, Hilbert introdujo nociones y procedimientos inéditos que el tiempo incorporó al acervo matemático. Podemos decir, sin temor a equivocarnos, que la forma en que aborda los problemas en el programa no sólo fue original, sino enriquecedora, y que las cuestiones en él planteadas fueron y seguirán siendo el motor de múltiples investigaciones. Quizá ésta fue la principal virtud del programa: transformó los problemas *relativos* a las teorías matemáticas en problemas matemáticos.[70]

En cuanto a las aportaciones de Hilbert a la lógica y al estudio de los fundamentos, podemos decir que la más importante de todas fue la creación de una nueva rama de las matemáticas: la teoría de la demostración o metamatemática. Y si bien en este dominio la contribución de Hilbert no se puede medir por los resultados alcanzados, fue él quien trazó los caminos por donde habrían de proseguir las investigaciones.[71] En gran medida, los problemas planteados en el programa sellaron el destino de toda una generación de investigadores, y sólo desde su perspectiva se puede entender el rápido avance de la lógica matemática en los años treinta. Sin temor a equivocarnos, podemos decir que sin Hilbert muchos de los resultados obtenidos en este dominio no se habrían ni siquiera vislumbrado en ese momento, y su llegada se habría aplazado por tiempo indefinido. En particular, la mejor perspectiva de los teoremas limitativos de Gödel, Church, Tarski y Turing es desde el programa, que les da pleno sentido y significación, y en el que tienen sus raíces.

Debemos, entonces, revalorizar el programa como una fuente de ideas y métodos que cambiaron radicalmente el enfoque y el modo de analizar el problema de los fundamentos de la matemática.[72]

Ciertamente, más allá de los intentos fallidos y del fracaso del programa, Hilbert puede reclamar para sí el haber desplazado el problema de los fundamentos a otro nivel. Con vehemencia, nos

---

70 Por ejemplo, los problemas relativos a la consistencia y la completud se transformaron en problemas de combinatoria, propios de la aritmética finitista.

71 No deja de ser sorprendente que Hilbert no dejara resultados de importancia en esta área: ningún teorema lleva su nombre. Es en este sentido que su relevancia la debemos medir, no por las soluciones obtenidas, sino por el impulso que dio a las investigaciones con los problemas planteados. Hilbert merecidamente es "el padre de la metamatemática", aunque ningún teorema importante se deba a él.

72 Como bien dice Hermann Weyl, tras la intervención de Hilbert no es posible un retorno al punto de vista de Russell y Whitehead en *Principia Mathematica*. La cita exacta es la siguiente: «Sin importar lo que traiga el futuro, no cabe duda de que Brouwer y Hilbert elevaron el problema de los fundamentos a un nuevo nivel. Un retorno al punto de vista de Russell y Whitehead en *Principia Mathematica* es impensable.» [Weyl, 1944a]. Cita tomada de Reid, 1970, pp. 273-274.

enseñó que la comprensión del concepto de infinito implica entender la maquinaria transfinita con que se le maneja, y nos enfrentó a la alternativa de eliminar tal maquinaria desde la matemática finitista. También nos enseñó, junto con Brouwer, que la lógica no es un supuesto tácito en la construcción de las teorías, sino algo que debemos levantar de manera simultánea, y que el problema de los fundamentos se puede investigar sintácticamente, haciendo de las teorías un objeto de estudio. Esto significó un viraje en relación a la concepción de Frege y Russell, para quienes la idea de examinar el sistema de la lógica estaba más allá toda consideración, pues se trataba de un cuerpo de conocimientos sistematizado que lo abarcaba todo, de modo que no había lugar para consideraciones metateóricas relativas a su alcance y estructura. Tras la invención de la metamatemática podemos decir que ya no es creíble una postura de esta naturaleza, que se mira, por decir lo menos, ingenua.

Sin duda, el programa de Hilbert cambió por siempre la faz de las investigaciones; la prueba la tendremos en el siguiente capítulo, cuando veamos los teoremas de Gödel.

3.6.6 Comentarios

1) En la postura de Hilbert ante la matemática hay dos tendencias que se encuentran en un estado de tensión permanente. Por una parte tenemos su fe en las posibilidades de la razón y la disposición a admitir como objeto de estudio de la matemática cualquier sistema de objetos que la mente humana pueda concebir; por la otra, tenemos un férreo escepticismo que lo lleva a la imposibilidad de decidir si la matemática refleja o no una realidad trascendente. La tensión entre estos dos factores se manifiesta con toda su fuerza en la defensa que emprende de la matemática transfinita, en la que, sin renunciar a ninguna de sus partes, evita el realismo conceptual de Cantor.

Al parecer, las experiencias de Hilbert en la primera parte de su carrera tuvieron un significado especial en la conformación de estas dos tendencias. Cuando estudiante, tuvo la oportunidad de ahondar en la filosofía de Kant, cuya influencia en su pensamiento es innegable. Fue de él de quien asimiló el modo característico con el que mira a la ciencia, sobre todo en relación a la cautela y disposición a evitar toda suposición metafísica.[73]

[73] No debemos olvidar que Hilbert nació, al igual que Kant, en la ciudad de Königsberg, Prusia del Este, donde realizó sus estudios y se inició como docente en la universidad donde Kant fuera profesor desde 1755 hasta 1796. Como lo advierte Constance Reid en su biografía, Hilbert creció, como todos los niños de esa ciudad, «con las palabras de Kant en su mente y en sus oídos.». [Reid, 1970, p. 3]. Al respecto, sabemos que todos los meses de abril asistía, en compañía de su madre que tenía inclinación por la filosofía, al sepulcro de Kant a depositar una corona de laureles con motivo del natalicio de este pensador. Kant es el único filósofo del que Hilbert reconoce alguna influencia y las citas a él son las únicas que se multiplican en sus escritos. ~~También sabemos que en ocasión de su examen doctoral Hilbert debió defender dos tesis de su elección. Según lo consigna Constance Reid [Reid, 1970, p. 16], uno de los temas que eligió se relaciona directamente con la filosofía de Kant: *que las objeciones a la teoría kantiana de la naturaleza* a priori *de los juicios de la aritmética, son infundadas.* Esto nos muestra también que su interés por la filosofía de la matemática se remonta a su vida como estudiante.~~

En cuanto a la matemática, Hilbert fue en su vida profesional un artífice de la expansión de los métodos de demostración admitidos en ella, a la vez que un fuerte crítico de sus fundamentos.[74] Su capacidad para abordar y resolver problemas pronto le ganó fama y prestigio.[75] Quizá en ello echa raíces su convicción de que todo problema matemático es resoluble. De la física aprendió que la matemática es una herramienta fundamental en el conocimiento de la naturaleza y que como tal no se le puede limitar. De Cantor aprendió a imaginar un mundo cuya legitimidad fue puesta en entredicho por las paradojas, y se sumó a su defensa, haciendo suyo el alegato en favor de la libertad y la autonomía de la matemática.[76]

Prudencia y audacia a la vez, dos actitudes antagónicas que entraban en conflicto y que Hilbert debía conciliar. Esto lo creyó posible mediante la adopción del método axiomático y la formalización.[77]

En efecto, para reconciliar su fe irrestricta en la razón, capaz de conquistar el infinito, con la imposibilidad de resolver tales cuestiones metafísicas, Hilbert se escuda en la reconstrucción axiomática. Es por ello que identifica la existencia matemática con la no contradicción, pues de este modo evita la cuestión de si la matemática refleja o no una realidad trascendente, a la vez que deja abierta la posibilidad de tratar con entidades abstractas sin ningún significado aparente.

Este último planteamiento es independiente del programa y se le puede sostener sin necesidad de aceptar los objetivos y los principios epistemológicos que éste persigue y supone.

2) La obra de Hilbert acusa un fuerte compromiso con la matemática de su tiempo e influyó decisivamente en la perspectiva matemática de toda una generación. Tal como lo advirtiera la revista *Nature* en una recensión de su obra, difícilmente había al momento de muerte un matemático cuyo trabajo no derivara de alguna manera del de este distinguido científico.[78] Dice

---

[74] Hasta antes de la elaboración del programa, Hilbert siempre dio muestras de prudencia en el plano filosófico, y de audacia como matemático. Por ejemplo, él fue quien realizó la primera demostración en matemáticas de la *existencia* de un objeto por reducción al absurdo. Hasta entonces, todas las pruebas de este tipo habían sido constructivas, por lo que el método utilizado por él significó una verdadera extensión de los métodos de demostración matemática. El teorema en cuestión pertenece a la teoría de los invariantes algebraicos, y dice lo siguiente: *Si Σ es un subconjunto del anillo de polinomios* $k[z_1, \ldots, z_m]$, *entonces el ideal generado por Σ tiene una base finita* (Nota.- $k[z_1, \ldots, z_m]$ denota al anillo de polinomios en las variables $z_1, \ldots, z_m$ cuyos coeficientes se encuentran en k). Este resultado lo obtuvo en 1888, a la edad de veintiséis años.

[75] Hilbert alcanzó la verdadera fama tras haberse mudado a Götingen en 1895. Este lugar era entonces uno de los centros de investigación en física y matemáticas más importantes del mundo. Hilbert permaneció en él hasta su muerte, en 1943. Por tanto, más de la mitad de su vida transcurrió en este importante centro universitario, cuya fama se inició con la presencia de Gauss y se mantuvo viva a través de matemáticos de la talla de Dirichlet, Riemann, Klein y el mismo Hilbert.

[76] Es decir, de la libertad que le confiere Cantor a la matemática para escoger su objeto de estudio. Como hemos visto, esta actitud lo llevó a enfrentar la tradición constructivista, representada por Kronecker y por Brouwer, cuyas posturas le parecieron inadmisibles.

[77] Ciertamente, con la formalización el conflicto quedaría resuelto: una teoría formalizada es un objeto finitista, en el que nada importa el significado que pudieran tener sus términos primitivos. Véanse al respecto los comentarios (1), (2), (5) y (10) de la sección 3.5.

[78] La referencia a la revista *Nature* aparece en [Reid, 1970, p. 216].

Constance Reid: «Como un Alejandro [Magno] matemático, [Hilbert] dejó escrito su nombre a lo largo del mapa de las matemáticas. Ahí están, como lo advierte *Nature*, el espacio de Hilbert, la desigualdad de Hilbert, la transformada de Hilbert, la integral invariante de Hilbert, el teorema de la irreducibilidad de Hilbert, el teorema de la base de Hilbert, los axiomas de Hilbert, los subgrupos de Hilbert, el campo clase de Hilbert.» [79]

Ciertamente, son muchas la ramas de la matemática en las que este ilustre académico dejó impresa su huella. En algunos casos introdujo métodos y conceptos que permitieron importantes avances en las teorías; en otros, produjo resultados que cambiaron el rumbo de las investigaciones, como sucedió, por ejemplo, con el ya señalado teorema de los invariantes algebraicos.[80] Entre sus publicaciones más importantes se hallan un famoso libro sobre la teoría de los invariantes algebraicos,[81] el célebre e innovador *Grundlagen der Geometrie* que ya hemos comentado ampliamente, un libro sobre ecuaciones integrales,[82] un libro sobre lógica teórica (en colaboración con Wilhelm Ackermann)[83] y un libro sobre métodos matemáticos de la física (en coautoría con Richard Courant).[84]

Con base en el peso y la autoridad que tuvo en su momento Hilbert tomó en sus manos el problema de los fundamentos de la matemática. De hecho, el éxito de su empresa habría significado un salto en esta disciplina, el ingreso a una nueva fase en su desarrollo, en el que sus métodos y procedimientos se habría sistematizado a tal grado que la resolución de problemas se podría realizar de manera mecánica. Éste es el extremo al que quiso llevar el análisis del concepto de prueba, como ya se vio en la sección **3.6.3.**[85]

3) Hilbert rechaza la opinión de que el verdadero rigor sólo se puede alcanzar en la aritmética y quizá en el análisis. Por el contrario, sostiene que éste es asequible por igual en todas las ramas de la matemática, que pueden ser tratadas de la misma manera:

> [...] yo creo que sin importar de dónde provengan las ideas matemáticas, si de la teoría del conocimiento o la geometría, o de las teorías de la ciencia natural o de la física, surge el problema para la ciencia matemática de investigar los principios subyacentes a estas ideas, y por ende la cuestión de establecer para ellos un sistema simple y completo de axiomas, de manera que la exactitud de las nuevas ideas y su aplicabilidad a la deducción no será inferior en ningún sentido a aquella de los conceptos aritméticos.[86]

---

[79] Reid, *Ibid.*
[80] Véase la nota al pie # 73.
[81] *Zahlbericht* de 1897.
[82] *Grundzüge einer allegemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* de 1912.
[83] *Grundzüge der theoretischen Logik*, de 1928 (v. la sección 3.6.4).
[84] *Methoden der mathematischen Physik* de 1924 (vol. I) y 1937 (vol. 2).
[85] En cuanto al destino del programa, éste será tema del siguiente capitulo.
[86] Hilbert, 1900. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 5.

Hay en este pasaje una idea sobre la que queremos llamar la atención. Se trata de la idea de que en la matemática no hay grandes misterios, ni nada incomprensible para el hombre común. Claro está que para alcanzar un resultado primero se le debe conjeturar y demostrar, todo lo cual requiere de una gran dosis de creatividad e imaginación. Sin embargo, una vez en posesión de un teorema, éste tendrá como sostén un argumento racional que no encierra ningún misterio: en la matemática no hay lugar para los arcanos.

De hecho, Hilbert llegó al extremo de creer que todos los medios demostrativos a nuestro alcance —"la técnica de nuestro pensamiento", como dice en la cita de la sección **3.6.3**— se podrían formalizar de una vez por todas. Su error consistió en suponer que esto se podría lograr de manera exhaustiva. ~~Como veremos, tras los teoremas de Gödel sabemos que la matemática estará por siempre abierta a la posibilidad de incorporar nuevos métodos de demostración —nuevas *técnicas de pensamiento*— en cada fase de su desarrollo. Sin embargo, y a pesar de esta falsa apreciación, las ideas de Hilbert constituyeron en su momento una refutación del subjetivismo intuicionista.~~ Dejaron en claro que cualquier individuo armado de tiempo y paciencia puede entender cualquier demostración, pues ésta consistirá en una sucesión ordenada de pasos lógicos. A su vez, esto último lo llevó a la idea de que la demostración matemática es mecanizable.[87]

En nuestros días estas ideas, al igual que los métodos desarrollados a partir de la propuesta de Hilbert, han conducido al desarrollo de interesantes estrategias de búsqueda de pruebas para conjeturas con base en la inferencia formal. A la disciplina que se ocupa de estos menesteres se le conoce como *demostración automática de teoremas*, una rama especializada de las ciencias de la computación. Se trata de un dominio en el que las ideas de Hilbert sobre la formalización han sido fructíferas y muestran su verdadero alcance.

---

[87] *Mecanizable*: que se puede llevar a cabo mediante la aplicación un reducido número de reglas fijas. Esta noción la debemos distinguir de *automatizable*, en la que además se exige que el orden de aplicación de las reglas esté determinado de antemano, como sucede en la demostración automática de teoremas.

Capítulo 4

Gödel

4.1 El espíritu de una época: verdad y demostrabilidad

La primera vez que Hilbert oyó hablar de Gödel fue en 1930. Un año antes, a los veintitrés años de edad, este joven matemático había demostrado que el cálculo de predicados de primer orden es completo, en el sentido de que toda fórmula válida es derivable en él.[1] Esta demostración era una solución al problema planteado por Hilbert y Ackermann en 1928 y marchaba acorde con las expectativas del programa: las leyes de la lógica clásica estaban codificadas plenamente en dicho cálculo y no se requería de ningún axioma lógico adicional para asegurar que las consecuencias lógicas de cualquier conjunto de hipótesis se podían derivar con base en él. No obstante, Gödel no era un seguidor incondicional del programa, como lo era Herbrand, y a un tiempo que demostraba el teorema de completud extendida, consideraba la posibilidad de que en *Principia Mathematica* y sistemas afines hubiera problemas irresolubles, enunciados indecidibles.

4.1.1 la introducción de 1929

Gödel demostró el teorema de completud como parte de su disertación doctoral en 1929, y lo dio a conocer en 1930 en un artículo que coincide en lo básico con dicho trabajo.[2] No obstante, en el texto de 1930 Gödel omite la introducción de su trabajo doctoral, en la que muestra sus dudas respecto a los puntos de vista de Hilbert y Brouwer.[3] En ella, Gödel aborda de manera crítica la cuestión de la resolubilidad de todo problema matemático y sugiere la posibilidad de probar la existencia de problemas irresolubles para un sistema formal.

Gödel afirma que el teorema de completud es, en cierto sentido, el complemento teórico del método usual para probar la consistencia de un sistema de axiomas mediante la exhibición de un modelo. Para aclarar esta cuestión hagamos un recuento de los resultados que entran en juego. En primer lugar tenemos el teorema de completud mismo:

i) *Toda fórmula válida perteneciente al lenguaje del cálculo de predicados es derivable en dicho sistema.*

[1] Ya nos hemos referido a este resultado en la sección 3.6.4.
[2] V. Gödel, 1930.
[3] Cf. Gödel, 1929 y Gödel, 1930. La tesis doctoral de Gödel no se publicó sino después de su muerte en [Gödel, 1986]. Según parece, la omisión de la introducción tuvo como causa el rechazo de Gödel a la crítica y a la discusión de sus puntos de vista, una actitud prudencial muy bien caracterizada por Solomon Feferman en un célebre trabajo en el que, justamente, aborda esa extraña mezcla de convicción y cautela de la que Gödel siempre hizo gala. Cf. Feferman, 1988.

Junto a esta presentación del teorema tenemos la forma *extendida*, que es en realidad la que Gödel demuestra en su trabajo. Esta segunda versión pone de manifiesto la relación existente entre la noción semántica de *modelo* y la noción sintáctica de *derivación formal*:

ii) *Todo conjunto infinito numerable de enunciados de la lógica de primer orden o tiene un modelo, o contiene un subconjunto finito cuya conjunción es refutable.*

Asimismo, Gödel hace referencia a un teorema demostrado por Skolem en 1922, el cual resulta equivalente al teorema de completud extendida:

iii) *Si un conjunto de enunciados pertenecientes a la lógica de primer orden es consistente, entonces tiene un modelo.*

La afirmación de que el teorema de completud extendida es el complemento teórico del método usual para probar consistencia (el método de los modelos), Gödel la apoya en que dicho teorema «nos garantiza que en cada caso el método conduce a su meta, es decir, que uno debe ser capaz de producir una contradicción o probar la consistencia por medio de un modelo.».[4] No obstante, Gödel advierte que la existencia del modelo en cuestión no tiene un soporte constructivo: «Sin duda, la existencia de esta alternativa no está demostrada en el sentido intuicionista (es decir, mediante un procedimiento de decisión)».[5] En efecto, la posibilidad de disponer de un modelo es sólo teórica, pues no se cuenta con un procedimiento efectivo para construirlo. Esta última observación le da pie a Gödel para confrontar las posturas de Brouwer y Hilbert y poner de manifiesto la propia.

Como sabemos, Hilbert acepta como existente cualquier noción introducida mediante un sistema de axiomas que sea consistente. Brouwer, por el contrario, juzga que las pruebas de consistencia no tienen ningún valor y las desestima como signo de la existencia de las nociones implicadas; es más, rechaza las pruebas de consistencia como algo fuera de control y sostiene que éstas ni siquiera aseguran la corrección del sistema.[6] Como a continuación veremos, Gödel se aparta tanto de la ciega creencia de Hilbert en el poder de los métodos formales, como del desdén que Brouwer profesa hacia la formalización.

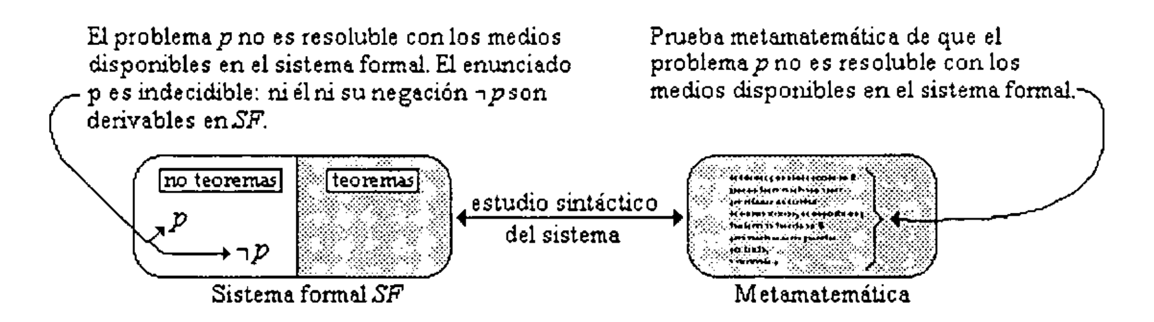
Gödel comienza relacionando la definición de existencia matemática que Hilbert propone con la cuestión de la resolubilidad de todo problema matemático:

---

[4] Gödel, 1929. Cita tomada de la traducción al inglés, p. 61.
[5] Gödel, *ibid*, nota al pie #2.
[6] En distintos lugares Brouwer traza una clara línea divisoria entre lo que llama teorías *correctas* y teorías *consistentes*; uno de ellos es el siguiente: «No necesitamos de ninguna manera desesperarnos por alcanzar esta meta [la prueba de consistencia], pues nada de valor matemático se logra con ello: una teoría incorrecta, incluso si no puede ser inhibida mediante una contradicción que la refute, no es por ello menos incorrecta, lo mismo que un plan de acción criminal no es menos criminal cuando no puede ser frenado por una corte que lo pudiera inhibir.» [Brouwer, 1923. Cita tomada de la traducción al ingles, p. 336].

> Sin embargo, esta definición [de existencia matemática] [...] presupone claramente el axioma de que todo problema matemático es resoluble. O, para ser más precisos, presupone que no podemos probar la irresolubilidad de cualquier problema, pues si se probara la irresolubilidad de algún problema (en el dominio de los números reales), entonces, de la definición anterior se seguiría la existencia de dos realizaciones no isomorfas del sistema axiomático para los números reales, mientras que por la otra parte podemos demostrar que dos realizaciones cualesquiera son isomorfas entre sí. No obstante, no podemos excluir del todo una prueba de la irresolubilidad de un problema si observamos que lo que está en juego es tan sólo la irresolubilidad de un problema mediante ciertos medios de inferencia formales establecidos con precisión, pues todas la nociones que aquí consideramos (derivable, consistente, y así sucesivamente) sólo tienen un significado exacto cuando hemos delimitado con precisión los medios de inferencia admitidos. Incidentalmente, estas reflexiones están destinadas tan sólo a aclarar las dificultades que estarían conectadas con tal definición de la noción de existencia, sin hacer ninguna aseveración definitiva acerca de su posibilidad o imposibilidad.[7]

Del pasaje anterior sólo queremos resaltar dos aspectos. Por una parte, que el argumento de Gödel —según el cual la noción de existencia matemática propuesta por Hilbert presupone la resolubilidad de todo problema matemático— es equívoco. Por otra parte, destacar la idea en ciernes de que *pudiera haber problemas no resolubles con los medios de inferencia formal establecidos, cuya irresolubilidad se pudiera demostrar mediante un razonamiento metamatemático*.



Esquema en el que se ilustra la idea de Gödel. Un problema p puede ser irresoluble en *SF*, y haber una prueba metamatemática de que tal es el caso.

En lo que sigue consideraremos por separado estas cuestiones, pues en cierto sentido son independientes una de la otra. Como veremos, aunque Hilbert efectivamente sostuvo el principio de que todo problema matemático es resoluble, el argumento que Gödel presenta

[7] Gödel, 1929. Cita tomada de Gödel, 1986, pp. 61-63.

es inexacto, pues no contempla la distinción entre lógica de primer orden y lógica de segundo orden que se encuentra tras los teoremas en que apoya su razonamiento.

A. El argumento de Gödel

Gödel sostiene lo siguiente: que la definición de existencia matemática como ausencia de contradicción presupone el principio de que todo problema matemático es resoluble.

El argumento sería *mutatis mutandis* el siguiente.

Supongamos que se acepta la definición de existencia matemática como *ausencia de contradicción*, a la vez que se acepta la posibilidad de que haya problemas irresolubles, digamos en el sistema de los números reales $\mathfrak{R}$.

Sea p un problema irresoluble en dicho sistema. Dado que ni p ni su negación $\neg p$ son derivables de $\mathfrak{R}$, las teorías axiomáticas $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R} \cup \{p\}$ y $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R} \cup \{\neg p\}$ son consistentes y, por lo tanto, cada una de ellas tiene un modelo, digamos M_1 y M_2, respectivamente. Nótese que ambas realizaciones son modelos de $\mathfrak{R}$, pues tanto $\mathfrak{R}_1$ como $\mathfrak{R}_2$ lo incluyen como subsistema. No obstante, M_1 y M_2 no son isomorfos entre sí, en contra de lo que establece el teorema que demuestra la categoricidad de $\mathfrak{R}$, pues M_1 realiza al enunciado p, mientras que M_2 realiza su negación $\neg p$.[8]

Por lo tanto, no podemos asumir la existencia de problemas irresolubles, y dado un enunciado p perteneciente al lenguaje del sistema o bien p o bien $\neg p$ es derivable a partir de $\mathfrak{R}$, es decir, $\mathfrak{R}$ es completo.

El argumento anterior se apoya en el supuesto de que todas las realizaciones del sistema de los números reales son isomorfas entre sí y tienen la misma estructura, por lo que sus elementos se pueden poner en correspondencia biunívoca de modo tal que los elementos correspondientes obedezcan a las mismas leyes y reglas.[9]

---

[8] Aquí, Gödel asume que $\mathfrak{R}$ es una teoría de segundo orden, pues sólo así puede aducir la categoricidad del sistema, haciendo valer un teorema que pertenece a la lógica de segundo orden. El sistema $\mathfrak{R}$ podría incluir, por ejemplo, el *axioma del supremo*.

[9] Al respecto, consúltese la sección 1.3.3, en donde se explica con mayor detenimiento el concepto de *categoricidad*. De hecho, el que una teoría sea categórica es lo máximo que podemos esperar de ella, pues esta propiedad implica incluso la completud del sistema. Cuando dos modelos son isomorfos, podemos decir que en realidad se trata de la misma estructura, es decir, que los modelos son idénticos entre sí salvo por el "color" de sus elementos. Por ejemplo, los números reales se pueden construir como cortaduras de Dedekind (i. e., conjuntos de números racionales) o como sucesiones de Cauchy (i. e., sucesiones de números racionales), obteniéndose en ambos casos lo mismo, es decir, dos estructuras en las que los elementos básicos se pueden mapear uno a uno mediante un isomorfismo que preserva el orden y las operaciones aritméticas. Recordemos que en la matemática la naturaleza específica de los objetos considerados es irrelevante, siendo lo único importante la manera en que éstos se relacionan entre sí.

No obstante, esto sólo sucede para el sistema de los números reales cuando sus axiomas se enuncian en un lenguaje de segundo orden, en el que además de cuantificar sobre individuos se pueden construir enunciados universales sobre todos los conjuntos de números reales o todas las funciones de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}$.[10] En tal caso, y sólo entonces, se puede demostrar que todas las realizaciones del sistema son isomorfas entre sí.

Una objeción al argumento de Gödel es que la lógica de segundo orden no se considera adecuada en relación a los fundamentos de la teoría de los números reales, pues su semántica presupone una fuerte dosis de teoría de conjuntos. Y sin el teorema del isomorfismo, que más que a la lógica pertenece al álgebra, el argumento de Gödel se viene abajo, pues en el caso de la lógica de primer orden sucede exactamente lo contrario: con base en el teorema de Löwenheim-Skolem, sabemos que ninguna teoría (formulada en un lenguaje de primer orden) que tenga un modelo infinito puede ser categórica.[11] Esta falta de distinción entre propiedades de primer y segundo orden es una muestra del estado en que se encontraban las investigaciones lógicas en aquel momento y no podemos inculpar a Gödel por ello; además, una vez hecha la distinción, podemos decir que ésta sólo afecta localmente el razonamiento de Gödel, no a sus objeciones en torno al concepto de existencia matemática en Hilbert.

B. La cuestión de la irresolubilidad

Sin lugar a dudas, de las propuestas que Gödel arriesga en la introducción a su disertación doctoral, la más significativa es la de probar que un problema matemático es irresoluble con los medios disponibles en un sistema formal. Esta idea equivale a sugerir la existencia de proposiciones indecidibles en relación a un sistema axiomático. En este sentido Gödel es muy claro al señalar que la irresolubilidad no es una cuestión absoluta, sino relativa, y que

[10] Por ejemplo, el axioma de inducción para la aritmética de los números naturales se expresa en un lenguaje de segundo orden como sigue:

$$\forall X \subseteq N([0 \in X \wedge \forall z(z \in X \rightarrow sz \in X)] \rightarrow X = N)$$

[Paráfrasis: Para todo conjunto X de números naturales, si 0 pertenece a X y para todo número z, si z pertenece a X entonces el sucesor de z también pertenece a X, entonces X es el conjunto N de los números naturales.] Nótese que en este caso el cuantificador "$\forall z$" se refiere a números naturales, mientras que el cuantificador "$\forall X$" se refiere, no a números naturales, sino a conjuntos de números naturales, de modo que el axioma de inducción se hace valer para todos los subconjuntos de N. En cuanto a la lógica de primer orden, donde no se permite cuantificar conjuntos de números, sino únicamente individuos, el axioma de inducción, característico de los números naturales, lo tenemos que enunciar para cada fórmula individual $A(x)$ que se pueda construir en su lenguaje:

$$(A(0) \wedge \forall z[A(z) \rightarrow A(sz)]) \rightarrow \forall z A(z)$$

[Paráfrasis: Si 0 tiene la propiedad A, y para todo número z, si z tiene la propiedad A, entonces el sucesor de z también tiene dicha propiedad, entonces todos los números naturales tienen la propiedad A]. Nótese que en este caso el axioma sólo se hace valer para aquellos conjuntos $X \subseteq N$ que son definibles mediante una fórmula $A(x)$ del lenguaje, más no para el resto, lo cual permite tener modelos de los axiomas de Peano que no coinciden con lo que tradicionalmente entendemos como "números naturales".

[11] Respecto al teorema de Löwenheim-Skolem, véase el apéndice 18, en especial la sección §2.

para hablar de este problema es necesario especificar los medios considerados. Sin lugar a dudas el comentario está dirigido a Hilbert, quien aborda la cuestión de la resolubilidad, no desde el punto de vista de algún medio específico, sino a la luz de todos los medios imaginables, lo cual para Gödel no tiene ni pies ni cabeza: «[...] parece cuestionable que una noción de resolubilidad tan holgada —y, en consecuencia, la interpretación del principio del tercero excluido que entra aquí en la discusión— tenga siquiera algún sentido.»[12]

Ciertamente, Hilbert maneja la noción de *resolubilidad* en un sentido absoluto. Cuando afirma que en la matemática no hay lugar para el *ignorabimus* o que siempre podremos hallar la respuesta a cualquier problema, no hace ninguna acotación a los medios demostrativos, pues para él la matemática está abierta a incorporar todo lo que se considere necesario para tal fin. No obstante, este planteamiento del problema lo hace intratable desde un punto de vista matemático, pues la cuestión de la resolubilidad se presenta más como un acto de fe que como un asunto que se pudiera investigar de manera precisa. Justamente, lo que Gödel propone es sacar el problema de este contexto y ubicarlo en el horizonte matemático.

Podemos decir entonces que cuando Gödel concluyó su tesis doctoral ya consideraba como una posibilidad real la existencia de proposiciones indecidibles en el sistema de los números reales,[13] perfilando con ello la línea de investigación que a la larga lo llevaría a los teoremas de incompletud. Ciertamente, en este trabajo ya se levantan los espectros de la incompletud y la irresolubilidad. No deja de llamar la atención que estas ideas se le hayan ocurrido a Gödel justo en el momento en que, paradójicamente, parecía contribuir a la consecución del programa con su prueba de completud para el cálculo de predicados.

4.1.2 El espíritu de la época

Cerramos esta sección con un comentario relativo al ambiente intelectual en que Gödel se desenvolvía por aquellos años y la actitud que asumió. En una carta fechada el 7 de diciembre de 1967 y dirigida a Hao Wang (1921-1996), Gödel dice lo siguiente:

> El teorema de completud es en realidad una consecuencia casi trivial del teorema de Skolem. Sin embargo, el hecho es que en aquel momento nadie (incluyendo al mismo Skolem) sacó la conclusión (ni del teorema de Skolem, ni, como yo lo hice, de consideraciones similares propias) [...] Esa ceguera [...] de los lógicos era en verdad sorprendente. Pero pienso que la explicación no es difícil de hallar. Ésta yace en la

[12] Gödel, 1929, nota la pie # 4. Cita tomada de Gödel, 1986, p. 65.

[13] Recordemos que una proposición A es *indecidible* cuando ni ella ni su negación son derivables a partir de los axiomas.

falta, bien difundida en ese momento, de la actitud epistemológica requerida hacia la metamatemática y el razonamiento no finitista. [...] La susodicha inferencia a partir del teorema de Skolem es en definitiva no finitista, al igual que cualquier otra prueba de completud para el cálculo de predicados. Por tanto, estas cosas no eran advertidas o eran pasadas por alto.[14]

Ciertamente, el teorema de completud de Gödel entraba en conflicto con el espíritu de la época, pues comprendía nociones semánticas como las de *satisfacción* y *verdad* (con las que se define la noción de *modelo*) que eran mal vistas o consideradas como extrañas a la investigación matemática en aquel momento.[15] Lo mismo se puede decir del *teorema de finitud* o *compacidad*, que Gödel demostrara en 1930 y cuya importancia no fue reconocida sino muchos años después.[16] En gran medida, el desinterés por estos resultados se debió a su carácter enteramente semántico. De hecho, Gödel ni siquiera intentó una definición de los conceptos implicados. En una carta sin fecha y jamás enviada a un estudiante de nombre Yossef Balas, aparece un párrafo tachado en el que Gödel explica que «[...] a consecuencia de los prejuicios filosóficos de nuestro tiempo: 1) nadie estaba en busca de una prueba de consistencia relativa [del análisis] porque se consideraba axiomático que una prueba de consistencia tenía que ser finitista para que tuviera sentido, 2) el concepto de verdad matemática como contrapuesto al de demostrabilidad era visto con gran recelo y ampliamente descartado como carente de sentido.».[17]

No sólo Gödel se refiere en estos términos al ambiente que privaba en aquellos tiempos. Por ejemplo, Carnap, que dentro de la tradición del empirismo lógico tuvo el atrevimiento de abordar algunas cuestiones semánticas, comenta que cuando invitó a Alfred Tarski a hablar acerca de la noción de verdad en los lenguajes formalizados en un congreso internacional, Tarski manifestó cierto recelo, «pues creía que la mayoría de los filósofos, incluso aquellos que trabajaban en lógica moderna, no sólo se mostrarían indiferentes, sino hostiles a la explicación del concepto de verdad.»[18] y añade: «En el Congreso se hizo evidente, en las reacciones ante los trabajos presentados por él y por mí, que las suspicaces

---

14 Wang, 1974, pp. 8-9.

15 Véase, por ejemplo, Herbrand, 1930, pp. 175-176 de la traducción al inglés.

16 El teorema es el siguiente: *Un conjunto Γ de enunciados tiene un modelo si y sólo si todo subconjunto finito Γ_0 de Γ tiene un modelo.* Véase el apéndice 18, §2 y §10.

17 Wang 1987. Cita tomada de la traducción al español, p. 137. Lo que sí se sabe es que Gödel escribió esta carta después del 27 de mayo de 1970, pues esa fecha aparece en una carta que Balas le envió a Gödel con algunas preguntas que este último intentaba responder.

18 Carnap, 1963. Cita tomada de Schilpp, 1963, pp. 61-62. El Congreso en cuestión era el Congreso Internacional para la Filosofía Científica, el cual se llevó a cabo en el mes de septiembre de 1935. El hecho de que para entonces los teoremas de Gödel no hubieran logrado una mayor apertura hacia las cuestiones semánticas es una prueba de lo poco difundido que éstos estaban, de la mala comprensión de su significado y de la negativa de algunos investigadores a abandonar la línea del programa, creyendo que aún había alguna posibilidad de escapar a las devastadoras consecuencias de los teoremas limitativos.

predicciones de Tarski eran correctas [...] Había una vehemente oposición incluso por parte de los filósofos amigos nuestros.».[19] Carnap concluye diciendo que «para los lectores jóvenes es difícil imaginar cuán fuertes eran en un principio el escepticismo y la resistencia activa en contra.»[20] Según parece, las cosas no eran fáciles para quienes no se ceñían a los lineamientos del programa de Hilbert o a la visión del empirismo lógico, empeñados en el análisis sintáctico del lenguaje.

Como quiera que sea, Gödel decidió no enfrentar abiertamente tal oposición. En silencio, sobrellevó el embate formalista acariciando una visión distinta de la matemática que, según su propio testimonio, le guió en las investigaciones. Gödel era un defensor del realismo conceptual y osaba suponer que la matemática era trascendente, que iba más allá de nuestra limitada experiencia.[21] Fue desde tal perspectiva que abordó los problemas relativos a los fundamentos de la matemática, ahondando más que cualquier otro en las bases de esta disciplina. Como resultado nos legó un penetrante análisis del papel de la formalización en la matemática y un claro discernimiento de sus limitaciones.

Como veremos, aunque el camino por el que Gödel llegó a sus teoremas estaba colmado de consideraciones semánticas, él supo presentarlos de manera que nadie pudiera negar su validez. De esto nos ocuparemos en la siguiente sección.

---

[19] Carnap, *Loc. cit*, p. 62

[20] Carnap, *Ibid.*

[21] Quienes se sorprenden al descubrir el realismo de Gödel no se detienen a considerar que detrás de él hay una legítima convicción, tan antigua como la matemática misma: la de que sus regiones vitales versan sobre ideas que tiene existencia propia. Esta creencia la fortaleció tras sus investigación en torno a los fundamentos de la matemática, en las que vislumbró una matemática real, incompletable e inagotable.

4.2 Los teoremas de Gödel

Gödel dio a conocer sus famosos teoremas de incompletud en 1931, en un escrito que no excede de las veinticinco cuartillas y que cambió por completo nuestra forma de ver la matemática.[1] Dichos teoremas reúnen grandes atributos: profundidad, belleza, sobriedad e innovación; en ellos, Gödel establece hechos de limitación al método axiomático y circunscribe lo que se puede esperar de él, fijando así una base para la crítica filosófica.

En un lenguaje no técnico, podemos resumir estos teoremas como sigue. Sea *M* un sistema formal para la matemática clásica. Si *M* es consistente, entonces:

> **G1.** (Primer teorema de incompletud) *Se pueden encontrar enunciados aritméticos* A *de naturaleza relativamente simple tales que ni* A *ni su negación* ¬A *son derivables en* M.

> **G2.** (segundo teorema de incompletud) *La fórmula* C *que enuncia la consistencia de* M *no es derivable en* M, *es decir, el sistema no puede formalizar ninguna prueba de su consistencia.*

Como es evidente, estos resultados marchan en la dirección contraria a la del proyecto de Hilbert, el cual aspira, primero, a una formalización *completa* de la matemática clásica y, segundo, a una *prueba elemental* de su consistencia. Estas cuestiones serán examinadas con detenimiento en los apartados **4.3.1** y **4.3.2**; por ahora, nos limitaremos a señalar algunos puntos de importancia en relación a los teoremas mismos, no a su lectura filosófica.

1) En primer lugar, la noción de *verdad* se oculta detrás del enunciado **G1**, pues en un sentido intuitivo alguno de los enunciados *A* y ¬*A* es verdadero. Podemos decir entonces que lo que establece **G1** es la incapacidad del sistema *M* para probar todos los enunciados verdaderos que se pueden formular en su lenguaje y reescribir el teorema como sigue:

> **G1'**. *Si* M *sólo demuestra enunciados aritméticos verdaderos, entonces se pueden encontrar proposiciones aritméticas* A *de naturaleza relativamente simple que el sistema* M *no puede decidir.*[2]

Este último enunciado hace intervenir la noción semántica de *verdad* en vez de la noción sintáctica de *consistencia* y es una versión semántica del primer teorema de Gödel.

[1] El trabajo se titula «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwander Systeme I» [Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines I] y fue recibido el 17 de noviembre de 1930 para su publicación en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, donde apareció en 1931 en el número 38, pp. 173-198.

[2] Por la forma en que se construyen los enunciados *A* y ¬*A*, es muy fácil darse cuenta cuál de ellos es verdadero y cuál es falso, bajo la hipótesis de que el sistema es correcto (o consistente, según sea el caso).

Como hemos señalado, Gödel ideo sus teoremas pensando en la noción de verdad, y en el fondo lo que demuestra es que la noción de «ser un enunciado aritmético verdadero» no se puede formalizar por completo, que la verdad y la demostrabilidad son dos nociones no coincidentes en el caso de la matemática.

2) En segundo lugar, tenemos que el teorema **G2** hace referencia a una fórmula *C* que enuncia la consistencia de *M* ¿Cómo puede ser esto? ¿Cómo puede una fórmula aritmética expresar la consistencia de un sistema formal? Estas dudas se aclararán a su debido tiempo. Por ahora lo único que podemos decir es que Gödel descubrió un camino para traducir los enunciados pertenecientes a la metamatemática en enunciados aritméticos, siendo uno de ellos el que afirma la consistencia de *M*. A su vez, dado que el sistema *M* permite la formalización de la aritmética, el enunciado en cuestión se puede formalizar en una fórmula *C* que, como Gödel demuestra, no se puede derivar en el sistema *M*. Por consiguiente, *M* no puede probar su propia consistencia.

3) Por último, una aclaración. Los métodos de demostración utilizados por Gödel no van más allá de la matemática constructiva. Por tanto, los seguidores del programa no pueden descalificar la prueba como "carente de sentido".

La justa comprensión de los teoremas de Gödel exige dos tareas complementarias: primero, incursionar en la técnica y la estructura de la demostración, no sólo por su delicado diseño, sino porque todo análisis detallado de los teoremas pasa por ella y exige su inteligencia; segundo, ignorar la prueba y ponderar los alcances de los teoremas mismos. De esto nos ocuparemos en las siguientes secciones.

4.2.1 El camino hacia el descubrimiento[3]

Antes de abordar el tema de la demostración de los teoremas, queremos reconstruir el camino que Gödel siguió hacia su descubrimiento. Al respecto, en la obra y correspondencia póstuma de Gödel —así cómo en las entrevistas y conversaciones que Hao Wang sostuviera con él— hay suficiente información como para dar cuenta de lo sucedido.[4]

Por su propio testimonio, sabemos que en un principio el propósito de Gödel no era destruir el programa, sino explorar su alcance.[5] En cuanto a las restricciones impuestas por

---

[3] En realidad, este y el siguiente apartado constituyen un análisis de la línea de pensamiento seguida por Gödel en torno a dos problemas: primero, ¿cómo diferenciar entre sí la verdad y la demostrabilidad en la matemática?; segundo, ¿cómo expresar la metateoría de un sistema formal en el sistema formal mismo? cuestión esta última que debería incluir nociones como la de consistencia. Al respecto, dichos apartados constituyen una aproximación gradual a la respuesta, por lo que el lector encontrará en ellos la inevitable repetición de ideas propia de estas tareas.

[4] Al respecto, consúltese [Dawson, Jr., 1997], [Gödel, 1995], [Rodríguez, 1994] y [Wang, 1987 y 1996].

[5] Véase al respecto la cita que hacemos a continuación de una carta escrita por Gödel hacia 1970.

Hilbert, éstas le parecieron un tanto arbitrarias, sobre todo la exigencia de que las pruebas de consistencia fueran directas y se llevaran a cabo dentro de los estrechos marcos de la matemática finitista. Claramente, estas limitaciones obedecían al radicalismo extremo de Hilbert y contrastaban con la prueba de consistencia que él mismo había ofrecido para la geometría en 1899, donde se sirvió libremente de las nociones de *verdad* y *modelo*, ahora excluidas y vistas con recelo.

Al respecto, Gödel decidió abordar la cuestión de la consistencia del análisis desde una perspectiva más holgada, dividiendo el problema en dos partes. En la primera, intentaría una prueba de consistencia relativa para el análisis construyéndole un modelo en la aritmética; después, intentaría probar la consistencia de la aritmética de manera absoluta. En este contexto, por "aritmética" lo que Gödel entendía era la aritmética de Peano de segundo orden, en la que también se consideran variables para los conjuntos de números naturales.

Gödel pronto se dio cuenta de que para el caso, había que aclarar la relación entre las nociones de *verdad* y *demostrabilidad*.[6] En la misma carta a Jossef Balas donde se refiere a los "prejuicios filosóficos de nuestro tiempo", Gödel explica cómo fue que el problema de la consistencia relativa del análisis lo llevó a considerar la necesidad de definir en la aritmética la noción de *verdad* para sus enunciados:

> La ocasión para comparar verdad y demostrabilidad fue un intento por lograr una prueba de consistencia relativa del análisis en la aritmética. Esto nos lleva casi por necesidad a tal comparación. Pues un modelo aritmético del análisis no es otra cosa que una $\in$-relación aritmética que satisface el axioma de comprensión:
>
> $$\exists n \forall x(x \in n \leftrightarrow A(x))$$
>
> Ahora, si en la anterior "$A(x)$" se reemplaza con "$A(x)$ es derivable," tal $\in$-relación se puede definir fácilmente. Por tanto, si la verdad fuera equivalente a la derivabilidad, habríamos alcanzado la meta. Sin embargo (y éste es el factor decisivo) de la solución **correcta** a las paradojas semánticas se sigue que la "verdad" de las proposiciones de un lenguaje *no puede ser expresada* en el mismo lenguaje, mientras que la derivabilidad (siendo una relación aritmética) *sí puede*. Ergo verdadero $\not\equiv$ derivable.[7]

---

[6] En efecto, en un formalismo completo, la noción de demostrabilidad se puede considerar el sucedáneo constructivo de la más bien imprecisa noción de verdad siempre que el sistema sea correcto, es decir, a condición de que sea imposible derivar en él enunciados que bajo su significado usual sean falsos (en realidad, el que un sistema sea incorrecto lo único que muestra es que éste no es una formalización de la teoría en cuestión). Cuando la formalización de una teoría es completa, la noción de «ser derivable en el sistema» es equivalente a la noción de «ser verdadera en la teoría» y las nociones son "intercambiables" entre sí. A causa de ello muchos seguidores del programa, dando por descontado que la formalización de la matemática clásica era completa, dejaron de utilizar la palabra «derivable» en relación a los teoremas y se refirieron a ellos como *fórmulas verdaderas*, pues identificaban la primera noción con la segunda. Uno de ellos, quizá el más notable, fue Herbrand, que vio en la noción de verdad una noción prematemática. Véase al respecto lo dicho en la sección 3.6.4.

[7] Gödel, carta a Jossef Balas, (GN 010015.37, carpeta 01/20) [Nota. En la referencia bibliográfica anterior, el código entre paréntesis se refiere a la clasificación de la obra no publicada de Gödel (su *Nachlass*), la cual se halla en la

Aclaremos lo dicho en este pasaje. Denotemos con R el sistema de los números reales, con S la aritmética de Peano de segundo orden, y con L_R y L_S sus respectivos lenguajes. Un modelo de R en S sería una interpretación de los enunciados de L_R en L_S en la que los axiomas de R corresponderían a enunciados derivables en S, es decir, se interpretarían como enunciados "verdaderos" según S. Al respecto, una posibilidad era interpretar los números reales como *conjuntos* de números naturales, y para el caso Gödel consideró los conjuntos *definibles*, es decir, los subconjuntos X de N para los que hay un predicado aritmético $A(x)$ con la propiedad de que $X = \{k \in N \mid A(k)\}$.[8]

Ahora bien, como sólo hay un número numerable de fórmulas en L_S (pues el lenguaje es numerable), los predicados de L_S se pueden poner en correspondencia uno a uno con los números naturales y formar con ellos una sucesión $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$, ...;. Esta enumeración de los predicados monádicos permite definir una relación aritmética "$\in$" entre pares de números (uno de los cuales es el índice n) como sigue:

$$k \in n \equiv_{\text{def}} A_n(k) \qquad (*)$$ [9]

[Paráfrasis: k "pertenece" a n si y sólo si la proposición $A_n(k)$ es verdadera.]. De esta manera, la noción conjuntista de *pertenencia a un conjunto* quedaría reducida a la noción de *verdad* relativa a ciertas funciones proposicionales. La conclusión era obvia: para construir el pretendido modelo de R en S era necesario contar en el lenguaje de la aritmética con una definición de la noción de *verdad* para los enunciados de L_S. Al considerar tal posibilidad, Gödel pronto se dio cuenta de que dicha noción no se podía definir en L_S, pues de lo contrario se tendría algo semejante a la paradoja del mentiroso y la aritmética sería inconsistente. En la susodicha carta a Jossef Balas, Gödel vincula este descubrimiento con el de sus teoremas: «Tiempo antes [del descubrimiento de los teoremas limitativos] había

Biblioteca Firestone de la Universidad de Princeton]. La cita fue tomada de [Dawson, 1997], p. 61 y en ella hicimos algunos cambios superficiales en la notación para adecuarla a la utilizada en este texto.

[8] Es decir, identificando los números reales con los conjuntos X de números naturales que se pueden definir mediante un predicado $A(x)$. *Grosso modo*, esto conjuntos son los que se pueden precisar enunciando una propiedad que es satisfecha sólo por sus elementos. Algunos ejemplos de conjuntos aritméticos definibles son los siguientes:

1. El conjunto N de los números naturales: $N = \{x \in N \mid x = x\}$
2. El conjunto I de los números impares: $I = \{x \in N \mid \exists y(x = 2 \cdot y + 1)\}$
3. El conjunto Q de los números pares: $Q = \{x \in N \mid \exists y(x = 2 \cdot y)\}$
4. El conjunto P de los números primos: $P = \{x \in N \mid x > 1 \wedge \forall y(\exists z(y \cdot z = x) \rightarrow (y = 1 \vee y = x))\}$
5. Si $p(x)$ es un polinomio, el conjunto R_p de sus raíces enteras no negativas: $R_p = \{x \in N \mid p(x) = 0\}$

En realidad, la mayor parte de los conjuntos considerados en la práctica matemática son definibles, aunque en ocasiones recurrimos a algunos que no lo son, como los que resultan del axioma de elección.

[9] Esta relación $(*)$ es la señalada por Gödel como una "$\in$-relación" en la cita anterior. Una lectura de la $\in$-relación es la siguiente: Paralelamente a la sucesión de predicados $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$, ... se define una sucesión de conjuntos C_1, C_2, ..., C_n, ... con la propiedad de que $k \in C_n$ si y sólo si k tiene la propiedad $A_n(x)$.

encontrado la solución *correcta* a las paradojas semánticas en el hecho de que la verdad en un lenguaje no se puede definir en él mismo.».[10]

Como en seguida veremos, el enunciado indecidible de Gödel se inspira en la paradoja del mentiroso y en la definición de "número richardiano".[11]

4.2.2 La prueba heurística

A continuación exponemos una prueba heurística del primer teorema de Gödel siguiendo una línea de razonamiento muy cercana a la expuesta en [Gödel, 1931?]. Se trata de un bosquejo del procedimiento mediante el cual se demuestra que *todo sistema axiomático* S *con un número finito de axiomas que contenga a la aritmética de los números naturales, es incompleto.*[12] Además, por la forma del argumento, es fácil ver que lo mismo se cumple para cualquier sistema axiomático con un número infinito de axiomas, a condición de que el conjunto de axiomas esté generado por una regla constructiva.[13] Como veremos, en todo sistema formal *S* que satisfaga estas condiciones es posible construir un enunciado indecidible.[14]

La demostración se apoya en el hecho de que los enunciados metamatemáticos relativos a la derivabilidad en el sistema, *se pueden expresar indirectamente en el lenguaje de la aritmética*. Ésta es la piedra angular del argumento. Al respecto, Gödel desarrolla un procedimiento que en ciertos aspectos evoca el método de las coordenadas de Descartes y Fermat. Se le conoce como *aritmetización de la sintaxis*, pues con su ayuda es posible traducir la metateoría de los sistemas formales al lenguaje de la aritmética.

---

[10] Gödel, carta a Jossef Balas. *V.* nota al pie #5. Cita tomada de [Wang, 1996, p. 271]. Históricamente, quien dio a conocer este resultado fue Tarski en 1933, cuando lo demostró como un corolario al teorema de Gödel (v. el apéndice 18, §6), por lo que se le conoce como *Teorema de Tarski*. Al respecto, ahora sabemos con toda certeza que Gödel lo obtuvo en 1930, precisamente por el camino que ahora explicamos, aunque esto no se hizo público sino muchos tiempo después. De la época sólo se cuenta con una carta de Gödel dirigida a Zermelo, con fecha el 29 de octubre de 1931, en la que expone una prueba exacta de que la verdad en un lenguaje no es definible en él (v. Grattan-Guinness, 1979).

[11] Al respecto, véase la sección 3.1.2.

[12] Técnicamente, por "aritmética de los números naturales" se entiende la aritmética recursiva. Véase el apartado §6 del apéndice 18.

[13] Es decir, mediante una ley que asocia a cada número natural *n* un axioma que puede ser escrito de manera efectiva. Al respecto, todos los sistemas formales establecidos para las matemáticas caen dentro de alguna de estas categorías, incluyendo *Principia Mathematica*, *ZFC*, los sistemas de la escuela de Hilbert, la aritmética de Peano de primer orden (es decir, el sistema *AP* de la sección §4 del apéndice 18) y el sistema *RR* de Raphael Robinson para la aritmética recursiva, que sólo tiene catorce axiomas (respecto a este último, véase [Mendelson, 1979, p. 167]).

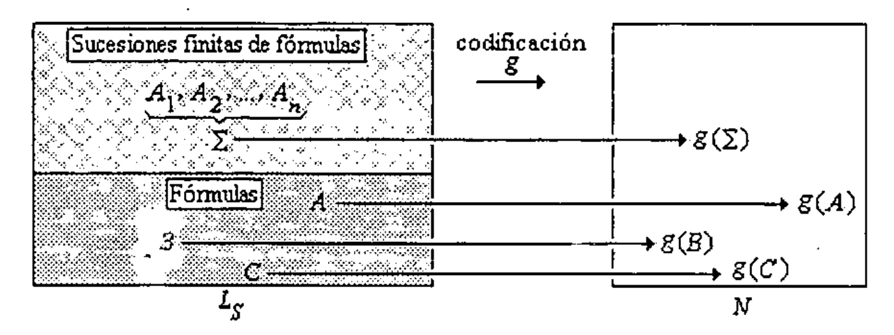
[14] De hecho, el enunciado en cuestión forma parte de la aritmética elemental, y se puede escribir con la sola ayuda de las operaciones de adición y multiplicación y las conectivas lógicas «no», «y», «o», «implica», «si y sólo si», «todo» y «existe» (donde los cuantificadores «todo» y «existe» sólo se refieren a números naturales). En breve: el enunciado indecidible sólo comprende conceptos pertenecientes a la *aritmética de primer orden*.

En realidad, lo que Gödel hace es mostrar cómo, para cada sistema formal S, se puede establecer una función g que asigna de manera efectiva a cada fórmula y a cada sucesión finita de fórmulas de L_S (entre las que se encuentran las pruebas) un número, denominado *número de Gödel* de la fórmula o sucesión. Esta función se puede definir de modo que:

i) sea uno a uno o *inyectiva*, es decir, que a distintos objetos les asigne distintos números;

ii) sea *invertible*, es decir, que toda vez que se especifique un número natural se pueda determinar si éste es el numero de Gödel de algún objeto y, en caso de que lo sea, sea posible señalar cuál es ese objeto.

Estas características hacen de la correspondencia de Gödel un *código*, es decir, un sistema de reglas que permiten convertir datos de una representación simbólica en otra.



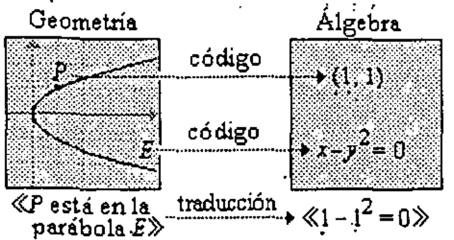
La correspondencia de Gödel codifica las fórmulas y las sucesiones finitas de fórmulas en los números naturales

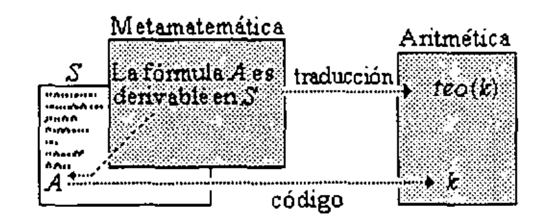
Al respecto, en estas páginas no explicaremos *cómo* se instrumenta el código, sino *qué* se puede hacer con él. El "cómo" lo reservamos para el apéndice **18**, donde ejemplificamos el procedimiento en el caso específico del sistema *AP*.[15]

Un rasgo sobresaliente de la codificación es que algunas propiedades de los objetos y/o relaciones entre los objetos del sistema S se pueden expresar en la aritmética mediante sus códigos. En esto la aritmetización se asemeja al método de las coordenadas, que permite expresar en el álgebra algunas propiedades geométricas de la curvas.[16] Esta característica de la codificación gödeliana la analizaremos más adelante.

---

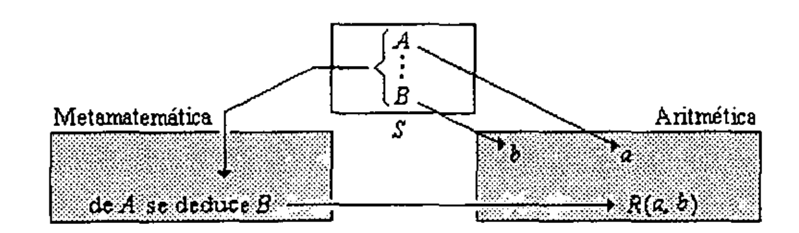
[15] Para el lector interesado, en el apéndice **19** aplicamos el método de la aritmetización de la sintaxis (en forma modificada) al sistema formal *AB*, expuesto en el apéndice **13**. En este caso la explicación es detallada y está acompañada por dos secciones en las que analizamos la noción de algoritmo y la representación de números enteros en otras bases que la decimal. El método utilizado se apoya en la representación de los objetos del sistema *AB* mediante números escritos en base 3, un procedimiento diferente al utilizado por Gödel, pero que produce los mismos resultados.
[16] Por ejemplo, la propiedad geométrica de «ser una cónica» se convierte, a través del método de las coordenadas, en la propiedad algebraica «ser una ecuación de segundo grado en dos variables que satisface cierta condición».





Comparación del método de Gödel con el método de las coordenadas.

Existencia de Proposiciones indecidibles. Supongamos que el sistema formal S es consistente y correcto respecto a la aritmética, y que todas las fórmulas de S (de las que hay, por supuesto, sólo un número numerable) se han numerado de alguna forma.[17] De esta manera, a cada concepto metamatemático que hace referencia a las fórmulas le corresponde un concepto aritmético que hace referencia a números naturales. Por ejemplo, a la relación metamatemática «la fórmula B es derivable a partir de la fórmula A según las reglas de inferencia» le corresponde una relación aritmética R que tiene lugar entre dos números a y b si y sólo si la fórmula con número b se deriva (en S) de la fórmula con número a. De manera semejante, al concepto de «fórmula derivable» le corresponde una clase T formada por los números correspondientes a los teoremas de S, etc.



La relación metamatemática «de la fórmula A se deduce la fórmula B» se codifica como una relación aritmética $R(a, b)$

Como se puede mostrar mediante una investigación detallada, resulta que las relaciones entre números y clases de números así definidas (es decir, las relaciones aritméticas que se han definido dando un rodeo por la metamatemática) no son diferentes de las relaciones y propiedades que se presentan en otras partes de la aritmética como, por ejemplo, "número

[17] Es decir, supongamos que las fórmulas de S se han puesto en correspondencia uno a uno con los números naturales. En el apéndice **18**, §6 ofrecemos un esbozo de la prueba de primer teorema de incompletud de Gödel que en mucho se acerca a las pruebas en la literatura especializada. Dado que por el momento nuestro interés se centra más que nada en seguir la línea de pensamiento de Gödel en el descubrimiento de sus teoremas, en este espacio expondremos su argumento desde una perspectiva más amplia, sin entrar en los detalles técnicos que en una primera lectura oscurecen su significado. Creemos que en este caso lo más conveniente es, simplemente, aceptar sin prueba todo lo que se nos dice se puede hacer, sin preguntarnos del momento por el "cómo".

primo", "ser divisor de", etc.; más bien, al igual que éstas últimas, dichas relaciones se pueden determinar de manera directa, por medio de definiciones que no utilizan nociones metamatemáticas. En otras palabras, resulta que las relaciones numéricas definidas con base en la codificación son aritméticas y se pueden definir con la sola ayuda de las operaciones de adición y multiplicación y las conectivas lógicas. Esto se debe a que la nociones metamatemáticas consideradas sólo comprenden relaciones combinatorias entre las fórmulas, de modo que bajo una numeración adecuada, dichas relaciones se reflejan directamente entre los números correspondientes bajo la forma de operaciones aritméticas.

Consideremos ahora la totalidad de las fórmulas de S que tienen una variable libre, y pensemos en ellas como ordenadas en una sucesión[18]

$$A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x), \ldots \qquad (1)$$

Sea *teo*(x) el predicado metamatemático «la fórmula x es derivable en S». Con base en este predicado definimos una clase G de números naturales como sigue:

$$n \in G \equiv_{\text{def}} {\sim}teo(A_n(n)) \qquad (2)$$

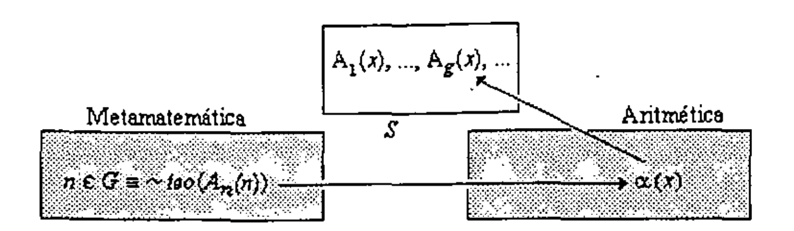
[Paráfrasis: n pertenece a la clase G si y sólo si la fórmula $A_n(n)$ no es un teorema].[19] Obviamente, la clase G se ha definido dando un rodeo por la metamatemática —en su descripción figuran nociones como las de *función proposicional, derivable*, etc.—, pero, como ya lo hemos señalado, tales referencias se pueden evitar, es decir, la clase G es aritmética en el sentido ya señalado. Que esto es posible es el punto crucial de la demostración y debe ser demostrado en detalle; no obstante, por ahora no nos detendremos en esta cuestión, sino que la daremos por sentada.

De lo anterior se sigue que la propiedad de pertenecer a G —es decir, la propiedad de *ser un número gödeliano*— se puede definir mediante un predicado $\alpha(x)$ en el que sólo se recurre a las operaciones de suma y producto de números naturales y las conectivas lógicas. Como la aritmética está incluida en el sistema S (esa es nuestra hipótesis), hay en él, y por lo tanto en la sucesión (1), un predicado $A_g(x)$ que define a la clase G.

---

[18] Hay distintas maneras de llevar a cabo tal ordenación. La más simple, por supuesto, es ordenarlas conforme a sus números de Gödel.

[19] Es decir, $n \in G$ si y sólo si *la fórmula que resulta al sustituir en la* n-*ésima fórmula de la sucesión (1) el número* n *en vez de la variable libre* no es un teorema. Se trata, como se puede ver, de un aplicación del método diagonal de Cantor, en la que el parentesco con la paradoja de Richard salta a la vista: Gödel cambia la expresión «$A_n(n)$ es falso» que figura en la definición de *número richardiano*, por la expresión «$A_n(n)$ es inderivable», para definir lo que podríamos llamar *números gödelianos* en relación al sistema S.



La propiedad de ser un número *gödeliano* es definible en la aritmética y representable en S mediante un predicado $A_g(x)$ que figura en la lista (1)

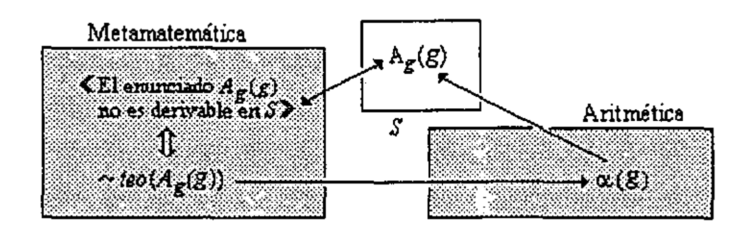
El predicado $A_g(x)$ que define a la clase G cumple lo siguiente:

$$A_g(n) \equiv \sim teo(A_n(n)) \qquad (3)$$

(esto último se obtiene al reemplazar en (2) $A_g(n)$ en vez de $n \in G$). Si ahora substituimos g en vez de n, tenemos que

$$A_g(g) \equiv \sim teo(A_g(g)) \qquad (4)$$

Nótese que la fórmula $A_g(g)$ es la formalización del enunciado $\sim teo(A_g(g))$ y que este último afirma, a través del código de Gödel, que la fórmula $A_g(g)$ no es derivable en S. Por tanto, en su lectura metamatemática, el enunciado $A_g(g)$ afirma su propia indemostrabilidad. Esto lo ilustramos en la siguiente figura.



$A_g(g)$ afirma, a través de la numeración de Gödel, ser indemostrable

De (4) se sigue que ni $A_g(g)$ ni $\neg A_g(g)$ son derivables, pues:

a) de la suposición de que $A_g(g)$ es derivable se sigue que $A_g(g)$ es verdadera y, por (4), que $A_g(g)$ no es derivable: una contradicción. Por lo tanto, $A_g(g)$ no es derivable.[20]

b) de la suposición de que $\neg A_g(g)$ es derivable se sigue que $\neg A_g(g)$ es verdadera y, por (4), que $A_g(g)$ también es derivable (ya que $\neg teo(A_g(g))$ es falso), lo que va en contra de la suposición de que S es consistente. Por lo tanto, tampoco $\neg A_g(g)$ es derivable.[21]

[20] Si $A_g(g)$ fuera derivable en S estaríamos ante algo contraintuitivo, pues $A_g(g)$ "dice" que $A_g(g)$ no es derivable en S.

Cabe señalar que en esta última parte —es decir, en los incisos a y **b**— hemos supuesto que todo enunciado derivable en S es verdadero. No obstante, esta suposición se puede eliminar a costa de complicar el argumento. Una ventaja es que al hacerlo se evita toda referencia a la noción de verdad, de modo que la única hipótesis imprescindible es que el sistema es consistente.[22]

La distinción que traza Gödel entre las nociones de *verdad* y *demostrabilidad* tiene como base el descubrimiento de que la noción de «ser una fórmula derivable en S» sí es definible en L_s. Este hecho es una de las causas de la incompletud del sistema.[23]

La explicación de por qué esta noción es definible en L_S es muy simple. Dada una sucesión finita Σ de fórmulas y una fórmula A, siempre es posible determinar mediante un algoritmo si Σ es una prueba de A.[24] Por tanto, a través de la numeración se puede definir un procedimiento de cálculo numérico f que, aplicado a dos números m y n, toma el valor 1 si y sólo si m es el número de una prueba Σ y n es el número de la fórmula A que se prueba con Σ. Ahora, tomando como base esta función f, la noción de «ser una formula derivable en S» se puede definir como sigue:

$$teo_S(z) \equiv_{def} \exists x(f(x, z) = 1)$$

[Paráfrasis: z es el número de un teorema si y sólo si hay un x que es el número de una prueba de la fórmula con número z]. Ahora bien, dado que el sistema S tiene la capacidad de formalizar la aritmética, la propiedad $teo_S(z)$ se puede expresar en L_S, contrastando en ello con la noción de «ser una fórmula verdadera», que no es definible en dicho lenguaje. Esto prueba que "verdadero $\not\equiv$ derivable", tal como lo afirma Gödel en la carta a Jossef Balas.[25]

Consistencia. De los resultados anteriores surge un resultado relativo a las pruebas de consistencia. Con base en el predicado $teo_S(z)$ Gödel logró "transcribir" a la aritmética el enunciado metamatemático que expresa la consistencia de S, y de ahí traducirlo en un

---

[21] Si $\neg A_g(g)$ fuera derivable en S, con su prueba estaríamos refutando a $A_g(g)$, que es verdadera, lo cual sería extraño y contradictorio.

[22] En su prueba, Gödel se vio obligado a suponer que el sistema es ω-consistente, una hipótesis más poderosa que la de consistencia simple. No obstante, en 1936 Barkley Rosser demostró un teorema similar al de Gödel en el que ya no es necesaria tal suposición, sino la de consistencia simple. Cf. Rosser, 1936.

[23] En efecto, si el sistema fuera correcto y completo, *verdad* y *demostrabilidad* coincidirían en el sistema, y la noción de «verdad», indefinible en el sistema, correspondería a la noción de «derivabilidad», que sí es definible. Al respecto, véase la nota al pie 5 de este apartado. Como en breve veremos, si bien la noción de "ser un teorema del sistema" es definible en L_S, no es decidible, pues dada una fórmula A que no es teorema resulta imposible examinar todas las pruebas para determinar que ninguna de ellas le corresponde.

[24] Para ello, basta inspeccionar la sucesión y verificar si ésta satisface la definición de *prueba*.

[25] Esta separación entre las nociones de *verdad* y *demostrabilidad* tiene el carácter de un teorema matemático, y no está sujeta a ningún cuestionamiento cuando se acepta la matemática finitista como fuente de conocimientos.

enunciado formal C. En efecto, si $form_S(z)$ es el predicado aritmético correspondiente a la propiedad «z es (el número de) una fórmula de L_S», entonces la consistencia de S se puede expresar mediante un enunciado aritmético como sigue:

$$cons_S \equiv_{def} \exists x(form_S(x) \text{ y } \neg teo_S(x))$$

[Paráfrasis: el sistema S es consistente si y sólo si hay una fórmula de L_S que no es derivable en S].[26] Ahora bien, dado que el sistema S tiene la capacidad de formalizar la aritmética, el enunciado $cons_S$ se puede expresar en L_S mediante una fórmula C,[27] con el resultado de que esta fórmula aritmética siempre es inderivable en el sistema cuya consistencia afirma (en caso de que éste sea no contradictorio). Es decir, la consistencia de un sistema formal (de la clase caracterizada con anterioridad) no se puede establecer con métodos de prueba iguales a, o más restringidos que, aquellos formalizados en el sistema en cuestión; más bien, para ello se requieren algunos métodos de prueba que lo sobrepasan.

4.2.3 Comentarios

1) Los procedimientos recién expuestos proporcionan, para cada sistema formal que satisfaga las referidas hipótesis, un enunciado aritmético que resulta indecidible. No obstante, dicho enunciado no es absolutamente indecidible, pues siempre se puede pasar a sistemas "superiores" en los que se puede decidir (aunque otros enunciados permanecen indecidibles). En particular, resulta que el análisis matemático es, en este sentido, un sistema más elevado que la aritmética elemental, y que el sistema axiomático de la teoría de conjuntos es aun más elevado que el análisis. Por lo tanto, se sigue que hay problemas aritméticos que no se pueden resolver con los métodos de la aritmética elemental, pero sí con métodos analíticos o, respectivamente, conjuntistas. Como veremos, este hecho es muy importante para Gödel, que basa algunos de sus argumentos filosóficos en él.

2) En su demostración, Gödel parte de la idea de representar en la aritmética formal la metateoría del sistema. Para mostrar que esto es posible creó un mecanismo, el *método de la aritmetización*, y con base en él fue que pudo demostrar la incompletabilidad de la aritmética; es decir, la existencia de enunciado indecidibles en cada sistema formal que la contenga.

¿Cómo llegó Gödel a la idea de codificar en los números naturales las pruebas formales? Simple y sencillamente, llevando hasta sus últimas consecuencias la idea de que en el

---

26 Recordemos que un sistema formal de esta naturaleza es consistente si y sólo si hay una fórmula que no es teorema.

27 La fórmula C referida en **G2** es precisamente la formalización de $cons_S$. En cuanto a los enunciados indecidibles A y $\neg A$ mencionados en **G1**, por ahora no podemos precisar cómo se construyen, pues esto requiere de algunos elementos que aquí no hemos considerado.

tratamiento formal la naturaleza de los signos considerados es irrelevante, por lo que él decidió que éstos serían números naturales.[28] Una consecuencia de lo anterior es que cuando un sistema formal contiene una formalización de la aritmética, parte de su metateoría queda formalizada en él. Fue esta idea de formalizar la metamatemática, desdeñada o ignorada por Hilbert, lo que abrió un mundo de posibilidades al momento de investigar los alcances de las teorías axiomáticas.

3) Una de las claves de la prueba de Gödel fue la construcción de enunciados aritméticos autoreferentes, tales como el enunciado $A_g(g)$, que a través del código afirman su propia inderivabilidad. Después, bajo las hipótesis adecuadas, demostró que tales enunciados son en realidad inderivables en el sistema al que pertenecen, ya que de lo contrario éste sería inconsistente. Con un argumento similar, concluyó también que tales enunciados no se pueden refutar en el sistema, pues si su negación fuera derivable, el sistema sería inconsistente.[29] Por tanto, lo que Gödel estableció es que la aritmética es incompleta en el sentido de Hilbert.

4) El resultado anterior encierra algo más. Al no ser $A_g(g)$ derivable en S, por esa misma razón es verdadero en un sentido claramente reconocible para un observador fuera del sistema. Claro está que para quien razona dentro del sistema, la verdad de $A_g(g)$ es inaccesible, pues los medios demostrativos a la mano no le permiten alcanzar dicha conclusión. No obstante, para el observador externo la disparidad entre las nociones de *verdad* y *demostrabilidad formal* se hace evidente al momento de demostrar la consistencia del sistema.[30] Esta situación es, además, irremediable, pues el punto es que la verdad del enunciado de Gödel no se puede determinar trabajando dentro del sistema.[31] Esta situación es extensible a todos los sistemas y a todos los enunciados de este tipo.

---

[28] Esta candorosa observación encierra una sutileza, casi un contrasentido: según Gödel —y en ello le asiste la razón— la naturaleza de los signos primitivos es irrelevante, por lo que se toma la libertad de elegir como tales a los números naturales, justo aquellos objetos que le permiten traducir la metamatemática a la aritmética y que, precisamente por ello, hacen de la elección algo relevante.

[29] Semánticamente, lo que sucedería al probar un enunciado como $\neg A_g(g)$ es que el sistema sería incorrecto, pues estaría probando un enunciado que afirma la derivabilidad de $A_g(g)$, lo cual sería falso en caso de que el sistema fuera consistente.

[30] La situación ante la que nos coloca el enunciado de Gödel es aun más delicada: $A_g(g)$ es verdadero si y sólo si es inderivable, de modo que su derivabilidad lo hace falso, y su inderivabilidad, verdadero. Al comparar el enunciado de Gödel ("este enunciado es inderivable") con la paradoja del mentiroso ("este enunciado es falso"), Howard DeLong, no sin cierto sentido de humor, comenta que en el enunciado de Gödel «el mentiroso ha desaparecido, pero como el gato Cheshire, su sonrisa perdura.». [Cita tomada de DeLong, 1971, p. 162]. Ciertamente, en lo que podemos calificar como un acto prodigioso, Gödel bordea la paradoja del mentiroso sin caer en contradicciones, hasta extraer conclusiones de muy largo alcance inspirado en ella.

[31] Obviamente, para saber que el enunciado es verdadero el observador tiene que establecer la consistencia del sistema. No obstante, desde nuestro punto de vista nada hay que cierre el paso a esta eventualidad, pues fuera del sistema siempre existe la posibilidad de recurrir a medios de demostración más poderosos que los admitidos en él. Así, por ejemplo, después de Gentzen sabemos que el sistema *AP* (aritmética de Peano de primer órden) es consistente, esto con

5) El primer teorema de Gödel trata de hecho con la no contradicción. Lo que en él se demuestra es que la aritmética no puede ser consistente y completa a la vez, (es decir, que la aritmética o es inconsistente, o es incompleta). Surge entonces la pregunta sobre *cómo* probar que un sistema formal es consistente, tema del segundo teorema: si un sistema formal X contiene a la aritmética elemental, entonces es imposible probar con los recursos disponibles en X su propia consistencia, de la misma manera en que la verdad del enunciado G no se puede probar dentro de S.[32]

Las pocas demostraciones conocidas de este segundo teorema tienen como base el hecho de que el enunciado G es en sí mismo un enunciado de consistencia, pues afirma la existencia de un enunciado que *no* es derivable en el sistema (a saber, él mismo), lo cual equivale a afirmar que el sistema es consistente.[33, 34]

6) En la actualidad las antinomias se dividen en dos clases: *lógicas* y *semánticas*. La primeras, ejemplificadas por la paradoja de Russell, no hacen referencia a la verdad o falsedad de las expresiones, mientras que las segundas, ejemplificadas por la paradojas del embustero, hacen referencia a los predicados *verdadero* y *falso* en relación a un lenguaje determinado L. Al primer tipo pertenecen las paradojas de Burali-Forti, Cantor, Russell, del barbero, del catalogo de catálogos y del alcalde, citadas en la sección **3.1.2**, mientras que al segundo pertenecen las paradojas de Epiménides, de la impredicabilidad, de Grelling, de Berry y la de Richard, citadas en la misma sección.

Grosso modo, la solución de las paradojas semánticas consiste en reconocer que nociones como la de "ser un enunciado verdadero de L" no se pueden expresar en L, sino que quedarían definidas en un segundo lenguaje L' que haría las veces de *metalenguaje* respecto

---

base en un argumento no más complicado que los que de ordinario se presentan en la matemática clásica. A este punto volveremos en la siguiente sección, pero algo debe quedar en claro desde ahora: la disparidad existe, incluso si como observadores no tenemos a la mano ninguna prueba de la consistencia del sistema en cuestión.

[32] En realidad, Gödel jamás exhibió una prueba de este último resultado, sino que se limitó a observar su cumplimiento. Por ejemplo, en su famoso artículo de 1931 lo único que ofrece es un bosquejo de este teorema, con la promesa de que en un futuro cercano dará una prueba rigurosa del mismo. No obstante, la pronta aceptación de sus resultados le hizo postergar indefinidamente esta cuestión, y nunca cumplió lo prometido.

[33] Como sabemos, un sistema formal de este tipo es consistente si y sólo si hay una fórmula A de su lenguaje que no es derivable en él. Véase al respecto la sección **3.6.2**.

[34] *Grosso modo*, una demostración del segundo teorema de Gödel —relativa al sistema S de la sección anterior—, iría como sigue. Constrúyase una fórmula C que formalice la afirmación de que S es consistente. Una posibilidad es, por ejemplo, formalizar el siguiente enunciado metateórico: «no hay una fórmula A tal que A y $\neg A$ son derivables en S». Con base en un complicado argumento metamatemático se puede probar que los enunciados C y G son equivalentes según S (recordemos que G denota al enunciado indecidible $A_g(g)$), es decir, que las fórmulas $C \rightarrow G$ y $G \rightarrow C$ son derivables en S, de modo que cualquier prueba de C conduciría directamente a una prueba de G (es decir, se tendría que $S \vdash C$ y $S \vdash C \rightarrow G$, y con una sola aplicación del *modus ponens* se tendría que $S \vdash G$, lo cual es imposible en conformidad con el primer teorema de incompletud). Dado que el enunciado G no es derivable en S en caso de que S sea consistente, de lo anterior se sigue que el enunciado C tampoco es derivable en S. Por tanto, el sistema formal S no es capaz de probar su propio funcionamiento consistente.

a L. Digamos que la definición de tales nociones es externa al lenguaje y no se puede usar dentro de él. En cuanto a los lenguajes formales la situación es un poco más precisa, pues en algunos casos se ha podido demostrar que la noción de verdad relativa a sus enunciados no es definible en ellos mismos, como en la aritmética.

7) Históricamente, Gödel fue el primero en valerse de las paradojas semántica para establecer hechos de limitación a los lenguajes y los sistemas formales. En el caso de la aritmética la consecuencia fue el descubrimiento de que las nociones de verdad y demostrabilidad formal no son equivalentes entre sí, pues la primera no es definible, mientras que la segunda sí lo es.[35]

Esta imposibilidad de definir la noción de verdad para los enunciados de un lenguaje dentro del lenguaje mismo servirá de apoyo a nuestras conclusiones en la sección **5.3**.

Con estos comentarios damos por finalizada la prueba heurística de los teoremas de Gödel.[36] Esperamos haber transmitido con claridad las ideas en que se basa la prueba y la forma de sus argumentos. En la exposición hemos evitado en lo posible entrar en la abrumadora cantidad de detalles técnicos sobre los que descansa la verdadera prueba de los teoremas, detalles que, en su mayor parte, consisten en mostrar cómo se codifican las reglas de inferencia del sistema en la aritmética, cómo se puede representar el manejo de los axiomas mediante operaciones aritméticas, y cómo se construye el enunciado indecidible de manera efectiva. No obstante, tales elementos son hasta cierto punto innecesarios para apreciar la estructura y el sentido de la prueba.[37]

---

[35] Al respecto, lo que Gödel hizo fue introducir su ingenioso método de la aritmetización de la sintaxis, el cuál le permitió referirse de manera indirecta a las fórmulas mediante números y construir enunciados que en cierto sentido se asemejan a la paradoja del mentiroso: "Yo soy falso".

[36] Es decir, de los teoremas **G1** y **G2** enunciados al inicio de la sección **4.2**, tomando por M cualquiera de los sistemas mencionados en la nota al pie #15.

[37] Si el lector desea una exposición rigurosa del primer teorema de incompletud de Gödel, podrá acudir a cualquiera de siguientes fuentes: [Gödel, 1986, pp. 144-196], [Heijenoort, 1967, pp. 592-617], [Mendelson, 1979, cap. 3], [Enderton, 1972, cap. 3] y [Torres, 1989]; este último trabajo también incluye una prueba rigurosa del segundo teorema de incompletud.

4.3 Consecuencias para el programa

Regresemos al programa de Hilbert. Como sabemos, lo que Hilbert pretende es encontrar respuesta a diversas cuestiones menos ambiciosas y más precisas que las planteadas por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica*, todas ellas referidas a las más importantes teorías matemáticas. Por ejemplo, de un sistema como el de Russell y Whitehead lo que le interesa no es el problema de su contenido, sino si será completo, consistente y decidible y establecer tales hechos a través de un argumento concluyente. Precisamente, el programa tiene como propósito responder a tales cuestiones, en vez de ocuparse de la pregunta por el "ser" de la matemática (¿de qué trata la matemática?). Obviamente, estas preguntas no son parte de las teorías consideradas, sino *relativas* a ellas, y para responderlas Hilbert ideó una nueva disciplina: la teoría de la demostración o metamatemática.

El enfoque de Hilbert es llamado *formalista* porque en él la matemática es tratada como un juego de signos carentes de todo significado. En este "juego", los pasos permitidos en una demostración son considerados como los movimientos en el ajedrez, y los axiomas hacen la veces de la posición inicial de las piezas. En esta analogía, "jugar al ajedrez" corresponde a "hacer matemáticas" y los enunciados *acerca* del ajedrez corresponden a los enunciados metateóricos *referentes a* las teorías formales.[1] Hacia 1930 ninguna de las preguntas planteadas por Hilbert en relación a estos "juegos" había recibido respuesta, aunque en su opinión todas serían favorables respecto a la aritmética de Peano y la matemática clásica.[2] Curiosamente, la metamatemática no fue investigada, de modo que no se consideró necesario formalizarla,[3] por lo que se le mantuvo dentro de la esfera de la argumentación intuitiva, en vez de tratarla en pie de igualdad con la matemática propiamente dicha.

A la distancia, esta fase del formalismo se contempla como un tanto ingenua, acrítica y desatenta a sus propias limitaciones. Y si bien en este período se introdujeron algunas técnicas y conceptos básicos que aún tienen vigencia, en él también se trazaron metas inaccesibles que sirvieron como estímulo a las investigaciones. Como hemos visto, fue Gödel quien puso final a este período, dando respuesta a las interrogantes planteadas por Hilbert y conduciendo a la teoría de la demostración a un nivel más crítico y reflexivo.

---

[1] Por ejemplo, una aseveración como "es imposible forzar jaque mate con un solo caballo y el rey" no forma parte del juego, sino del discurso acerca del juego, del mismo modo que la afirmación "la fórmula $\neg(0 = 0)$ no es derivable en *AP*" no forma parte de la aritmética formalizada, sino de su metateoría.

[2] Esto se entrevé claramente en los planteamientos que hace en [Hilbert, 1928].

[3] Es decir, reducirla a un sistema sintáctico.

Frente a la esperanza de Hilbert, Gödel nos reveló una matemática abierta, incompleta e incompletable, en vez de una ciencia absoluta y cerrada en sí misma. Se requieren pocas palabras para decirlo, y muchas para explicarlo. Al respecto, en esta sección habremos de abundar en las cuestiones de la consistencia y la completud, esas dos formas en las que se resuelve el programa de Hilbert en un vano intento por conquistarlas.

4.3.1 La cuestión de la completud

Veamos con mayor detenimiento qué consecuencias tienen los teoremas de Gödel en relación al programa. Para hacer más preciso el análisis consideremos en concreto la aritmética de Peano. Como sabemos, se trata de una teoría consistente,[4] y por el primer teorema de incompletud sabemos de la existencia de enunciados indecidibles en ella, es decir, de enunciados que el formalismo no puede decidir.

De este simple hecho se deduce que en el caso de la aritmética, el campo de lo que es accesible al entendimiento no coincide con el campo de lo que es accesible a la deducción formal y algo más: que ninguno de estos dominios contiene al otro.[5] Esto, obviamente, refuta la existencia de un sistema de axiomas y reglas de inferencia que pruebe todos los enunciados verdaderos en el dominio de la aritmética. El montaje de un sistema de tal naturaleza era la esperanza oculta tras la idea de completud.

En efecto, si hemos de partir de *AP*, lo que el primer teorema de Gödel establece en su forma general es que, sin importar cómo se extienda el sistema, nunca se logrará la completud; por el contrario, en cada uno de los peldaños hacia su obtención sólo se tendrá otro sistema con las mismas limitaciones (suponiendo consistencia).[6] En este sentido, la única alternativa que queda es afinar paulatinamente un cuadro axiomático para la teoría elemental de los números, sin la esperanza de llegar al final, pese a la claridad con que tales objetos se presentan ante el entendimiento.[7] Al respecto, escuchemos a Hermann Weyl:

> Aunque la idea de un mundo trascendente existente y completo en sí mismo es el principio sobre el que construimos el formalismo, este último en cualquier etapa fija tiene un carácter incompleto, ya que siempre habrá problemas, aun de simple naturaleza aritmética, que pueden formularse dentro del formalismo y verificarse por discernimiento, pero no verificarse por deducción dentro del formalismo. No nos sorprende que un trozo concreto de naturaleza, considerado en su existencia

[4] Esto lo probó Gerhard Gentzen en 1936.

[5] Por ejemplo, habrá teoremas que por su misma complejidad no sean comprensibles en absoluto, digamos fórmulas con miles o millones de signos.

[6] Obviamente, algunos enunciados que antes eran indecidibles ya no lo serán, pero siempre habrá alguno que el sistema en cuestión no puede decidir.

[7] Véase la sección 3.4.3.

> fenomenológica aislada, desafíe nuestro análisis por su inexhaustibilidad y su incompletación; por conseguir la completación, como hemos visto, la física proyecta lo que le es dado sobre el fondo de lo posible. Pero es sorprendente que algo creado por la mente misma, la sucesión de enteros, la cosa más simple y diáfana para la mente constructiva, tome un aspecto similar de misterio y deficiencia cuando se ve desde el punto de vista axiomático.[8]

El ideal de la formalización —construir un sistema sintáctico consistente y completo para la aritmética— es inalcanzable y el axioma de la resolubilidad de todo problema matemático se tendrá que aferrar a otra posibilidad, si es que la hay. Así, de acuerdo con nuestro análisis, podemos decir que uno de los propósitos del programa de Hilbert, a saber, *construir el equivalente formal de nuestra comprensión intuitiva de los números naturales*, no se puede lograr, como tampoco se puede lanzar por la borda "así nomás" la problemática noción de *verdad*, pues no hay ningún sustituto sintáctico adecuado para ella.[9]

Una conjetura famosa. Consideremos una posibilidad que nos permita darle un contenido más preciso a nuestro análisis anterior. Se trata de la *conjetura de los primos gemelos*, un viejo enigma de la teoría de los números.

La distribución de los números primos en la sucesión natural es algo que se ha estudiado desde hace mucho tiempo; se sabe, por ejemplo, que hay una disminución en su incidencia a medida que se recorre la serie, aunque con algunas irregularidades; también se sabe que tal disminución de ninguna manera significa que la serie de números primos llegue a un final. Por el contrario, la sucesión es infinita, como lo demuestra Euclides en los *Elementos*.[10]

Una de las irregularidades que presenta la serie es que si bien siempre se pueden encontrar intervalos arbitrariamente grandes carentes de números primos, también sucede que a "grandes vacíos" en la sucesión suelen seguir "pequeños vacíos". Por ejemplo, los número primos 11743 y 11777 son los extremos de un intervalo de treinta y tres números, ninguno de los cuales es primo, pero a éste le siguen dos números primos casi consecutivos, 11777 y 11779, que sólo difieren entre sí en dos unidades: una separación de un sólo número.[11] Este hecho no es un caso aislado, sino que se sabe de muchas parejas de números primos (p, q)

---

[8] Weyl, 1949. Cita tomada de la traducción al español, p. 252.

[9] Ciertamente, Hilbert no niega cierta significación a los símbolos, pues ve en ellos *imágenes de pensamientos, representaciones de las ideas que constituyen los procedimientos utilizados en las matemática* (al respecto, véase la cita correspondiente en la sección 3.6.3, o [Hilbert, 1923], p. 65 de la traducción al español). No obstante, una de las metas principales del *programa* era recoger en un formalismo *todos* los vínculos entre los conceptos representados, de modo que ya no fuera necesario volver a su significado para dar cuenta de lo dado en su dominio de aplicación. Fue precisamente esta pretensión *reduccionista* lo que fracasó.

[10] Euclides, [Prop. IX.20].

[11] Obviamente, salvo por los números 2 y 3, no puede haber otra pareja de números primos consecutivos, pues todos los números primos mayores que 2 son impares.

con la propiedad de que $q = p + 2$, incluso en rangos muy elevados. A tales números se les llama *primos gemelos*.

Justamente, la *conjetura de los primos gemelos* es la afirmación de que hay una infinidad de parejas de primos gemelos, es decir, que dado cualquier número natural n, sin importar cuán grande sea, siempre se podrá encontrar una pareja de primos gemelos (p, q) con la propiedad de que $n < p$. La cuestión es que esta conjetura no se ha podido probar ni refutar: permanece como un problema abierto. Una posibilidad que se abre con Gödel es que se trate de un enunciado indecidible en la aritmética de Peano de primer orden (el sistema *AP*), con lo que todos los esfuerzos por resolverlo con tal herramienta serían inútiles. Para todo fin práctico supongamos que se trata, en efecto, de un enunciado indecidible.[12]

En tal caso se tendría un enunciado que, a pesar de que él o su negación reflejan el "estado de cosas" existente en el dominio de los numerales —objetos de estudio de la aritmética elemental—, el sistema sería incapaz de inclinarse por alguno de los dos. Claro está que para Brouwer el argumento anterior no tendría ningún valor, pues supone el principio del tercero excluido. No obstante, por ahora podemos dejar fuera esta cuestión, pues nuestro interlocutor no es Brouwer, sino Hilbert, que precisamente monta su programa en defensa de dicho principio. Una posible replica de Hilbert a nuestros cuestionamientos sería decir que en realidad los números naturales no son entidades preexistentes, sino que sólo tienen sentido hablar de ellos al interior de la teoría, pues es justo a través de sus axiomas que se les define. Al respecto, queremos hacer dos señalamientos.

1) Si bien en el caso de la teoría de conjuntos podríamos aceptar como algo razonable tal afirmación, en el caso de la aritmética elemental hay un dominio de objetos muy bien caracterizados precisamente por Hilbert como su objeto de estudio. Tales objetos no son entidades abstractas, sino numerales que podemos exponer a la mirada. Y según lo dicho en la conjetura, o bien siempre será posible hallar dos numerales "primos gemelos" más allá de cualquier numeral, o bien hay un punto a partir del cuál esto ya no es posible, aunque el sistema no esté en posibilidad de decidir cuál de estas opciones es la correcta. Esta es, precisamente, la limitación a la que se refiere el primer teorema de Gödel en el caso de los enunciados indecidibles.

2) La suposición de que hay una realidad existente en sí misma como objeto de estudio de la matemática, es y ha sido la actitud metodológica de todos los matemáticos, incluyendo a

---

[12] Este enunciado lo podemos escribir en una notación "mixta" como sigue: $\forall n \exists p(\text{primo}(p) \wedge \text{primo}(p + 2) \wedge n < p)$. La sencillez del problema contrasta con la resistencia que opone a su resolución.

Hilbert, y es, como dice Weyl, el principio sobre el que construimos el formalismo, cuestión que Hilbert no puede negar.[13] Es con dicho "mundo" que queremos comparar nuestras teorías. Además, en el caso específico de la aritmética, el discernimiento que tenemos de los números es muy fuerte como para ahora decir que la aritmética no es más que un juego simbólico carente de significado. Hilbert sabe que la aritmética no se desarrolló de esa manera, sino que hay un "intuitivo" previo con el que la queremos confrontar. No es el momento de negar esta circunstancia, y el intento de lograr un cuadro perfecto de la misma ha fracasado.

Para concluir diremos que el primer teorema de Gödel es muy claro respecto al programa de Hilbert: simplemente, no se puede determinar un sistema formal que sea completo ni siquiera para la aritmética elemental, ya no digamos para la matemática clásica o la teoría de conjuntos. La matemática queda abierta hacia arriba: toda teoría axiomática con un mínimo de poder expresivo está en vías de construcción en cualquier momento de su desarrollo, sin la esperanza de llegar nunca al final del camino: siempre se podrán añadir nuevos principios demostrativos, pero nunca los suficientes como para concluir la labor axiomática.

4.3.2 La cuestión de la consistencia

A pesar de su trascendencia, el primer teorema de Gödel no fue lo que echó por tierra la pretensión de "eliminar en forma definitiva el problema de los fundamentos de las matemáticas", tantas veces proclamada por Hilbert. De ello se ocupó el segundo teorema.

Es muy probable que la matemática clásica sea consistente; de hecho, eso es lo que todos creemos, y sobre esa creencia edificamos la teoría. No obstante, su consistencia no ha sido probada, y, lo que es peor, jamás lo será mediante un argumento que tenga cabida en ella (ya no digamos mediante un argumento de corte elemental). En este sentido, la matemática clásica mira su propia consistencia como un misterio, como un enigma imposible de resolver, y sólo un observador externo podría, si acaso, dar cuenta de la misma, aunque con medios de prueba ajenos y tal vez más dudosos que los codificados en ella.[14]

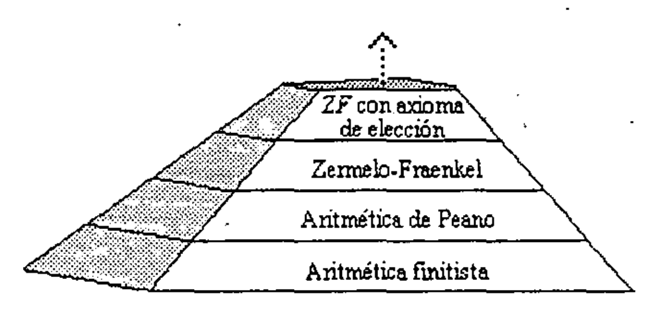
Frente a esto, tenemos que destacar que la solución esperada por Hilbert al problema de la consistencia apuntaba precisamente en la dirección contraria. Desde su punto de vista, las teorías matemáticas habrían de formar una especie de pirámide en cuya base se encontraría aquella formada por los elementos más simples: la matemática finitista. Esta base serviría

---

13 Esta cuestión reviste suma importancia para nosotros y habremos de volver a ella en la sección 5.3.

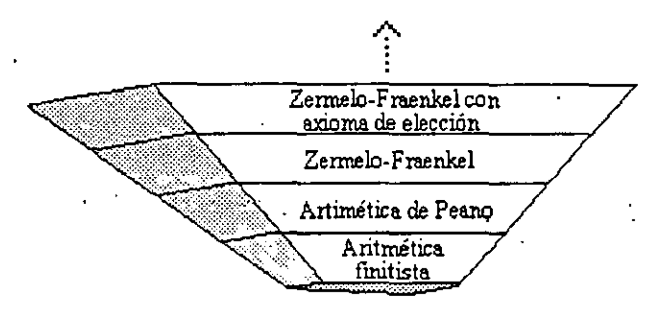
14 Aquí la expresión «tal vez» se debería escribir con mayúsculas. Sólo en casos muy limitados se conocen pruebas de consistencia para fragmentos de la matemática clásica vinculadas con la matemática constructiva, lo cuál además no puede considerarse un fundamento, sino un resultado matemático en el que se enlazan ciertas nociones constructivas con otras que no lo son. Más adelante veremos un ejemplo de ello.

como punto de partida para asegurar la consistencia de todo el edificio. Así, por ejemplo, la aritmética finitista probaría la consistencia de la aritmética de Peano, y una vez probada la coherencia de ésta última se le podría utilizar para probar la consistencia de, digamos, la teoría de conjuntos sin el axioma de elección, para a su vez utilizar esta teoría en una prueba de la consistencia de la teoría de conjuntos con el axioma de elección, etc., de modo que cada vez que se hubiera probado la consistencia de un nivel, lo habido en él se podría utilizar para asegura la consistencia de los subsiguientes niveles, cada vez más complejos.



Pirámide de Hilbert

No obstante, en vista del teorema de Gödel sabemos que la situación es la opuesta. En efecto, si "acabar" un sistema significa probar su consistencia, es imposible contentarse con las suposiciones que en él se hacen (no basta considerar el sistema a la luz de sus métodos y principios), pues éstas son insuficientes para probar su consistencia: hay que hacer la siguiente suposición. Para continuar con la metáfora diremos que la imagen de la pirámide debe ser invertida, ya que para consolidar un "piso" ¡es necesario construir el siguiente! (para validar un sistema, hay que validar el sistema que formaliza la prueba de su consistencia). En tal caso la base de la pirámide se encontraría suspendida en la cúspide, una cúspide inconclusa por si misma, y que debe ser elevada sin cesar.



Pirámide de Hilbert después de los teoremas de Gödel

Si, como pretende Hilbert, fundamentar la matemática consiste en probar su coherencia lógica de manera elemental (pues sólo así tendría algún valor epistemológico la prueba), la matemática se fundamenta en la nada.

Concluimos este apartado con dos comentarios de carácter general.

1) Si bien los teoremas de Gödel forman parte de una rama muy especializada de la *lógica matemática*, y ocupan un lugar de privilegio en áreas como la teoría de la recursión y las ciencias de la computación, su alcance los coloca en un plano más allá del interés científico, en el que nos confían su sentido profundo y su innegable valor epistemológico. En realidad, los límites que establecen no sólo afectan a los sistemas formales, sino a la razón en general. De algún modo, el primero de ellos fija un límite a nuestra capacidad para construir una imagen simbólica del mundo, o de formalizar lo que nos es dado en el ámbito de la intuición; el segundo, irónicamente llamado "de la consistencia", nos muestra que la razón matemática no se basta a sí misma, que es incapaz de dar cuenta de su propia coherencia y que existe la posibilidad de que haya problemas que jamás podría resolver, cuestión esta última que ya hemos examinado parcialmente en relación a la matemática. Al respecto, en el siguiente inciso nos ocupamos de su posible conexión con las ciencias sociales.

2) En respuesta a una carta en la que presuntamente le pedían que hiciera un comentario en torno al significado de sus teoremas en relación a las cuestiones humanas, Gödel propuso la siguiente formulación:

> Una sociedad estrictamente controlada (i. e., una sociedad en la que en todas las cosas se procede con estricto apego a reglas de "conformidad") será, en su comportamiento, o inconsistente o incompleta, es decir, incapaz de resolver ciertos problemas, quizá de vital importancia. Por supuesto, ambas posibilidades podrían amenazar su supervivencia en una situación difícil. Una observación similar se podría aplicar a los seres humanos en lo individual.[15]

Al respecto, los teoremas de Gödel parecen reforzar la idea de que las grandes pretensiones de conocer y vivir en el mundo de acuerdo con una razón autosuficiente, que todo lo abarca, son sólo una quimera. En especial, la confianza desmedida que se ha depositado en diversos sistemas de reglas que guían y justifican nuestra vida individual y social, parece no tener fundamento. Los teoremas de Gödel nos hacen ver que no siempre podemos estar seguros de que nuestras hipótesis son consistentes entre sí, es decir, que nuestras suposiciones constituye un sistema coherente, por no hablar de nuestras creencias, que encierran un mayor grado de vaguedad e inexactitud. Asimismo nos hacen ver que nuestras creencias e hipótesis difícilmente constituirían un sistema completo, en el sentido de contener una respuesta para cada problema. Esta idea la vendría a reforzar la teoría de la

[15] Tomado de [Wang, 1996, p. 4]. según refiere Wang, el texto aparece en un borrador de una carta que Gödel jamás envió a una persona (Wang no recuerda a quién) como respuesta a la pregunta sobre cómo generalizar sus teoremas a las cuestiones humanas.

complejidad, que se ocupa en cierto sentido de examinar lo que le sucede a la razón en el mundo real, donde nuestro pensamiento se enfrenta a los hechos.

Quizá haya muchas otras cosas que decir respecto al significado de los teoremas de Gödel en otras áreas, cuestión que dejamos a los especialistas en ellas.

Un comentario final. Con base en nuestro análisis puede parecer que la caída del programa nos causa regocijo. Nada más alejado de la verdad. Ciertamente, el programa fracasó, pero jactarse de su derrota es cosa vana. Fue Hilbert quien nos enseñó cómo convertir los problemas epistemológicos de la matemática en problemas matemáticos, y quien fertilizó la tierra donde florecieron los teoremas de Gödel, resultados que no se preveían en absoluto a comienzos del siglo veinte. El programa tuvo un mal fin, pero nosotros aprendimos de ello algo que ahora sabemos con la exactitud de un teorema: que la razón matemática es capaz de fijarse límites a sí misma, y cuales son tales límites. Hasta en su caída debemos reconocer la grandeza de Hilbert, pues fue gracias a él que la matemática tomó conciencia de sí misma, de su fina estructura y de sus insondables abismos. Y en vez de traerlo a la memoria por aquél *locus imaginarius* al que nos quiso llevar, lo debemos recordar por haber iniciado la travesía; él creyó saber adonde habríamos de llegar, pero eso ya no importa; lo importante es que con él nos hicimos a la mar.

4.3.3. Gentzen *et al*

Tras la catástrofe gödeliana todo parecía indicar que lo único que quedaba por hacer era finiquitar las investigaciones y marcharse a casa. Parecía como si la teoría de la demostración hubiera fracasado junto con el programa, pues ¿quién iría a estar satisfecho con una justificación de la matemática transfinita de Cantor que fuese más amplia que la teoría cantoriana? Los seguidores del *programa* adoptaron actitudes que iban desde la incredulidad hasta la resignación. Algunos se negaron a aceptar la imposibilidad de una prueba de consistencia finitista, otros optaron por modificar el *programa* renunciando a la pretensión de una prueba *absoluta* de consistencia, y muchos más decidieron proseguir las investigaciones en torno a los sistemas formales desde una perspectiva matemática, sin ninguna pretensión de fundamentación e incorporando cualquier método que resultara fructífero, incluyendo los procedimientos semánticos.

Entre quienes se negaron a aceptar en un principio las consecuencias del segundo teorema de Gödel se encuentra en mismo Hilbert, quien trató de manejar la cuestión de manera constructiva, al punto de modificar el esquema de los sistemas formales mediante la

aceptación de una regla de inferencia con una infinidad de premisas.[16] Incluso Gödel en su artículo de 1931 expresó sus dudas respecto a si el segundo teorema contradice o no al punto de vista de Hilbert: «Quiero señalar expresamente que el teorema [acerca de la consistencia] no contradice al punto de vista formalista de Hilbert. dicho punto de vista presupone tan sólo la existencia de una demostración de consistencia en la que nada sino métodos de demostración finitista sean utilizados y es concebible la existencia de una demostración finitista de consistencia que no pueda expresarse en el formalismo P (o M, o A).»[17]

Si bien el teorema no es concluyente respecto a la imposibilidad de una prueba finitista de consistencia, cabe señalar que nada en concreto se ha hecho en este terreno. En todo caso, esta discusión se suscita a causa de la imprecisión de la noción de *demostración finitista* y sólo puede resolverse favorablemente exhibiendo una demostración de consistencia que sea a todas luces finitista. En cuanto a Gödel, muy pronto cambió de opinión, como se puede apreciar en sus escritos posteriores, como, por ejemplo, [Gödel, 1931?, 1951 y 1958.]. Al respecto, nuestro parecer es que la matemática finitista no desborda en ningún sentido a la aritmética recursiva y que, por lo tanto, no es posible hallar una prueba de consistencia con tales características.

Para quienes optaron por modificar el programa de inmediato se planteó el siguiente problema: hallar pruebas de consistencia para la aritmética y algunos fragmentos del análisis que cayeran fuera del formalismo en cuestión pero que fueran confiables para la mente constructiva. La búsqueda de tales pruebas inició de inmediato.

No hubo de pasar mucho tiempo antes de que se hubieran obtenido algunos resultados en relación a la aritmética. En 1936 Gerhard Gentzen (1909-1945), un joven colaborador de Hilbert, logró probar la consistencia de la aritmética de Peano mediante un argumento que no es finitista en el sentido estricto de la palabra, pues en él se acepta como evidente un argumento inductivo que penetra en la segunda clase de los números ordinales de Cantor. Pruebas similares fueron presentadas posteriormente por Ackermann (1940), Lorenzen (1951), Schütte (1951, 1960), Gödel (1958) y Hlodovskii (1959). El problema con este tipo de demostraciones es que implican la aceptación de principios en general más poderosos e inciertos que aquellos cuyo funcionamiento consistente se prueba con ellos. Por ejemplo, la demostración de Gentzen asegura que el principio de inducción finita, fundamental en la demostración de múltiples teoremas de la aritmética y del análisis clásico, es compatible con

[16] Al respecto, véase el apéndice 20.
[17] Gödel, 1931. Cita tomada de la traducción al inglés en Heijenoort, 1967, p. 615.

los demás axiomas de Peano acerca de los números naturales.[18] El inconveniente radica en que la demostración hace uso de una variante un tanto más poderosa del principio de inducción, que lo acepta como válido no sólo para los números naturales, sino para una clase más extensa de números que los contiene como un subconjunto propio: nos referimos a los números ordinales numerables, definidos y estudiados en la teoría transfinita de Cantor y de los que aquéllos no son sino la parte correspondiente a los conjuntos finitos.

Si bien a la luz del segundo teorema de Gödel difícilmente podemos imaginar que las cosas pudieran ser de otra manera, el teorema de Gentzen nos muestra cuál es el mínimo requerido para lograr la demostración de consistencia de la aritmética de Peano, es decir, el mínimo que debemos suponer dadas las restricciones impuestas por Gödel. No obstante, desde un punto de vista epistemológico, la demostración no se puede considerar como un fundamento de la teoría, pues en ella se supone algo más poderoso que la inducción finita para "asegurar" a esta última.

En cuanto a la prueba de consistencia de la aritmética de Peano, en el apéndice **20** el lector encontrará un comentario un tanto técnico de la demostración que diera Schütte en 1951, la cuál no es substancialmente distinta a la de Gentzen. Creemos relevante incluir este comentario en la medida en que muestra el avance y el tipo de desarrollos a quc condujo el problema de la consistencia en el siglo veinte, siendo tal resultado quizá el más importante en este renglón.[19]

Un comentario final. Si reflexionamos sobre el valor de las pruebas de consistencia es claro que éstas jamás ocuparán el sitio de privilegio que Hilbert les reservó, en el sentido de asegurar la solidez de todo el edificio matemático. En todo caso, su valor se podría juzgar sólo por su interés matemático, pues los matemáticos no ven en ellas un fundamento, sino una luz que ilumina el modo de ser de las teorías.

Para resumir diremos que ha menester no insistir en las pruebas de consistencia como única vía de validación de las teorías axiomáticas. En este sentido éstas han perdido casi todo su valor. Y a la vez que reconocemos el hecho de que la razón matemática no puede hacerse suficientemente clara a sí misma, nos preguntamos si en realidad tendrá sentido

---

[18] El principio establece lo siguiente: que si una propiedad $A(x)$ es válida para $x = 0$ y es *hereditaria*, en el sentido de que si un número n tiene la propiedad, también su *sucesor* sn la tiene. (i.e., que $A(n) \rightarrow A(sn)$ para todo $n \in N$), entonces la propiedad es válida para todos los números naturales: $\forall x \in N, A(x)$.

[19] Ciertamente, para los matemáticos las pruebas de consistencia se presentan como un tema de investigación muy atractivo, dadas las restricciones impuestas por los teoremas de Gödel. Por ejemplo, para quienes se interesan en los fundamentos de la matemática se plantea el problema de investigar si el programa de Hilbert es parcialmente realizable, es decir, de determinar si alguna *porción* de la matemática transfinita se puede probar consistente mediante una prueba constructiva, cuestión interesante por sí misma. Y si bien la cuestión de la consistencia ha perdido toda su fuerza como vía de validación de las teorías matemáticas, en tanto que problema matemático siguen teniendo vigencia.

tratar de probar lo evidente, pues, como bien dice Bourbaki, «la ausencia de contradicción, aunque no se demuestra, se constata.».[20] Esto último trae a la luz un problema que el segundo teorema de Gödel nos plantea: ¿cómo es posible que aquello que se ofrece con tal grado de evidencia al entendimiento, como lo es la consistencia de la matemática clásica (digamos, la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel), ofrezca tal grado de dificultad cuando se le contempla desde el punto de vista racional? Ante el abierto reconocimiento de un hecho como el de la consistencia, el entendimiento simple y llanamente no encuentra una explicación racional estructurada con apego al canon de la lógica.

Para concluir queremos reiterar algo que ya habríamos dicho en otro lugar en relación a los teoremas limitativos, en el sentido de que las deficiencias señaladas por ellos pusieron fin a algunos de los viejos sueños de la razón matemática, y esto de manera irrebatible. En la matemática ya no nos podemos figurar una razón autovalidativa y encerrada en sí misma,[21] sin saber que esto no es más que una elucubración fantástica alejada de la realidad,[22] ni podemos considerar la sola demostrabilidad como único criterio de verdad. De algún modo, de aquí en adelante debemos tener presente que la verdad en la matemática es una construcción que requiere no sólo de la lógica, sino de nuevas y cada vez más profundas intuiciones y evidencias, doquiera que éstas provengan.

---

[20] Bourbaki, 1969. Cita tomada de la traducción al español, p. 63.

[21] Es decir, una razón matemática que sea garante de su propia coherencia.

[22] Aquí por "realidad" nos estamos refiriendo a los resultados obtenidos en la matemática (los teoremas de Gödel), no a una realidad matemática en sentido ontológico.

4.4 Consecuencias filosóficas de los teoremas de Gödel

A lo largo de estas páginas hemos destacado la importancia de los teoremas de Gödel en relación al programa de Hilbert. Veamos ahora cómo se sirve Gödel de estos resultados en sus reflexiones filosóficas y hagamos un análisis de las mismas.

En la cultura contemporánea los teoremas limitativos han sido tema de la literatura, la poesía, la música, y la filosofía. Tal parece que todo el mundo sabe de ellos, aunque la apreciación de su importancia es variable, al igual que el grado de comprensión de su significado. Al respecto, la obra de Gödel se puede comparar con la teoría de la relatividad de Einstein, el psicoanálisis de Freud y la teoría de la evolución de las especies de Darwin. No obstante, salvo por algunos fragmentos de su filosofía matemática, el resto de las contribuciones de Gödel a éste y otros dominios no han recibido la misma atención del público. Incluso las consecuencias de sus teoremas limitativos no se han explorado debidamente, a pesar de que constituyen un territorio muy atractivo. Dice Hao Wang: «En términos del discurso filosófico, el [primer] teorema [de incompletud] ayuda a clarificar la dialéctica de la lógica y la intuición, del formalismo y el contenido, de lo mecánico y lo mental, del lenguaje y el pensamiento, de la verdad y la demostrabilidad, y de lo real y lo cognoscible.».[1]

Ciertamente, en sus reflexiones Gödel considera algo más que los problemas relacionados con el programa de Hilbert. Por ejemplo, sostiene que estamos dotados de una intuición matemática tan falible como la intuición sensible, que en la matemática es necesario acudir a la observación y a la experiencia, que la mente humana sobrepase a todas las computadoras y que la matemática no es una libre creación del intelecto humano. En buena medida, estas conclusiones las apoya en sus teoremas limitativos.

4.4.1 Algoritmos, sistemas formales y máquinas de Turing

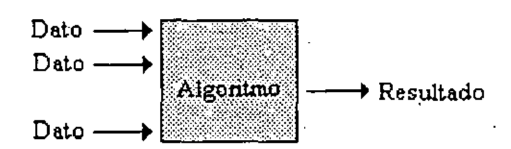
En los siguientes apartados haremos uso de los conceptos de *algoritmo* y *máquina de Turing*, por lo que nos vemos obligados a hace una breve pausa y decir algo acerca de ellos.

Grosso modo, un *algoritmo* es un conjunto de instrucciones para realizar una tarea. En la matemática, los algoritmos desempeñan una función muy importante, pues proporcionan la solución a familias de problemas de manera uniforme y mecánica. Por ejemplo, hay un

[1] Wang, 1996, p. 3. Los esfuerzos en estos dominios han sido escasos, quizá por las dificultades para interpretar adecuadamente dichos teoremas en otros dominios. En [Penrose, 1989] hay un intento por mostrar con su ayuda que la consciencia es no algorítmica cuando forma juicios matemáticos, y en [Anderson, 1964] podemos encontrar un intenso debate en torno a la tesis de que los teoremas de Gödel muestran que el mecanicismo es falso, es decir, que las mentes no pueden ser explicadas de la misma manera que las máquinas.

algoritmo para encontrar el máximo común divisor de dos números, otro para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, otro para integrar funciones polinomiales, etc., de modo que en cada caso para resolver cualquier problema de la familia basta con aplicar uno y el mismo procedimiento. De hecho, a lo largo de la historia, muchas cosas han sucedido en torno al problema de diseñar o mejorar algoritmos.[2] En este sentido, un programa para la computadora es un algoritmo escrito en una sintaxis exacta, el cual indica a la máquina lo que se espera que haga. En este caso la sintaxis es muy precisa e inflexible, pues el más pequeño error en su escritura puede ocasionar que el dispositivo falle en la ejecución del código o se detenga.

El propósito de todo algoritmo es comunicar los cómputos que hay que realizar para llevar a cabo una tarea, y el destinatario puede ser un humano o a una máquina. El algoritmo en sí consiste en la sucesión de operaciones que hay que efectuar para transformar ciertos valores (o *datos de entrada*) en otro valor o valores como *resultado* (*datos de salida*). Por ejemplo, los datos de entrada pueden ser un sistema de ecuaciones, y el dato de salida una solución al sistema.



Todo algoritmo transforma datos de entrada en un *resultado*, o *dato de salida*.

Al conjunto de resultados (datos de salida) de un algoritmo se le llama *producción*. Un dato es *producible* por un algoritmo cuando es un elemento de su producción.

Una característica de todo algoritmo es que en su ejecución no requiere de ningún pensamiento creativo, por lo que en principio es posible construir una máquina que realice las operaciones por él indicadas.[3]

La primera definición que se tuvo de este concepto fue bajo la forma de *función recursiva*. Por su parte, en 1936 Alan M. Turing lo definió con base en ciertos mecanismos hipotéticos muy simples que hoy se conocen como *máquinas de Turing*.[4] En la actualidad, estas

[2] Por ejemplo, en la sección **3.6.4** abordamos el *problema de la decisión*, que en esencia consiste en hallar un algoritmo para determinar si una fórmula cualquiera de la lógica de predicados es válida y mencionamos el hecho de que la respuesta es negativa.
[3] Lo que sí requiere de nuestra creatividad es el diseño del algoritmo.
[4] Respecto a la funciones recursivas, véanse los apartados §4 y §7 del apéndice **18**.

"máquinas" se utilizan como modelo teórico de lo que es un cómputo.[5] Desde este punto de vista, el propósito de los algoritmos es describir procesos de tal modo que éstos puedan ser seguidos o imitados por un mecanismo de cómputo automático, y un problema se considera resoluble (o una función se considera efectivamente calculable) si, en principio, es posible construir una máquina de Turing que lo resuelva (o la calcule) en todas sus instancias.

Para ser más precisos. Una función aritmética f de n argumentos se dice que es *Turing calculable* si existe una máquina de Turing M tal que para toda sucesión $k_1, ..., k_n$ perteneciente al dominio de f, M transforma los datos de entrada $k_1, ..., k_n$ en $f(k_1, ..., k_n)$ (es decir, M "calcula" el valor de f cuando se le proporcionan los números $k_1, ..., k_n$ como datos de entrada). Tras la introducción del concepto de *máquina de Turing* no pasó mucho tiempo antes de que se llegara a los siguientes resultados:

1) Una función aritmética f es recursiva si y sólo si es Turing-calculable.[6]

2a) Para todo sistema formal *SF* se puede construir una máquina de Turing M con la propiedad de que M produce como datos de salida todos los teoremas derivables en *SF* y sólo ellos y,

2b) Dada una máquina de Turing M cuya producción es un conjunto D de datos, existe un sistema formal *SF* con la propiedad de que la clase de los teoremas derivables en *SF* es precisamente el conjunto D.[7]

En un suplemento a su trabajo de 1931, Gödel dice lo siguiente:

> Como consecuencia de los subsiguientes avances, y en particular debido al trabajo[8] de A. M. Turing ahora es posible una definición precisa e incuestionable de la noción general de sistema formal,[a] y una versión general y completa de los teoremas VI y XI [los teoremas de incompletud]. Es decir, se puede probar rigurosamente que en cada sistema formal consistente que contenga cierta cantidad de la teoría finitista de los números, existen proposiciones indecidibles y que la consistencia de cualquier sistema formal de esta especie no se puede probar en el sistema.[9]

[5] En este sentido, todas las máquinas computadoras digitales de uso en la actualidad caen bajo el concepto de *máquinas de Turing*, salvo por el hecho de que poseen limitaciones físicas que esta últimas no tienen (por ejemplo, en cuanto a su capacidad para almacenar información, que en el modelo teórico es ilimitada).

[6] Es decir, las dos definiciones de las noción de algoritmo recién mencionadas son equivalentes entre sí.

[7] En la demostración de estos resultados se recurre a la numeración de Gödel y al método de codificación de pruebas de un sistema formal. Los podemos resumir diciendo que para todo sistema formal se cuenta con una máquina de Turing cuya producción coincide con el conjunto de sus teoremas y viceversa.

[8] *V.* Turing, 1937, p. 249. [Nota de Gödel]

[9] *V.*, Gödel, 1931, en Heijenoort, 1967, p. 616.

En el pasaje anterior hay una nota al pie (insertada en el sitio marcado con la letra [a]) en la que Gödel hace algunas aclaraciones en torno a los sistemas formales. Dada su relevancia, la reproducimos íntegramente:

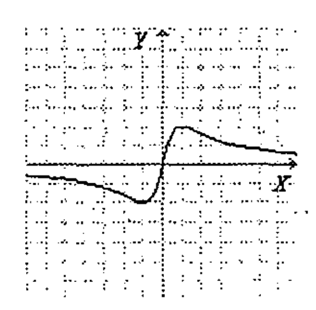
> [a] En mi opinión, el término "sistema formal" o "formalismo" jamás se debería usar para otra cosa que para esta noción. En una conferencia en Princeton[10] sugerí ciertas generalizaciones transfinitas de los formalismos, pero éstas son algo radicalmente diferentes de los sistemas formales en el propio sentido del término, cuya característica es que el razonamiento en ellos puede, en principio, reemplazarse completamente por dispositivos mecánicos.

Así, las nociones de *sistema formal* y *máquina de Turing* se identifican plenamente.

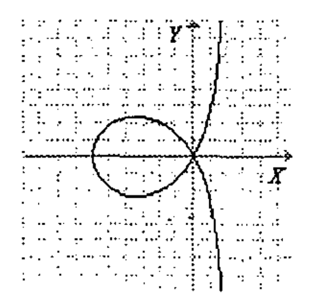
Otro resultado relevante para el análisis que se aproxima es el siguiente. Como hemos visto, los enunciados indecidibles cuya existencia demuestra Gödel son de corte elemental, es decir, enunciados aritméticos que sólo hacen referencia a los conceptos de adición y multiplicación de números naturales y algunas operación lógicas elementales. Hacia 1950 la investigación de estas cuestiones había avanzado lo suficiente como para saber algo más acerca de tales enunciados. Lo que se descubrió es que éstos se pueden expresar en la forma

$$\forall y_1, \dots \forall y_m \exists x_1, \dots, \exists x_n\, P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$$

donde P es un polinomio con coeficientes enteros cuyas únicas variables son $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$; se sabe, incluso, que el grado de P se puede hacer menor o igual a 4. Se trata de un enunciado en el que se afirma que para toda sucesión $(k_1, \dots, k_m)$ de números naturales hay una solución $(x_1, \dots, x_n)$ para la ecuación $P(x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_m) = 0$. A las ecuaciones de este tipo se les llama *diofantinas*, en honor a Diofanto de Alejandría (325-409), quien fue el primer matemático en ocuparse de ellas.[11]



Gráfica de la ecuación polinomial
$yx^2 + y - 4x = 0$



Gráfica de la ecuación polinomial
$x^3 + y^2x + 6x^2 - 2y^2 = 0$

---

[10] Cf. Davis, 1964, pp. 84-88.

[11] Por ejemplo, $x^3y - 3x^2y^2 + 3y^4 - 1 = 0$ es una ecuación diofantina de cuarto grado y $\forall y \exists x(x^3y - 3x^2y^2 + 3y^4 - 1 = 0)$ es un problema diofantino, relativo a la existencia de soluciones enteras para una ecuación diofantina.

En la figura anterior hemos trazado la gráfica de dos ecuaciones polinomiales permitiendo que las variables x e y tomen como valores números reales. En el caso de la ecuaciones diofantinas esto no está permitido, pues las únicas soluciones admisibles son las correspondientes a los nodos (o puntos de intersección) de la malla de fondo, cuyas coordenadas son enteras. Por ejemplo, las siguientes parejas de números son solución de la ecuación $yx^2 + y - 4x = 0$: (0, 0), (1, 2), (2, 1.6) y (3, 1.2). No obstante, las dos últimas soluciones no se aceptan para la ecuación, pues ambos números deberían ser enteros. Desde este punto de vista, un problema diofantino para una ecuación en dos variables x e y es la pregunta sobre si para cada valor entero de «y» la gráfica de la ecuación interseca alguna recta vertical de la forma $x = k$ donde k es un número entero. En otras palabras, cada problema diofantino sólo se pregunta por las soluciones enteras de una ecuación polinomial.

Una vez en posesión de estos conceptos y resultados, el lector no tendrá problemas para leer el siguiente apartado, en donde examinamos las ideas de Gödel en torno al mecanicismo, es decir, en torno a la tesis de que el funcionamiento de la mente humana se puede explicar con base en las máquinas de Turing. La exposición se centra en la llamada *Conferencia Gibbs*, una cuidadosa exploración de los alcances de sus teoremas limitativos.[12]

4.4.2 Filosofía de la mente

En sus reflexiones, Gödel parte del siguiente supuesto, que considera innegable: en la matemática hay un cuerpo de verdades absolutas, cuya validez no depende de ninguna hipótesis. Como sustento de esta afirmación cita dos casos:

a) Como sabemos, los enunciados de la geometría son verdaderos sólo en relación a los axiomas, no en un sentido absoluto. Por ejemplo, la afirmación «la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos» no es absoluta, sino que depende de los axiomas que se adopten. No obstante, la que sí es absoluta es la siguiente afirmación:

> *Si suponemos los postulado de Euclides, entonces la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.*

b) Todos los teoremas de la matemática finitista son ciertos en un sentido absoluto.

[12] Se trata de una conferencia que Gödel pronunció ante la *American mathematical Society* el 26 de diciembre de 1951 en la Universidad de Brown, en Providence, Rode Island. El texto de la conferencia sólo se conoció tras de su muerte y fue hallado en su *Nachlass*, bajo el título «Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications». *V.* [Gödel, 1951].

En cuanto a la tarea de axiomatizar la matemática propiamente dicha —es decir, el cuerpo de los enunciados que son verdaderos en un sentido absoluto—, Gödel difiere del proyecto axiomático de Hilbert sólo en el hecho de que los axiomas no pueden ser arbitrarios, sino enunciados matemáticos correctos y *evidentes por sí mismos*: un retorno a la posición de Euclides, aunque desde una perspectiva totalmente diferente y con más de dos mil años de historia de por medio.

En lo que sigue, por «matemática propiamente dicha» entenderemos este cuerpo de enunciados verdaderos de manera absoluta, a pesar de las diferentes posturas que hay en cuanto a su constitución.[13] Al respecto, sostenemos junto con Gödel que el fenómeno de la inexhaustibilidad de la matemática es independiente del punto de vista que se adopte. En su forma general, podemos enunciar el primer teorema de incompletud como sigue:

> *Si escogemos cualquier sistema bien definido de axiomas y reglas de inferencia en el que sólo sean derivables fórmulas verdaderas, siempre existen problemas diofantinos de carácter elemental que son indecidibles respecto de los axiomas.*[14]

Por «bien definido» se entiende que el conjunto de axiomas es recursivo, que es posible escribir todos sus elementos en un formalismo preciso y que sus reglas de inferencia son tales que dadas cualesquiera premisas, o bien se pueden enumerar todas las conclusiones asequibles con cada una de las reglas, o bien se puede determinar que no hay ninguna conclusión inmediata asequible por medio de ellas. Dada la equivalencia entre recursividad y Turing-decidibilidad, que el sistema de axiomas y reglas de inferencia esté bien definido equivale a la existencia de una máquina de Turing capaz de enumerar una tras otra todas las consecuencias de los axiomas. Por esta razón el teorema de incompletud corresponde al hecho de que no existe un procedimiento finito para decidir de manera sistemática todos los problemas aritméticos del tipo especificado: si lo hubiera, tal procedimiento se podría incorporar a un sistema formal en el que todos estos problemas serían decidibles, lo cual, como sabemos, no es posible.

---

[13] Si bien Heyting y Hilbert aceptarían en principio esta posición, en lo que no estarían de acuerdo es en lo que se entiende por «matemática propiamente dicha». Por ejemplo, Heyting rechaza el principio del tercero excluido y algunos axiomas, mientras que Hilbert no acepta en la matemática finitista ni siquiera la cuantificación universal, como lo hemos podido constatar.

[14] En su libro *A logical Journey*, Hao Wang enuncia de cinco maneras distintas el primer teorema de Gödel, cada una de las cuales resalta un aspecto distinto del mismo. Son las siguientes:

- Cualquier teoría formal consistente para la matemática posee proposiciones indecidibles.
- Ningún sistema formal para la matemática puede ser a la vez consistente y completo.
- La matemática es inexhaustible.
- Ningún *demostrador de teoremas* (o programa) puede probar todas las verdades matemáticas y sólo ellas.
- La matemática es inexhaustible (o incompletable) mecánicamente (o algorítmicamente). *Cf.*, Wang, 1996, p. 3.

En particular, un problema diofantino indecidible para el sistema es el enunciado *C* que afirma su consistencia.

> Es este teorema el que hace particularmente evidente la incompletabilidad de la matemática, pues hace imposible que alguien pueda establecer cierto sistema bien definido de axiomas y reglas y, al mismo tiempo, pueda, de forma consistente, hacer la siguiente afirmación sobre él: percibo (con certeza matemática) que todos estos axiomas y reglas son correctos y además creo que contienen toda la matemática. Si alguien afirma lo anterior se contradice a sí mismo, pues si percibe cómo correctos los axiomas en consideración, también percibirá (con la misma certeza) que son consistentes, con lo que debe poseer una intuición matemática no derivable de sus axiomas.[15]

En otras palabras: quien eso diga percibirá, en contra de lo que afirma, que esos axiomas y reglas no contienen a toda la matemática, tras lo cual Gödel se pregunta «¿Significa esto que ningún sistema bien definido de axiomas correctos puede contener toda la matemática propiamente dicha?».[16] La respuesta a esta interrogante depende de lo que se entienda por "matemática propiamente dicha". En esto se advierten dos tendencias divergentes que Gödel denomina, respectivamente, *matemática en sentido objetivo* y *matemática en sentido subjetivo*:

La una afirma que la matemática consiste de todas las proposiciones matemáticas *verdaderas*.	La otra afirma que la matemática consiste de todas las proposiciones matemáticas *demostrables*.[17]

1) Conforme a la primera tendencia, la respuesta a la pregunta es afirmativa, tal como se sigue de los teoremas limitativos: la proposición que afirma la consistencia de un sistema no contradictorio es verdadera mas no derivable de sus axiomas. Este es el punto de vista de Gödel.

2) Conforme a la segunda tendencia, la respuesta a la pregunta puede ser negativa, es decir, la limitación señalada no implica que ningún sistema bien definido de axiomas correctos pueda contener a toda la matemática propiamente dicha. Por el contrario, muy bien puede suceder que haya una regla que genere todos los axiomas evidentes de la matemática

[15] Gödel, 1951. Cita tomada de la traducción al español, p. 154.
[16] Gödel, *ibid.*
[17] Este sería el punto de vista de Hilbert cuando afirma que «[tras la formalización] *las matemáticas reales*, esto es, las matemáticas en un sentido estricto, se convierten de esta manera en un conjunto de fórmulas demostrables.» [Hilbert, 1922a. Cita tomada de la traducción al español, p. 59]. Con mayor insistencia Herbrand y Carnap suscribirían gustosos esta tesis, según la cual la matemática consiste de un conjunto de proposiciones demostrables sin ningún vínculo con la noción de *verdad*.

subjetiva. No obstante, en tal caso la proposición que establece la corrección de la regla no será derivable de los axiomas y estaría fuera del alcance de la matemática misma, por lo que nadie podría percibir con certeza matemática que los axiomas en su totalidad son correctos.

En otras palabras, aun cuando tal regla existiera y nos fuera dado conocerla y utilizarla, nuestra única prerrogativa sería percibir como verdaderas las proposiciones generadas para cualquier número finito de ellas, mas no demostrar que la regla sólo produce proposiciones evidentes, ya que esto constituiría una prueba de consistencia para la totalidad de los axiomas, lo que, por causa del segundo teorema de Gödel, habría de apoyarse en algún tipo de discernimiento no derivable de la regla, es decir, en algún tipo de evidencia que escaparía a ella (por lo que ya no contendría a toda la matemática). En consecuencia, si tal fuera el caso, jamás podríamos saber con certeza matemática lo siguiente: (i) que la regla sólo produce proposiciones evidentes, y (ii) que ninguna proposición evidente es omitida por ella.[18] Tales limitaciones aparecerían ante nuestro entendimiento como una falta de límites y la matemática se vería en todo momento como algo inexhaustible.[19]

Prosiguiendo sus reflexiones en torno a esta alternativa, Gödel concluye que en caso de que realmente exista tal regla finita, de ello se sigue que la mente humana es equivalente en la esfera de la matemática pura a una máquina finita (diríamos: a una máquina de Turing) incapaz de conocer completamente su propio funcionamiento (pues no podría explicar por qué en ese dominio jamás habría de contradecirse a partir de los principios admitidos).

Una explicación del argumento de Gödel es la siguiente. Si tal regla existiera, las posibilidades matemáticas de la mente humana se podrían englobar en un formalismo, que a fin de cuentas no sería sino un *mecanismo* para producir fórmulas o teoremas. En consecuencia, nada que la mente humana pudiera concebir escaparía a las posibilidades de cierta máquina finita a la que sería equivalente.[20] Tal incapacidad de la mente humana para comprenderse a sí misma haría particularmente notoria la incompletabilidad de la

[18] Se trataría, de nuevo, de un problema irresoluble para la mente humana.

[19] Podemos precisar este argumento como sigue. Sea K la clase constituida por los axiomas evidentes de la matemática subjetiva. Una prueba de que la regla sólo genera axiomas evidentes constituiría a la vez una demostración de consistencia para K. Pero una regla de tal índole no podría ser otra cosa que un procedimiento finito o algoritmo (¿en qué otra cosa podría estar pensando Gödel?) que estipulara cómo construir las fórmulas correspondientes a los elementos de K. Pero Gödel, en clara adhesión a la tesis de Church, considera que la noción matemática de función recursiva constituye la definición precisa del concepto de procedimiento finito, (Cf. Gödel, 1951, primer párrafo) por lo que la clase K sería recursiva. Ahora bien, por el segundo teorema de incompletud, la fórmula $consis_k$ que asevera la consistencia de K no sería derivable a partir de K, por lo que la prueba de que la regla sólo produce axiomas evidentes de la matemática subjetiva no podría sustentarse sobre dichos axiomas. Pero, ¿en qué otras evidencias se podría apoyar, si ahí están todos los principios matemáticos evidentes?

[20] Esto es así en virtud de que el concepto matemático de procedimiento mecánico lo constituye precisamente la noción de máquina de Turing, por lo que para cada formalismo definido en el sentido usual existe una máquina de esta clase que produce los mismos teoremas, como ya lo hemos señalado en el apartado 4.4.1.

matemática: «existirían problemas diofantinos absolutamente irresolubles [...] donde el epíteto "absolutamente" significa que tales problemas no sólo no serían decidibles en algún sistema axiomático en particular, sino por ninguna prueba matemática que la mente humana pueda concebir.»[21]

Por el contrario, si, como sostienen los intuicionistas, la matemática es incompletable en el sentido de que ninguna regla finita puede abarcar la totalidad de sus axiomas evidentes, entonces la capacidad de la mente humana en el terreno de la matemática pura supera (infinitamente) la de cualquier máquina finita, pues para cualquier sistema de axiomas correctos siempre habrá (una infinidad de) proposiciones no demostrables a partir de ellos que la mente humana es capaz de reconocer como evidentes.

Así, la siguiente conclusión parece inevitable:

> O la matemática es incompletable en el sentido de que una regla finita no puede abarcar nunca sus axiomas evidentes, es decir, que la mente humana (incluso en el reino de la matemática pura) sobrepasa infinitamente la potencia de cualquier máquina finita, o bien existen problemas diofantinos absolutamente irresolubles del tipo especificado (donde no se excluye el caso de que ambos términos de la disyunción sean verdaderos, con lo que hay, estrictamente hablando, tres alternativas).[22]

La siguiente conclusión también parece inevitable: la matemática es inagotable, ya sea por que objetivamente lo es, ya sea por que así se presenta ante el entendimiento humano.

Resulta de lo anterior que en el mejor de los casos, es decir, en caso de que no exista una regla que genere todos los axiomas evidentes de la matemática, habrá en todo momento problemas aritméticos para los que no se tenga ningún indicio de cómo resolverlos, ni se vislumbre cómo precisar aquellos principios evidentes que llevaría a su solución.[23] La otra alternativa es aún más devastadora: hay problemas aritméticos *absolutamente* irresolubles, donde «absolutamente» significa que ningún procedimiento que la mente humana pudiera concebir sería suficiente para resolverlos. Tal es la lectura que Gödel hace de sus teoremas en relación a la filosofía de la mente y el debate sobre el mecanicismo.

En cuanto a Hilbert, podemos ver cómo la lóbrega imagen del *ignorabimus* reaparece en el horizonte, a la vez que su esperanza epistemológica se desvanece. Los teoremas de Gödel dejan abierta la posibilidad de que haya problemas matemáticos imposibles de resolver, es decir, problemas matemáticos que la mente humana jamás podrá solucionar (al respecto,

[21] Gödel, *op. cit.*. Cita tomada de la traducción al español, p. 155. Un ejemplo de tales problemas sería el que expresa la consistencia del sistema.
[22] Gödel, *ibid.*
[23] Para Gödel, uno de tales problemas sería la hipótesis de continuo.

véase el comentario (**2**) de la sección **3.3.2**). En todo caso, la convicción de que todo problema matemático es resoluble se ofrece, a la luz de los teoremas limitativos de Gödel, como algo injustificado.[24]

4.4.3 ¿Es la matemática una libre creación del espíritu humano?

Una de las principales motivaciones de Gödel al explorar las consecuencias de sus teoremas limitativos era mostrar cómo los modernos desarrollos en los fundamentos de la matemática apuntan hacia una postura realista o platónica. Con dicho propósito en mente, Gödel se lanza contra la concepción opuesta, es decir, contra la tesis de que los hechos y objetos matemáticos no poseen ningún tipo de existencia objetiva.[25] Gödel abre con una crítica a la vaga idea de que la matemática es una «libre creación» del espíritu humano, para sólo más tarde ocuparse de algunos casos específicos de esta tesis. Dado el carácter disyuntivo de la conclusión alcanzada en la sección anterior, las consecuencias también las establece de manera disyuntiva.[26] Lo que sigue es un compendio de los puntos más relevantes junto con algunos comentarios.

1) De la primera alternativa se sigue que el funcionamiento de la mente humana no se puede reducir al del cerebro, pues éste es a todas luces una máquina finita con un número finito de partes (las neuronas y sus conexiones) mientras que la mente, en este caso, es superior a cualquier mecanismo de tal índole. Este resultado se opone a la filosofía materialista, que niega que la mente sea independiente del cerebro, y conduce en cierto sentido a un punto de vista vitalista según el cual los fenómenos mentales no pueden ser enteramente explicados mediante causas mecánicas, ni la mente humana puede ser imitada artificialmente por una máquina con un número finito de partes.[27]

1') Se podría objetar que la mayor efectividad de la mente humana no significa que exista una entidad inmaterial fuera del cerebro que se valga de él como de un instrumento. Por el contrario, se puede argüir que esto simplemente revela que el comportamiento de la materia viva está gobernado por leyes mucho más complejas de lo que habíamos esperado, que el cerebro es un sistema en el que el comportamiento del todo no se deduce del de las partes

[24] Ciertamente, los teoremas de Gödel nos permiten afirmar que la matemática estará por siempre abierta a la incorporación de nuevos métodos y principios de demostración, sin que haya una regla o patrón que los determine. En otras palabras: la matemática estará por siempre abierta a la creatividad de la mente humana, a la incorporación de nuevas formas que permitan extender campo de acción. Volveremos a esta cuestión la sección 5.3.

[25] Véase [Gödel, 1951].

[26] La alternativa es: (1) *la matemática es incompletable en el sentido de que una regla finita no puede abarcar nunca sus axiomas evidentes*, o (2) *existen problemas diofantinos absolutamente irresolubles.*

[27] En esto Gödel se opone a Turing en cuanto al «juego de la imitación». Véase al respecto [Turing, 1950].

aisladas. No obstante, dice Gödel, quienquiera que sostenga esta objeción estará dejando de lado con igual razón al materialismo, pues adscribe a la materia todas las propiedades de la mente, cuando la esencia de materialismo es explicar tales atributos sobre la sola base de las leyes que gobiernan la interacción entre las partes.

2) La segunda alternativa indica que la tesis de que la matemática es nuestra propia creación es errónea, pues el creador conoce necesariamente todas las propiedades de sus criaturas, cuyos únicos atributos son los que les ha otorgado. En todo caso, esta alternativa parece implicar que los objetos y los hechos matemáticos existen independientemente de nuestros actos mentales y decisiones, lo que supone alguna forma de realismo o platonismo respecto de ellos.

2') Se podría objetar el punto anterior arguyendo que no existen cosas tales como «proposiciones verdaderas aunque indecidibles», pues el significado de una proposición sobre todos los enteros no puede consistir sino en la existencia de una prueba general de ella (dada la imposibilidad de verificarla para todos los enteros uno por uno).

Wittgenstein, por ejemplo, cuestiona: «¿Habrá proposiciones verdaderas en el sistema de Russell que no pueden ser demostradas en su sistema? ¿Entonces, a qué le llamamos una proposición verdadera en el sistema de Russell ?»[28] En su opinión, las únicas proposiciones que podemos aseverar en dicho sistema son las "leyes fundamentales" (los axiomas) y aquellas que figuran al final de sus pruebas. No hay otro camino.[29] Wittgenstein diría entonces que en el caso de una proposición indecidible, ni ella ni su negación son verdaderas, por lo que no expresan una propiedad objetivamente existente de los enteros, aunque desconocida.

Al margen de otras objeciones, Gödel aduce que es perfectamente posible conjeturar la verdad de una proposición y al mismo tiempo presumir que no existe una prueba general de ella. Tal podría ser el caso, por ejemplo, de la conjetura de Goldbach, que ha sido comprobada en todos los casos particulares investigados sin que se tenga una demostración de ella.[30] La experiencia nos indica en este caso que la proposición tiene grandes posibilidades de ser verdadera.

Lo anterior no es sino un ejemplo de lo que Gödel avizora como una posibilidad real en la matemática: la de valerse de métodos inductivos tal como lo hace la física. Si los

[28] Wittgenstein, 1978, p. 117.
[29] Véase Wittgenstein 1978, pp. 116-123.
[30] La conjetura afirma que todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos.

matemáticos sienten horror ante tal circunstancia, ello se debe al prejuicio de que los objetos matemáticos no tienen una existencia real.

> Si la matemática describe un mundo justamente tan objetivo como el de física, no hay razón para que los métodos inductivos no se apliquen en la matemática tal como se hace en la física. El hecho es que en la matemática tenemos la misma actitud que en tiempos pasados se tenía hacia todas las ciencias, esto es, tratamos de derivarlo todo de las definiciones (es decir, de la esencia de las cosas, por usar términos ontológicos) mediante pruebas convincentes. Quizá este método sea tan erróneo en matemática como lo fue en física, si reclama el monopolio. [...] Este argumento global muestra, de paso, que las implicaciones filosóficas de los hechos matemáticos explicados no están enteramente del lado de la filosofía racionalista o idealista, sino que en un aspecto favorecen la concepción empirista.[31]

En el caso de la segunda alternativa, la verdad de una proposición absolutamente indecidible sólo se podría aproximar con estos métodos, lo que iría en contra de la tesis de que el único camino para determinar el conocimiento en matemáticas es la razón demostrativa (racionalismo, idealismo).

Gödel llega incluso a decir que las conclusiones expuestas en (1) y (2), en especial las relacionadas con el platonismo, son válidas en general y no dependen de qué alternativa se elija e insiste en que éstas reciben el apoyo de los desarrollos modernos en torno a los fundamentos de la matemática. Sus argumentos son esencialmente los siguientes:

Primero. Si la matemática fuera nuestra libre creación, es cierto que todavía podría darse la ignorancia respecto a los objetos creados, pero sólo por falta de una clara conciencia de lo realmente creado (o a causa de la dificultad práctica de cálculos demasiado complicados). Por tanto, tendría que desaparecer tan pronto como alcanzáramos una perfecta claridad. Sin embargo, los desarrollos modernos en la fundamentación de la matemática han logrado un insuperable grado de exactitud, sin que ello haya servido de ayuda en la solución de los problemas matemáticos.

Comentario. Hilbert también pensó en la «perfecta claridad», y creyó alcanzarla a través del perfeccionamiento del método axiomático. En su opinión, los sistemas formales, con su estructura bien definida y aparente simpleza, serían el instrumento ideal y la absoluta «claridad» se alcanzaría tras resolver el *problema de la decisión*. Y si bien Church y Turing demostraron (con base en la tesis de Church) que el problema no tiene solución incluso en los casos más simples del cálculo restringido de predicados y la aritmética elemental, a lo dicho por Gödel se pueden oponer los siguientes argumentos:

---

[31] Gödel, 1951. Cita tomada de la traducción al español, p. 158..

i) El hecho de que no tengamos un conocimiento total y absoluto de los objetos creados tan sólo indica que la creación no se realiza en un día, no que ésta no tenga lugar. Nada en la ciencia moderna invalida el hecho de que la matemática es una libre creación del espíritu humano. No es que en esto seamos lo más cercano a los dioses, es que en esto somos dioses (el paraíso cantoriano es obra de Cantor, no de Dios).

ii) Si bien el problema de la decisión no se puede resolver con métodos recursivos, ello no significa que en el futuro no se *inventen* nuevos procedimientos que permitan resolver de manera efectiva toda cuestión que se planteé al seno de las teorías formalizadas. Como es de suponerse, con estos procedimientos se podría extender la familia de axiomas más allá de las clases recursivas.

iii) Los argumentos de Gödel dependen de la aceptación de la tesis de Church, cuya validez no es reconocida por todos.

Estas objeciones, que no necesariamente representan nuestro punto de vista, tienen como propósito fijar el alcance de lo dicho por Gödel.

Segundo. La actividad del matemático muestra muy poco de la libertad que un creador debería disfrutar. Incluso si, por ejemplo, los axiomas sobre los enteros fueran de libre invención, todavía debería admitirse que el matemático, una vez imaginadas las primeras propiedades de sus objetos, ha llegado al final de su poder creativo y no está en situación de crear a su voluntad también la validez de sus teoremas. Si algo como la creación existe a fin de cuentas en la matemática, entonces lo que hace cada teorema es precisamente restringir la libertad de creación; pero aquello que la restringe debe evidentemente existir con independencia de la creación.

Comentario. Frente a este argumento se puede objetar que algo semejante sucede en otros ámbitos de la creación, sin que por ello se considere realmente existente aquello que se ha concebido. Por ejemplo, lo que da vida a las novelas de Conan Doyle es la coherencia lógica de sus narraciones, por lo que no puede crear a su voluntad situaciones que no concuerden con lo ya estipulado. Sucede entonces que cada pasaje de sus novelas restringe su libertad de creación y que él tampoco está en posibilidades de resolver más allá de ciertos límites las situaciones creadas. No obstante, nadie en su sano juicio diría que ello prueba que sus personajes existen al margen de su creación.[32] De igual modo, el poco margen de acción que resta al matemático una vez imaginadas las primeras propiedades de sus objetos tiene

[32] Escogimos este ejemplo por una razón: en Londres, en el 221 de la calle Baker, se puede visitar la casa en que "vivieron" Sherlok Holmes y el Dr. Watson, convertida en museo. Tal es la fuerza de nuestra imaginación. No obstante, ello no cambia el hecho de que en realidad tales personas jamás existieron (como podría ser el caso de los objetos matemáticos, en contra de lo que Gödel sostiene).

que ver con su sujeción a la lógica; además, la posibilidad de crear a voluntad la validez de sus teoremas se podría lograr en cierta medida cambiando los principios y las reglas deductivas (aunque este *juego* no tenga mayor interés en la matemática usual).

Tercero. Si los objetos matemáticos son nuestra creación, entonces los enteros y los conjuntos de enteros tendrán evidentemente que ser dos creaciones distintas, la primera de las cuales no necesita de la segunda. Sin embargo, a fin de probar ciertas proposiciones sobre los enteros se necesita el concepto de conjunto. Así que, con la finalidad de hallar las propiedades que *nosotros* hemos dado a ciertos objetos producto de la imaginación pura, debemos primero crear ciertos objetos adicionales, lo cual constituye desde luego una situación muy extraña.

Comentario. En realidad, no sabemos a ciencia cierta si la necesidad del concepto de conjunto es tal, o si se trata de una noción prescindible, en el sentido de que todo lo que se demuestre con su ayuda en relación a los números enteros se puede demostrar sin él. Pese a todo, la opinión de Gödel cuenta con el apoyo de lo que sucede en la teoría de los números, en la que se tienen demostraciones analíticas de ciertos teoremas para los que no se conoce otro camino.[33] Esto, evidentemente, haría pensar a Hilbert y sus seguidores que las llamadas «nociones ideales» (conjuntos infinitos, números reales, etc.) no son meros auxiliares en el desarrollo de la teoría, sino elementos indispensables en su construcción.

Ciertamente, los teoremas limitativos apoyan la idea de que existe una relación armónica intrínseca entre las propiedades de los números naturales y las capas más elevadas de la jerarquía conjuntista. Así, por ejemplo, si a la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (*ZF*) añadimos el axioma de elección, serán ciertas proposiciones aritméticas las que resulten indecidibles en dicha teoría, distintas de las que lo serían si se asumiera la negación de dicho axioma. Así, la clase de problemas aritméticos que podremos resolver dependerá de los axiomas que escojamos para los conjuntos de los niveles superiores, no limitándose el alcance de la teoría aritmética a la elección de los axiomas elementales, todos ellos relativos a los números naturales y nada más.

Es obvio que lo anterior favorece al realismo conceptual de Gödel: si los objetos matemáticos fueran una libre creación del espíritu humano, ¿por qué las propiedades de los

[33] En la teoría analítica de los números se estudian las propiedades de los números enteros con los métodos del análisis matemático y, por consiguiente, con base en las nociones de límite, continuidad, convergencia asintótica, número complejo, etc. propios de esta disciplina. Por ejemplo, un célebre teorema de esta teoría es el siguiente: *Existe un* número k *tal que cada número impar* n > k *es la suma de tres números primos*. En la actualidad se ignora si habrá una demostración elemental de este hecho, es decir, una demostración que no vaya más allá de los postulados de Peano de primer orden. Otro ejemplo lo constituye el último teorema de Fermat, recientemente demostrado por Andrew Wiles con base en la teoría de las ecuaciones elípticas y la teoría de módulos, las cuales rebasan con mucho la aritmética elemental. No obstante, el teorema es elemental: Si $n > 2$, no existen números enteros x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$.

objetos pertenecientes a cierta esfera habrían de depender de hipótesis relativas a otro orden de objetos en principio ajenos a aquéllos? Otro ejemplo es el siguiente. En la teoría de Zermelo-Fraenkel se puede probar por medio de la inducción transfinita hasta ε_0 que la aritmética elemental, es decir, la aritmética de Peano de primer orden, es consistente.[34] Se tiene con ello una demostración en *ZF* de que cierto problema aritmético (a saber, el expresado por el enunciado *G* de Gödel relativo a *AP*) es indecidible en *AP*. Como la inderivabilidad de *G* implica su verdad, el problema que representa se habrá resuelto con la ayuda de ciertas hipótesis relativas a otro orden de objetos. Resulta entonces que la teoría de conjuntos, que no está presupuesta en la construcción de la aritmética elemental, sí tiene un efecto en ésta.

Lo anterior sería básicamente la crítica de Gödel a la vaga idea de que la matemática es nuestra libre creación. Lo que sigue es una crítica directa a una forma más precisa de esta idea: el positivismo lógico.

4.4.4 Crítica al nominalismo y al positivismo lógico

La formulación más radical que se ha dado hasta ahora de la tesis anterior es la del positivismo lógico, según la cual las proposiciones matemáticas son verdaderas sólo en virtud de ciertas reglas arbitrarias sobre el uso de símbolos. Esta tesis fue desarrollada por algunos miembros del *Círculo de Viena* hacia 1930.[35]

Trataremos de resumir en unas cuantas líneas el punto de vista del positivismo lógico en lo que a la matemática respecta. Sus tesis centrales son dos: (1) que la matemática es parte de la lógica y (2) que sus proposiciones son verdaderas sólo por convención, es decir, como consecuencia de convenciones lingüísticas introducidas por nosotros. Examinémoslas por separado.

¿Por qué una proposición como, por ejemplo, «7 + 5 = 12» es tenida por cierta? Obviamente, no porque nuestras experiencias pasadas nos indiquen que así es, sino porque, eso dicen, hemos *convenido* que los símbolos «7 + 5» y «12» denotan el mismo número. Su sinonimia resulta del hecho de que hemos *definido* (tácita o explícitamente) los símbolos «5», «7», «12», «+» e «=» de tal modo que la identidad anterior es válida a causa de los significados adscritos a ellos. Por ejemplo, en este caso se diría que la identidad «7 + 5 =

[34] Véase el apartado 4.3.3.

[35] El Círculo de Viena funcionó como grupo organizado y como centro de reunión con el que Gödel mantuvo algunos contactos entre 1926 y 1930. Se sabe que este acercamiento consistió en asistencias a sus seminarios y discusiones con algunos de sus integrantes. Quizá por esta razón en diversos sitios se le señala equivocadamente como uno de sus miembros, tal como en [Ayer 1965, p. 9.]

12» simplemente establece que cualquier conjunto que consista de $7 + 5$ objetos consistirá de 12 objetos. Esto presupone que las proposiciones aritméticas están referidas en última instancia a nociones como las de clase, unión de clases, etc. de tal forma que su verdad deriva de los conceptos fundamentales de la lógica. También presupone que los conceptos de clase, unión de clases, etc. pertenecen a la lógica. Tal punto de vista es extensible a toda la matemática. Por ello sostienen que sus proposiciones son analíticas y vacías (si de ir en contra de Kant se trata): nada dicen acerca de la realidad y ningún conocimiento empírico se puede derivar de ellas.[36]

El análisis de las convenciones lingüísticas ha menester de un lenguaje simbólico que permita expresar debidamente la estructura de las proposiciones, la manera en que éstas se combinan mediante partículas lógicas y cómo se deducen formalmente las unas de las otras. Carnap en particular propone un lenguaje específico (el «lenguaje II» de su *Logical Syntax of Language*)[37] en el que todas las proposiciones tanto de la matemática clásica como de la física clásica se pueden formular. En cuanto a la parte deductiva, ésta se organiza mediante axiomas y reglas de transformación sintácticas, es decir, introduciendo un sistema formal a la manera de Hilbert.[38] Carnap llega incluso a delinear una sintaxis general que abarcaría todas las formas de lenguaje posibles y, por lo tanto, todos los sistemas lógicos posibles. Es así que el positivismo lógico confluye con la dirección formalista de Hilbert y llega a sostener, al igual que éste, que el trabajo de la matemática consiste en elaborar deducciones, según reglas determinadas, sobre la base de proposiciones tomadas convencionalmente como axiomas.

En cuanto a la idea de que la matemática (pura) es una rama de la lógica, el positivismo lógico considera que esto lo demuestran Russell y Whitehead en *Principia Mathematica* con su aparente reducción de la primera a la segunda, es decir, mediante el procedimiento de (1) definir todos los conceptos de la matemática en términos de los conceptos de la

[36] Una proposición es *analítica* cuando su validéz no depende de los hechos, es decir, cuando es verdadera por los mismos términos que la componen. Acorde a esta definición, las proposiciones analíticas no implican nada en relación al mundo de la experiencia. Gödel, al igual que Carnap, sostiene que las proposiciones de la matemática son analíticas, pero por distintas razones. Para Carnap, su analiticidad está ligada a su supuesta vacuidad: son válidas en virtud de las *definiciones* de los términos que las componen, no de lo que éstos signifiquen. Por el contrario, para Gödel son analíticas «en virtud del significado de los conceptos que aparecen en ellas», remitiéndose de este modo a algo objetivo que no depende necesariamente de nuestras definiciones. Otro es el caso de las proposiciones sintéticas, cuya validez se determina por los hechos empíricos. Ninguno de los dos diría que la matemática comprende proposiciones de este tipo, pues no trata con nada que corresponda al ámbito de la experiencia.

[37] *V.* Carnap, 1937.

[38] En este contexto, Carnap define las proposiciones analíticas como aquellas que se pueden derivar de la clase nula de proposiciones (es decir, que son *válidas* en virtud de su estructura).

lógica y (2) deducir todos los teoremas de la matemática por medio de los principios de la lógica.[39] He aquí cómo se expresa Hans Reichenbach al respecto:

> La construcción de la lógica simbólica hizo posible la investigación desde un nuevo ángulo de las relaciones entre lógica y matemáticas. ¿Por qué hay dos ciencias abstractas para tratar los productos del pensamiento? La pregunta fue acogida por Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead, quienes llegaron al resultado de que las matemáticas y la lógica son, en última instancia, idénticas, que las matemáticas no son más que una rama de la lógica desarrollada con referencia especial en el sentido de las aplicaciones cuantitativas.[40]

Para añadir más adelante:

> Con su prueba de que las bases de la aritmética pueden derivarse de la lógica pura, Russell ha demostrado que la necesidad matemática es de naturaleza analítica. En las matemáticas no hay síntesis a priori.
> Pero si la lógica es analítica, es vacía; esto es, no expresa propiedades de objetos físicos. ... La lógica formula reglas del lenguaje, por esa razón es analítica y vacía. ... La necesidad lógica y la vacuidad van juntas y ambas constituyen la naturaleza analítica, o tautológica, de la lógica. Todos los juicios puramente lógicos son tautologías, ...; no dicen nada y por lo tanto nos informan tanto o tan poco como la tautología "mañana lloverá o no lloverá".[41]

La idea de que las proposiciones matemáticas sólo representan tautologías no es más que una variante de la tesis considerada. Desde este punto de vista, el que no toda proposición matemática manifieste su naturaleza tautológica es por el hecho de ser una especie de abreviatura. Esto presupone que la tautología se hará aparente al substituir sucesivamente los términos definidos en vez de sus definiciones, tal como sucede, por ejemplo, con la proposición «todo semental es macho» al reemplazar el término «semental» por su definición: animal macho destinado a la reproducción. La objeción de Gödel es simple: si toda proposición matemática se puede reducir a una tautología explícita obrando de esta manera, se tiene a la mano un procedimiento de decisión para la verdad o falsedad de las proposiciones matemáticas. No obstante, las investigaciones en torno a los fundamentos indican que esto último es imposible.[42]

---

[39] No se puede decir sin más que lo hecho por Russell y Whitehead fue una reducción de la matemática a la lógica. Faltaría saber si los principios de la lógica efectivamente comprenden los axiomas de infinitud y de elección indispensables en tal procedimiento.
[40] Reichenbach 1951. Cita tomada de la traducción al español, pp. 230.
[41] Reichenbach, *op. cit.*, pp. 230-232.
[42] Si, como todo parece indicar, eso es lo que Wittgenstein quería decir en el *Tractatus*, se trata de un desacierto. Cf. Wittgenstein 1979, pp. 169-185.

En cuanto a Carnap, Gödel observa que para sostener la tesis de que las proposiciones matemáticas sólo son verdaderas en virtud de ciertas reglas arbitrarias sobre el uso de símbolos, se debería demostrar al menos lo siguiente:

i) que toda proposición matemática demostrable se puede deducir de las solas reglas semánticas sobre la verdad y falsedad de los enunciados (es decir, sin recurrir a nada más que estas reglas) y

ii) que las negaciones de las proposiciones matemáticas demostrables no se pueden derivar de ese modo.[43]

Gödel cita dos casos concretos en los que (i) se ha demostrado: el de Ramsey, en el que se presupone la teoría de conjuntos transfinitos al reducir todo teorema a una tautología explícita de la forma $A \leftrightarrow A$ y el de Carnap, que para ello se ve obligado a considerar conjuntos infinitos de proposiciones, conjuntos de conjuntos, etc. Es claro que en ambos casos la concepción nominalista sólo ha producido una refutación de ella misma: no ha satisfecho el requisito de sólo recurrir a las reglas sintácticas, sino que, por el contrario, se ha valido de la matemática misma para reducir los teoremas a meras tautologías. Gödel ve en todo esto una petición de principios, pues a fin de demostrar que los axiomas matemáticos son derivables a partir de las convenciones sintácticas, primero debemos interpretar dichos axiomas como referidos a los símbolos, conjuntos de símbolos, etc. que figuran en la construcción sintáctica de la teoría. En otras palabras: para probar el carácter tautológico de los teoremas, se ha supuesto la *verdad* de los axiomas, cuando la idea original era la opuesta, hacer comprensible la verdad de los axiomas matemáticos mostrando que son tautologías. Además, en lugar de que las convenciones sintácticas definan el significado de los conceptos matemáticos, debemos primero entender estos últimos a fin de comprender dichas convenciones o la prueba de que de ellas se siguen los axiomas matemáticos, pero no sus negaciones. Faltaría saber si esto es inevitable, es decir, si tal circunstancia es independiente del lenguaje simbólico que se elija, aunque Gödel no se detiene ante ello al momento de extraer conclusiones.

Como quiera que sea, el argumento de mayor peso en contra de la concepción sintáctica deriva del segundo teorema de Gödel. En efecto, una demostración del carácter tautológico de los axiomas sería también una prueba de consistencia, imposible de lograr recurriendo únicamente a los medios disponibles en el sistema. Por ejemplo, en el caso específico de la teoría de los números ha sido necesario utilizar conceptos como los de «conjunto», «función aritmética», «funcional finito», etc. que no están directamente referidos a objetos

[43] Cf. Gödel, 1995, p. 316.

sensibles y de los que los signos son si acaso una instancia particular. Esta necesidad de recurrir a construcciones del pensamiento y no sólo a objetos sensibles resulta del hecho de que la aritmética elemental contiene toda demostración que sólo haga alusión a símbolos y agrupaciones de símbolos (fórmulas, pruebas, etc.), pues el método de aritmetización de Gödel permite convertir los objetos sintácticos en números y toda demostración relativa a objetos sintácticos en una demostración relativa a enteros. En consecuencia, toda prueba de consistencia de la teoría de los números, o de cualquier teoría que la contenga, habrá de recurrir a conceptos abstractos no referidos a símbolos. Hay en esto una inversión: el recurso a conceptos abstractos permite probar la consistencia de ciertos sistemas formales, cuando la tarea del nominalismo debería ser justificar el uso de aquéllos mediante consideraciones sintácticas.[44]

La conclusión a la que llega Gödel es lapidaria: «no existe justificación racional de nuestras creencias precríticas sobre la aplicabilidad y la consistencia de la matemática clásica (ni siquiera en su nivel más bajo, la teoría de números) sobre la base de una interpretación sintáctica.».[45] La teoría de números se encuentra en el punto de partida por una razón muy simple: su axioma básico, el de inducción completa, es esencial para las consideraciones sintácticas.[46]

4.4.5 Salvaguarda del realismo

No sin cierta ironía podemos decir que con su crítica al nominalismo, Gödel elevó nuestro nivel de incomprensión de lo que la matemática *es*, pues lo único que hizo fue mostrar que la matemática *no sólo es* sintaxis, respondiendo de este modo con una negativa a la pretensiones de Hilbert en el programa y de algunos destacados miembros del Circulo de Viena.[47] En este sentido, las reflexiones contenidas en la parte final de la conferencia Gibbs

---

[44] No sólo Hilbert se encuentra en esta situación: Carnap también le hace compañía.

[45] Gödel 1951. Cita tomada de la traducción al español, p. 163.

[46] Se recurre a este axioma incluso en el caso de pruebas sintácticas de carácter muy general, como, por ejemplo, la del *metateorema de la deducción*: si de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ se deduce β, entonces de Γ se deduce $\alpha \rightarrow \beta$.

[47] En respuesta a un cuestionario que le enviara Burke D. Grandjean en 1974, en el que, entre otras cosas, le inquiere sobre su desarrollo intelectual, Gödel escribió una carta (que, como el lector imaginará, jamás envió) en la que hace las siguientes aclaraciones:

1) «Es cierto que mi interés por los fundamentos de la matemática surgió a través del contacto con el "Círculo de Viena", pero las consecuencias filosóficas de mis resultados, lo mismo que los principios heurísticos que llevan a ellos son cualquier cosa menos positivistas o empiristas.»

2) «Nunca he mantenido que la matemática sea sintaxis del lenguaje, sino que por el contrario esta tesis, en cualquiera de sus sentidos razonables, puede ser *refutada* con mis resultados.» [Texto reproducido en Wang, 1987. Las citas fueron tomadas de la traducción al español, p.57.]

son un intento por llenar este vacío, por aclarar lo que a su juicio la matemática *es*. Por extraño que parezca, esto le resulta más fácil cuando lo contrasta con el nominalismo.[48]

Gödel recurre en este punto a un símil. Supongamos dos situaciones observables X e Y tales que lo sucedido en X no implique nada en Y. En tal caso se podría construir un lenguaje L_X para expresar los hechos observados en X y exponer sus proposiciones como vacías de contenido. Se podría, además, precisar reglas semánticas para determinar las circunstancias bajo las cuales es verdadera una proposición de L_X, definiendo de este modo su significado. La pregunta es ¿tendríamos derecho a decir en tal caso que no existen cosas tales como los hechos referidos en L_X, pues no podemos saber nada de ellos realizando observaciones en Y? ¿Podríamos decir que la verdad de las proposiciones de L_X es sólo una consecuencia de tales convenciones sintácticas? Obviamente no. Según Gödel algo semejante sucede en relación a la matemática. Sus hechos nada implican en el ámbito de la experiencia, mas no por ello son inexistentes ni sus proposiciones se pueden decir vacías de contenido. Lo único que significa todo lo anterior es que los objetos de la matemática están más allá de los límites de la experiencia, pero no más allá de nuestro lenguaje.

Es ahora que Gödel manifiesta su punto vista. Sus tesis más importantes son las siguientes:

1. Las esferas de lo matemático y de la experiencia no se tocan entre sí. Los objetos matemáticos son trascendentes (están más allá de toda experiencia).
2. Las proposiciones matemáticas son verdaderas en virtud del significado de los términos que figuran en ellas, con independencia del mundo de las cosas.
3. El significado de los términos que figuran en las proposiciones matemáticas no es algo hecho por nosotros, ni consiste meramente en convenciones sintácticas.
4. Los conceptos matemáticos forman por sí mismos una realidad objetiva, la cual no podemos cambiar, sino sólo percibir o describir.
5. Las proposiciones matemáticas, aunque no digan nada acerca de la realidad espacio-temporal, pueden sin embargo poseer un contenido objetivo sólido, en la medida en que digan algo acerca de las relaciones entre los conceptos.
6. Hay entre los objetos matemáticos relaciones que no son tautológicas. Prueba de ello es el hecho de que para los términos primitivos se asumen axiomas que no son tautologías y que se siguen del significado de los términos primitivos considerados.

---

[48] Podemos atribuir la popularidad del nominalismo a su capacidad para hacernos creer que la matemática no describe realidad alguna, que la verdad de sus enunciados es enteramente explicable mediante reglas sintácticas y que sus proposiciones son vacías de contenido. Esto se ve reforzado por el hecho de que ciertos fragmentos de la matemática pueden sin duda reducirse a reglas sintácticas. Lo que es erróneo es inferir de ello que los hechos y objetos matemáticos no poseen ningún tipo de existencia objetiva.

7. Los axiomas de la teoría de conjuntos son analíticos mas no tautológicos. Estos axiomas son válidos en virtud del significado del término «conjunto» y no pueden reducirse a nada más simple, ya no digamos a tautologías. Algo semejante se puede decir de los axiomas para la teoría de números.[49]

Por «analítico» Gödel entiende en este contexto «verdadero en virtud de la naturaleza de los conceptos concurrentes» y por «tautológico», «vacío de contenido». Tal definición del término «analítico» es más tajante que la ofrecida por nosotros, pues con ella Gödel pretende mantenerse a distancia de la formulada por el positivismo: «verdadero en virtud de nuestras definiciones». Este concepto de analítico hace perfectamente posible que una proposición sea analítica e indecidible a la vez, «pues nuestro conocimiento del mundo de los conceptos puede ser tan limitado e incompleto como el que tenemos del mundo de las cosas.».[50] En relación a las paradojas de la teoría de conjuntos dice que éstas no refutan al platonismo: tan sólo indican que nuestra percepción del mundo de los conceptos es a veces un tanto incierta. «Nuestras percepciones visuales contradicen a veces nuestras percepciones táctiles, por ejemplo en el caso de una vara inmersa en agua, pero nadie en su sano juicio concluirá de ello que el mundo externo no existe.».[51] Pero ¿qué son estos objetos y estos conceptos de los que habla Gödel? En un artículo sobre la lógica matemática de Bertrand Russell, nos aclara este punto: «[...] pueden concebirse las clases y los conceptos como objetos reales, a saber, las clases como "pluralidades de cosas" o como estructuras que consisten de una pluralidad de cosas, y los conceptos como las propiedades y las relaciones de las cosas que existen independientemente de nuestras definiciones y construcciones.».[52] Tales objetos los percibimos, en ocasiones de manera inexacta, por medio de una intuición matemática que, como señala Rodríguez Consuegra, «nos da el significado y el contenido de los conceptos y a la vez nos muestra su existencia como habitantes del "tercer reino"».[53]

Quizá la de Gödel es la más lúcida exposición que se ha hecho en los tiempos modernos del platonismo en matemáticas. En la conferencia Gibbs[54] Gödel concluye su defensa del realismo conceptual con las siguientes palabras:

> Tengo la impresión de que tras suficiente clarificación de los conceptos en cuestión será posible conducir estas discusiones con rigor matemático, y de que el resultado

[49] Cf. Gödel, 1951, pp. 320-321.
[50] Gödel, 1951. Cita tomada de la traducción al español, p. 166.
[51] Gödel, *op. cit.*, p. 167.
[52] Gödel, 1944. Cita tomada de Benacerraf, 1964, pp. 456-457.
[53] Rodríguez Consuegra, 1994, p. 76.
[54] Gödel, 1951.

> será entonces que (bajo ciertas hipótesis que difícilmente pueden negarse —en particular la hipótesis de que existe absolutamente algo como el conocimiento matemático) la concepción platónica es la única sostenible. Con ello me refiero a la concepción de que la matemática describe una realidad no sensible, que existe independientemente tanto de los actos como de las disposiciones de la mente humana, y que es sólo percibida por ella, aunque probablemente de forma incompleta.[55]

Gödel cierra su alocución con una cita de Charles Hermite, uno de los máximos exponentes del platonismo en la matemática moderna. Reproducimos íntegra la cita, junto con los comentarios de Gödel, a manera de una síntesis de su pensamiento:

> Existe, si no me equivoco, todo un mundo formado por las verdades matemáticas, al cual no tenemos acceso sino con la inteligencia, como existe el mundo de las realidades físicas; uno y otro son independientes de nosotros y los dos de creación divina. Si estos mundos nos parecen distintos es a causa de la flaqueza de nuestro espíritu; pero, para una inteligencia más poderosa, son una y la misma cosa, y su síntesis se revela parcialmente en esa maravillosa correspondencia que se da entre las matemáticas abstractas por una parte, y la astronomía y todas las ramas de la física por la otra.[56]

A la cita sigue un comentario de Gödel: «Aquí, Hermite parece dar un giro hacia el realismo aristotélico. Sin embargo, esto lo hace sólo en sentido figurado, pues el platonismo permanece como la única concepción comprensible para la mente humana.».[57]

No deja de llamar la atención la vehemencia con que Hermite y Gödel defienden sus creencias. Como el canto de las sirenas, sus reflexiones ejercen sobre el espíritu una atracción extática, dirigiéndolo hacia la firme convicción de que la matemática es conocimiento de una realidad trascendente, independiente de nuestros actos y de nuestra existencia. Gödel, al igual que Hilbert, es un defensor del paraíso cantoriano, pero por otras razones. Para Hilbert se trata de una cuestión de principios: hay que defender la libertad que Cantor le confiere a la matemática, sin hacer valer en ello sus creencias.[58] Para Gödel, por el contrario, se trata de preservar el paraíso, no sólo la libertad de creer en él. Y fue justo desde tal perspectiva que emprendió la ofensiva contra el nominalismo y el positivismo lógico, cuyas tesis ponían en peligro la supervivencia misma de sus concepciones.[59]

---

[55] Gödel, *op. cit.*, p. 169.
[56] Gödel, 1995, p. 323. En el texto, la cita de Hermite aparece en francés.
[57] Gödel, 1995, p. 323.
[58] En este sentido, Hilbert considera que lo que requiere la matemática es una sólida base sobre la cual edificar sus teorías, sin necesidad de esclarecer si ésta se ocupa realmente de un mundo de verdades eternas.
[59] El platonismo de Gödel, aunque extravagante cuando lo miramos como una postura que explícitamente se afirma como verdadera, quizá lo único que expresa es el marco conceptual en que los matemáticos interpretan de manera espontánea su propia actividad, no cuando se les pregunta, sino cuando hacen matemáticas.

Ciertamente, la defensa que Gödel hace del realismo conceptual es muy atractiva y llena de sutilezas. Sin embargo, al reflexionar en ella no podemos dejar de suscribir en el terreno de la filosofía de la matemática las palabras con que Kant inicia el prólogo a la primera edición de la *Crítica de la razón pura*: «La razón humana tiene el destino singular, en uno de sus campos de conocimiento, de hallarse acosada por cuestiones que no puede rechazar por ser planteadas por la misma naturaleza de la razón, pero que tampoco puede responder por sobrepasar todas sus facultades».[60]

En el caso específico de la matemática, tales cuestiones son las relativas a la naturaleza de sus objetos, y a su posible existencia en un mundo trascendente, al cual estarían referidas las teorías matemáticas más significativas: la teoría de los números y la teoría de conjuntos. En este sentido, gran parte de la polémica de Gödel con el nominalismo, y por ende con Hilbert, la debemos entender como un esfuerzo por responder a estas cuestiones, sin la esperanza de alcanzar una solución definitiva: ninguna lectura de las investigaciones en torno a los fundamentos, por cuidadosa que sea, es capaz de contestar preguntas que atañen a la metafísica. A su vez, el silencio casi total de Hilbert en torno a estas cuestiones lo debemos interpretar como un "hacer suyas" las palabras de Kant. Esto implica, entre otras cosas, la necesidad de replantear la visión que se tiene de su postura filosófica, que no se inclina ni a favor ni en contra de la existencia objetiva de tal paraíso. Cuando afirma, por ejemplo, que para fundamentar la matemática no necesita de ninguna suposición extraña (véase al respecto la cita al final del apartado **3.4.4**) no lo hace con el propósito de negar la posible existencia de los objetos matemáticos: simplemente declara que *para fundamentar la matemática* (es decir, para darle una base segura) *la razón se basta a sí misma*, sin que por ello asuma la *vacuidad* de las matemáticas.[61]

Resulta paradójico que detrás de la cautela de Gödel para debatir sus ideas, se oculta un espíritu audaz en cuanto a la naturaleza de los objetos matemáticos, mientras que en el caso de Hilbert sucede lo contrario: detrás de su actitud polémica, se oculta un espíritu prudente y mesurado respecto a las mismas cuestiones.

[60] Kant, CRP A VII.

[61] Al respecto podemos decir que Hilbert inventó los formalismos, y el Círculo de Viena la vacuidad de la matemática.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Hilbert: un balance

Todo aquel que se interesa en la filosofía matemática debe confrontar sus ideas con las de Hilbert, ya para rebatirlo, ya para alcanzar un acuerdo. Para nosotros éste es el momento de hacer lo propio.

Es evidente que la concepción de la matemática en Hilbert es un tanto àmbigua, como si en ella participaran elementos irreconciliables. Por ejemplo, tenemos la idea de la libertad y autonomía de la matemática y, junto a ella, la tesis de que es mecanizable. La primera alcanza su máxima expresión en la defensa de la matemática transfinita de Cantor; la segunda, en el empeño que pone en resolver favorablemente el problema de la decisión. Como hemos visto, el modo de armonizar estas tendencias lo encuentra en la idea de que las técnicas de nuestro pensamiento se pueden caracterizar y codificar de manera exhaustiva en un cálculo simbólico.

Como el lector lo habrá notado, no tenemos especial apego al programa de Hilbert, aunque reconocemos la importancia que tuvo en el desarrollo de la lógica y la filosofía matemática. Sucede simplemente que a menudo grandes avances ocurren por las razones equivocadas. Algo muy distinto es para nosotros la concepción de la matemática que podemos advertir en la fase anterior al programa, de la que pretendemos rescatar algunos elementos.

Ciertamente, la aparición del programa dividió el trabajo de Hilbert en dos partes. La primera se centra en el estudio de los fundamentos de la geometría, el mejoramiento del método axiomático y su implantación en toda la matemática. La segunda, en cambio, se mueve en torno a los fundamentos de la matemática clásica, con el consiguiente desarrollo del punto de vista axiomático y los resultados que ya conocemos.

En nuestra opinión, el punto de vista que Hilbert defiende con anterioridad al programa y en algunos momentos de este último es en términos generales correcto, y merece ser vindicado.[1]

Tal como Hilbert la imagina, la matemática pura pertenece a lo que Kant llamaría el *reino de las ideas*, un dominio del pensamiento puro donde el entendimiento no se encuentra limitado por las condiciones de la sensibilidad o las exigencias de lo contingente. Desde su punto de vista las teorías matemáticas sólo pueden ser descritas como teorías axiomática abstractas. De ahí la importancia que otorga a la axiomática como única base para su reconstrucción. Hasta aquí

---

[1] Algunos de estos puntos de vista ya fueron examinados en la secciones 1.3, 1.5, al final de la sección 2.6.5, en la sección 2.6.6, en los comentarios de la sección 3.5, y, sobre todo, en la sección 3.4. En cuanto al radicalismo epistemológico de Hilbert, nos oponemos, como creemos que ha quedado claro por el tono del análisis y la exposición, a los puntos de vista examinados en las secciones 3.3.2, (comentario 2), 3.5 y 3.6, sobre todo en relación al peso que le otorga a tres factores: a la formalización, a la matemática finitista y a las pruebas de consistencia. A fin de evitar tediosas repeticiones, en lo que sigue supondremos que el lector ha leído con esmero dichas secciones.

coincidimos plenamente con él.[2] El problema es que, en el programa, Hilbert añade una exigencia con la que no estamos de acuerdo. Se trata de la pretensión de que para desarrollar legítimamente una teoría matemática debemos primero probar su consistencia.[3] Creemos que este reclamo daña la libertad y la autonomía de la matemática, pues equivale a someterla a la autoridad de una de sus partes: la metamatemática. Como hemos visto, Hilbert se aplicó a esta tarea con ahínco, sin siquiera preguntarse si la matemática requiere en realidad de un fundamento. Al respecto, queremos hacer algunas observaciones:

1) Desde nuestro punto de vista, la idea de que la matemática *necesita* de un fundamento es equívoca e infundada. Por el contrario, creemos que la matemática clásica, y en particular la teoría de conjuntos de Cantor, jamás enfrentó amenaza alguna que comprometiera sus nociones y principios más allá de algunos ajustes que, por cierto, llevó a cabo Zermelo. El problema es que Hilbert, enfrascado en su lucha con el intuicionismo, decidió dotarla de una garantía absoluta de consistencia, no porque esto formara parte de su concepción original o fuera una consecuencia inevitable de la misma, sino por capricho. De hecho, el problema a cuya solución se aplica es algo interno a su programa, no una exigencia universal de la matemática. Esto lo afirmamos a sabiendas de lo que trajo consigo tal empeño: grandes avances en la lógica formal y una mejor comprensión de la naturaleza de la matemática. Si bien los resultados fueron asombrosos, las razones subyacentes no dejan de ser, como ya lo hemos dicho, disparatadas.

2) Somos de la opinión que, una vez dispuestos a salvaguardar la matemática clásica mediante una prueba de consistencia, la formalización es los más adecuado. El problema es que Hilbert en su programa identifica la matemática con el resultado de la formalización —lo cual califica como *reduccionismo*— y pretende que esta disciplina se reduce, en su forma abstracta, a una colección de sistemas formales.

Esta pretensión nos parece injustificada. Por el contrario —como ya lo habríamos señalado en otro lugar—, creemos que la formalización es tan sólo una herramienta en el estudio de las propiedades lógicas de las teorías, no su fundamento, y que en modo alguno captura su esencia, pues éstas siempre están bordeadas por lo intuitivo.

---

[2] Algo en lo que también coincidimos con Hilbert es en considerar la noción de infinito como una idea de razón —una idealización que parte de lo finito— no porque creamos que esto se puede probar, sino porque nos permite hacer tanta matemática como los cantorianos sin incurrir en ningún compromiso ontológico. Es más, esta postura es independiente del radicalismo epistemológico que da sustento al programa, pues lo único que requiere es aceptar que la noción de infinito se puede integrar a la matemática sin suponer que es descriptiva de una realidad trascendente, lo cual no significa que debamos asumir, como lo hace Hilbert con el finitismo, que el conocimiento matemático se limita a intuiciones elementales. Más bien, se trata de una postura neutra ante el problema de la naturaleza de los entes matemáticos.

[3] Esto explica la insistencia de Hilbert en resolver el problema de los fundamentos, no mediante la discusión verbal, sino resolviendo problemas matemáticos precisos. Fue también lo que hizo de la suya la tendencia más matemática en espíritu entre las predominantes a principio del siglo veinte y aquella que refleja con mayor claridad la tendencia a la abstracción que caracterizaba la matemática en ese momento.

3) A diferencia de Hilbert, creemos que la mejor forma de defender la libertad y la autonomia de la matemática es, simple y sencillamente, ejerciéndolas, en vez de recurrir a la mediación de pruebas de consistencia que, además, no son practicables de manera elemental y poco añaden a su comprensión. Tampoco creemos que "algo ande mal" con la intuición y el sentido de la evidencia matemática, que han sido los principales actores en su construcción. Nos parece que Hilbert, empujado por una cautela extrema y una actitud cuasi-positivista, incurre en el error de tratar de limitar el dominio de lo "confiable" en la matemática al dominio de la intuición sensible, llegando al extremo de creer que la matemática en su totalidad se podría reducir a esta parte. De haber logrado su propósito, Hilbert habría tenido razón al decir que el recurso a evidencias e intuiciones otras que las sensibles sería un elemento no esencial en la construcción de sus más importantes teorías.[4] No obstante, esta tentativa fracasó y quedó como problema abierto aclarar el lugar que tales factores ocupan en la matemática.

Frente al recelo de Hilbert, creemos que lo correcto es reconocer la necesidad de ir más allá de la matemática finitista y que en ello radica la defensa de la libertad de la matemática. En este sentido, insistimos, los teoremas de Gödel no son sino un indicativo de que esta disciplina estará por siempre abierta a la incorporación de nuevas fuentes de evidencia, sin la esperanza de poderlas limitar a la esfera de los sensible. Al respecto, vemos en la matemática una actividad no muy distinta a otras actividades humanas, una "búsqueda en lo desconocido" que debemos asumir, en vez de hacer diligencias para encontrar un refugio que nos proteja de todo riesgo y decir, junto con el formalismo extremo, que la matemática sólo se ocupa de sistemas simbólicos formales.[5] A diferencia del "segundo Hilbert", no vemos ningún inconveniente en apoyar la matemática en otra clase de evidencias que la sensible, pues lo que en última instancia la hace tan firme y segura es, por una parte, su vínculo con la experiencia humana y, por la otra, la recóndita certeza de que los métodos utilizados son tan seguros como los de la matemática finitista.[6]

4) Ciertamente, la matemática moderna es abstracta y de aspecto distante. No obstante, esto no significa que se encuentre tan alejada de nuestra experiencia como parece. Como lo señala Shaughan Lavine, «[...] la teoría de conjuntos, tal como la desarrollaron Cantor y Zermelo, está

---

[4] A este punto habremos de volver en la siguiente sección, en donde nos ocuparemos de él en extenso.

[5] En épocas más recientes, Haskel B. Curry sostuvo la tesis de que la matemática es la ciencia de los métodos formales, lo cual indica que esta tendencia no ha perdido vigencia. Véase [Curry, 1976, p. 14].

[6] Esto, a pesar de que al examinar su estructura lógica no siempre podamos dar cuenta de su funcionamiento consistente. No deja de ser sorprendente esta disparidad entre lo que el entendimiento pude reconocer de inmediato como coherente, y lo que la razón puede justificar como tal. Por ejemplo, ningún matemático en sus épocas de estudiante se pregunta por la consistencia de los axiomas de *ZF*, sino que esta cuestión sólo surge en el estudio específico de la lógica matemática y la teoría de conjuntos. Hasta entonces, la validez de los axiomas se admite sin siquiera reparar en ello, pues enuncian propiedades de las que ninguna persona en su sano juicio podría dudar. En cambio, cuando esta cuestión se examina con detenimiento y se busca una demostración de este hecho, la razón se sitúa frente a un problema que en muchos casos no halla cómo resolver. Este problema, el de la dialéctica entre la demostración y la evidencia en matemáticas, no deja de ser uno de los puntos más delicados en la epistemología de la matemática, y una de las áreas menos exploradas.

vinculada con una clase de idealización proveniente de la experiencia humana muy parecida a aquella relacionada con los números o la geometría euclidiana.».[7] De hecho, gran parte de la matemática tiene su origen en tales idealizaciones y los grandes problemas que se han presentado en torno a ellas no tienen como causa su uso en la matemática propiamente dicha, sino su utilización en otros contextos. Tal es el caso, por ejemplo, del *principio de comprensión*, que sólo dio lugar a contradicciones cuando Russell lo aplicó a entes como "el conjunto de todos los conjuntos", algo que un matemático jamás consideraría en la práctica. No obstante, Hilbert, sin siquiera considerar tales circunstancias, se impuso la tarea de restituir sin reservas la confiabilidad que la matemática representa, como si en verdad hubiera habido una debacle en los fundamentos.[8]

En resumen: no miramos con malos ojos que la matemática se sostenga sobre otro tipo de evidencias que las proporcionadas por la intuición sensible, ni vemos en tales evidencias algo incontrolable e indigno de confianza. Ahí está, por ejemplo, la teoría cantoriana de conjuntos, que a más de cien años de su creación prosigue con la misma firmeza que la aritmética elemental. Simplemente se trata de reconocer que, aunque no podamos tener la certeza racional de que el discurso conjuntista es coherente, ni podamos "aprisionar" los contenidos de nuestra intuición en un cálculo simbólico completo, no por ello debemos desconfiar de esta forma de evidencia que englobamos bajo el nombre de "intuición intelectual" y que se encuentra en la base de muchas de nuestras consideraciones.

5) En cuanto al punto de vista axiomático, hemos de reconocer que esta tendencia ha perdido importancia en nuestros días. Esta disminución se debe en parte a que después de Gödel ha habido un retorno a la semántica y, en parte, a que para la mayoría de los matemáticos el método axiomático representa tan sólo una fase en el desarrollo de una teoría, llegando incluso a ser visto con desdén, sobre todo en aquellos dominios donde menos importancia tiene para su desarrollo (v. gr., la teoría de gráficas, o la econometría). En la matemática actual no se tienen las mismas pretensiones de fundamentación que en el primer tercio del siglo veinte, y el método axiomático ya no tiene el mismo valor. En nuestros días casi nadie se interesa en una matemática atrapada en un mundo de total abstracción, en un mundo en el que cualquier axiomática es tan buena como cualquier otra. Por el contrario, más allá de la corrección lógica, a las teorías matemáticas se les exige que sean significativas para considerarlas interesantes y, en general, no se les separa de la posibilidad de aplicarlas a otros dominios del conocimiento o a las matemáticas mismas.[9] En este sentido la matemática está indisolublemente ligada a la ciencia y a la tecnología, y estos vínculos

---

[7] Lavine, 1994, p. 2. Estos vínculos los hemos tratado de incorporar, por ejemplo, en las explicaciones que hemos dado de axioma de elección en la sección 2.6.5 (al hablar de espectadores y monedas) y son tema de obligado entre los matemáticos.

[8] Véase al respecto [Hilbert, 1925], especialmente en lo referente a las paradojas (p. 94 de la traducción al español).

[9] Claro está que hay honrosas excepciones a esta regla, como lo son la teoría pura de los números, y la teoría cantoriana de los conjuntos, que se ocupan en su mayor parte de problemas sin ninguna utilidad.

forman parte de su conocimiento y significado. Como quiera que sea, el lugar propio del método axiomático es la matemática pura, donde hay una renuncia implícita a toda forma de conocimiento empírico y las teorías se edifican a partir de nociones y proposiciones primitivas sin significado aparente.[10] En esto habría estado de acuerdo Hilbert al momento de escribir los *Grundlagen der Geometrie*.

6) Desde el punto de vista de Hilbert, la matemática se ocupa, en última instancia, de la estructura deductiva de sistemas conceptuales. El origen de sus teorías es diverso, pudiéndose tratar incluso de algún cuerpo de conocimientos impuestos por la experiencia, en cuyo caso procederá aislando un número muy pequeño de principios generales que servirán como axiomas, para entonces desarrollar las consecuencias de estos axiomas deliberadamente. En todo caso, Hilbert considera suficiente que su conceptos se hayan postulado de manera consistente para ser significativos. En este sentido, la consistencia es el único criterio de significancia en el reino de la matemática pura. Podemos decir entonces que para Hilbert los rasgos característicos de la matemática son los siguientes:

I. La matemática es en su forma final una teoría pura integrada por conceptos que se manejan de manera deductiva, los cuales pueden ser postulados o extraídos de la experiencia.

II. Entre la matemática pura y la experiencia concreta hay una fuerte interacción: ésta le sugiere nociones y problemas y aquella es el fundamento del conocimiento exacto de los fenómenos naturales.

III. La matemática es una disciplina autónoma, libre de escoger sus conceptos y axiomas, y de desarrollar sus propios procedimientos, y tiene como único límite la no contradicción.

IV. La matemática siempre ve hacia adelante, y se interesa más en resolver nuevos problemas y en crear nuevos métodos y conceptos, que en contemplar el conocimiento previamente alcanzado.

Para concluir, y en conformidad con los puntos de vista recién expuestos, podemos decir que la matemática es, a fin de cuentas, una cuestión de los matemáticos, que no deben responder en su trabajo a ninguna autoridad superior. Se trata de una actividad racional que a lo largo del tiempo ha producido su objeto de estudio, sus métodos, y sus propios criterios de corrección, y que en su forma moderna se concibe como la ciencia de las estructuras abstractas. Dichas estructuras pueden ser muy variadas, pero en su conjunto conforman un solo organismo, y todas se organizan con base en el método axiomático que es universal.

Ésta, nos parece, es la filosofía que la matemática merece y la forma de vindicar la concepción que Hilbert tiene de la matemática, al menos el Hilbert de los *Grundlagen der Geometrie*.

---

[10] Véase al respecto la sección **1.5.3**

5.2 La cuestión de los fundamentos

Nos enfrentamos ahora al problema de realizar una síntesis de nuestro trabajo y ofrecer algunas conclusiones. Veamos qué consecuencias podemos extraer para la filosofía matemática del malogrado intento de Hilbert y de los teoremas limitativos.

¿En qué consiste fundamentar la matemática? Obviamente nuestras creencias en torno a la naturaleza de los objetos matemáticos no son un fundamento, pues distan mucho de ser una justificación racional. Por ejemplo, Gödel, en vez de sustentar la corrección de la matemática clásica en el realismo conceptual, buscó evidencias en favor de éste, reconociendo de esa manera que sus creencias respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos no son una garantía del funcionamiento consistente de sus teorías.

En realidad, el problema de los fundamentos de la matemática existente—donde por «matemática existente» entendemos la totalidad de los métodos de demostración que actualmente se utilizan en ella—, lo podemos dividir en dos partes. En primer lugar, dichos métodos se deben reducir a un número mínimo de axiomas y reglas de inferencia, que se han de establecer con la mayor precisión posible; en segundo lugar, se debe buscar una justificación de estos axiomas en un sentido u otro, es decir, una prueba o explicación teórica del hecho de que constituyen un todo coherente.

A pesar de las dificultades derivadas del primer teorema de incompletud de Gödel, la primera parte de este problema fue resuelta en forma satisfactoria por Hilbert mediante la llamada "formalización" de las matemáticas.[1] Para ello, desarrolló un lenguaje totalmente preciso en el cual es posible expresar cualquier proposición matemática mediante fórmulas. Algunas de estas fórmulas se toman como axiomas, para luego asentar reglas de inferencia que permiten pasar de los axiomas a nuevas fórmulas, hasta deducir de esta manera la totalidad de las matemáticas conocidas. El rasgo más sobresaliente de estas reglas es que son enteramente sintácticas, pues sólo se refieren a la estructura externa de las fórmulas, no a su significado, de modo que pueden ser aplicadas por alguien que no sabe nada de matemáticas, o por una máquina.[2]

En cuanto a las pruebas de que los axiomas conducen a resultados no contradictorios, éstas sólo son significativas en dos casos:

---

[1] A riesgo de pesadez, recordemos que el primer teorema de Gödel nos hace ver que en todo formalismo con cierta capacidad expresiva existen enunciados que el sistema no puede decidir, lo cual parece ir en contra de la idea de que la formalización se ha logrado por completo. No obstante, no es éste el sentido con que manejamos la idea de la formalización en este pasaje: en él, sólo nos referimos al hecho de que todo lo que se puede demostrar en la teoría axiomática que se formaliza, se puede probar en el sistema formal. Al respecto, la existencia de enunciados indecidibles no contradice nuestra afirmación, pues éstos tampoco se pueden demostrar en la teoría que se formaliza, incluso cuando se sabe que el sistema es consistente. En tal caso, lo único que sabemos es que alguno de estos enunciados es verdadero, pero la demostración de su verdad sólo tiene lugar en la teoría donde se demuestra la consistencia, no en la teoría formalizada (es decir, su verdad también escapa a esta última).

[2] Esto no prueba que la matemática sea mecanizable, sino que algunos de sus fragmentos lo son.

A. Cuando una teoría *T* se reduce a otra teoría *S*, como cuando la geometría se reduce al análisis, el análisis a la teoría de conjuntos, etc., en cuyo caso no se tiene una solución absoluta del problema, sino relativa: si *S* es consistente, entonces *T* es consistente.

En tales ocasiones el problema de la consistencia de *T* se transfiere al de la consistencia de *S*.[3] Este camino tiene el inconveniente de fraccionar el problema de la no contradicción (de toda la matemática) en problemas parciales, sin la esperanza de lograr una respuesta definitiva. Su utilidad radica en que puede llevar la cuestión de la coherencia de una teoría al de otra que, en cierto sentido, es más simple o para la cual se cree posible una prueba como la referida en el siguiente inciso.

B. El caso más significativo de una prueba de consistencia es cuando ésta es directa y se lleva a cabo con medios tan seguros que nadie puede dudar de su validez. Proceder de esta manera es lo más cercano a demostrar la consistencia sin hacer suposiciones de ninguna especie.[4] Esto nos lleva al lado epistemológico del problema. Después de todo, lo que se busca con una prueba de no contradicción es asentar la matemática sobre una base segura. Al respecto, lo que el segundo teorema de Gödel establece es que ninguna prueba de consistencia logra este propósito en los casos de mayor interés —la aritmética, el análisis, la teoría de conjuntos, etc.—, de modo que esta parte del problema no se puede resolver en forma satisfactoria.[5] En efecto, una prueba es satisfactoria si:

a) reduce una teoría a una parte propia, o

b) reduce una teoría a algo que, aunque no es una parte propia, es más evidente, confiable, etc. de manera que la convicción se fortalece de esta manera.

Sin duda, (a) significa un paso hacia adelante y hace relativamente inocuas las suposiciones que se encuentran fuera del fragmento en que se da la prueba, mientras que (b) es un tanto ambiguo, en la medida en que cada quien tiene un distinto parecer acerca de lo que es evidente, confiable, etc., aunque en la práctica se ha llegado al acuerdo de que los métodos constructivos son mejores que los no constructivos.

Al respecto, el propósito de Hilbert no sólo era probar la consistencia de la matemática clásica con base en la matemática finitista, sino reducirla en su totalidad a esta última, que es, por así decirlo, la única a la que se le puede conferir una certeza absoluta. Esto nos lleva a examinar las

[3] V. gr., si el análisis es consistente, entonces la geometría euclidiana es consistente, etc.

[4] Hilbert sabía perfectamente que una prueba sin suposiciones era imposible, por lo que limitó los métodos de demostración a el máximo aceptable por todos, y se aferró a ellos como quien se sujeta a un hierro candente con tal de no caer en el vacío. La suposición de Hilbert es la siguiente: *la intuición del signo no nos puede engañar, la matemática finitista es absoluta*.

[5] De hecho, fue este descubrimiento de Gödel lo que llevó al programa de Hilbert a un punto muerto.

consecuencias de la caída del programa y lo que habría significado su plena realización. Tres son las cosas que podemos decir:

1) Si el programa de Hilbert hubiera triunfado, la reducción habría tenido sin lugar a dudas un enorme valor epistemológico. Las siguiente condiciones se habrían satisfecho plenamente:

1_a) La intuición del signo se habría sostenido como la única fuente de evidencia en la matemática, quedando todos los demás elementos relegados a un segundo plano, en calidad de nociones heurísticas útiles en la construcción de las teorías, pero prescindibles en la matemática propiamente dicha. En tal caso el objeto propio del conocimiento matemático se habría reducido a ciertas representaciones sensibles..

1_b) La matemática se habría reducido a una pequeña parte de sí misma y un gran número de suposiciones se habrían hecho superfluas, entre ellas todas las relativas al principio del tercero excluido y al infinito actual. Hilbert habría tenido razón al decir que el infinito no es sino "una forma de hablar", substituible en todo momento por consideraciones que sólo comprenden un número finito de objetos (de signos, en este caso).

1_c) Se habría justificado plenamente la tesis según la cual lo único que hacemos en la matemática es operar con símbolos y que, de hecho, eso es lo único que comunicamos a los demás (por ejemplo, al mostrar la demostración de un resultado). Atribuir a los signos un significado más allá de estas consideraciones quedaría como una decisión de cada quien, y sería ajena a las matemáticas. En cierto sentido, habría triunfado la concepción sintáctica de Carnap y el Circulo de Viena.

1_d) También habría triunfado el argumento según el cual (salvo por la matemática finitista que no representa ningún peligro) la noción de «verdad» no tiene cabida en la matemática, pues esta disciplina se reduciría en el fondo a la derivación formal de enunciados a partir de hipótesis arbitrarias. En particular, se podría haber dicho de los enunciados transfinitos que su "verdad" es poética o metafisica, e irrelevante para nuestra disciplina, puesto que de ellos lo único que tenemos son pruebas formales.[6]

2) Toda la matemática se habría reducido en realidad a una base concreta, en la que todos deberían de estar de acuerdo. Esta solución habría significado un incremento en el grado de evidencia, y una base segura para levantar todo el edificio sin necesidad de recurrir a hipótesis

---

[6] Es decir, que la verdad de los enunciados transfinitos se reduce a enunciados relativos a la derivabilidad formal del tipo «esta fórmula, que "enuncia" tal propiedad de los conjuntos infinitos, se deriva de los axiomas de la siguiente manera», etc. Lo cual, como hemos visto, equivaldría en el terreno de la semántica a la noción de «ser una fórmula verdadera», ahora innecesaria en virtud de la consistencia y la completud sintáctica del formalismo.

extrañas e inciertas, como, por ejemplo, la suposición de que existen tales cosas como los conjuntos infinitos.

3) Ante la pregunta «¿de qué trata la matemática?», Hilbert habría podido responder: *de los hechos aritméticos y combinatorios de la matemática finitista.* Aun cuando esta respuesta habría provocado reacciones adversas por parte del intuicionismo, tal reducción habría sido satisfactoria y aceptada por la mayoría.

Claro está que todas estas aseveraciones dependían de la completa formalización de la matemática y de una prueba absoluta de su consistencia, nada de lo cual es posible. Por el contrario, de los teoremas limitativos se sigue que la hipotética respuesta de Hilbert es falsa e insostenible, incluso en el caso de la aritmética elemental. Como Gödel demuestra, no es posible inscribir toda la matemática en un formalismo adecuado, pues cada vez que se construye una teoría formal con tal intención, junto con ella aparece un problema matemático —de hecho, un problema aritmético— de corte elemental que el sistema no puede decidir. Asimismo, tampoco es posible dar cuenta de todas las propiedades de los sistemas formales cuando los métodos de demostración se restringen a los métodos finitistas. Esto señala la necesidad de recurrir a otros métodos que los representados en la misma teoría para atacar el problema de sus fundamentos, es decir, la necesidad de extenderla de manera inmediata para tal fin.

En cuanto a la intuición pura del signo, hemos de observar que ésta es insuficiente. La tentativa de Hilbert, a saber, *fundamentar la matemática en lo que se percibe o es dable en la percepción* fue una quimera y quedó como un problema abierto saber si hay un principio epistemológico alterno sobre el que la matemática se pueda fundamentar. Nosotros, en particular, somos de la opinión de que no lo hay, al menos en el horizonte de la matemática actual.

En cuanto a nuestro análisis e interpretación de los resultados precedentes, las conclusiones a las que podemos llegar son las siguientes:

I. La matemática no es susceptible de una racionalización completa, y la cuestión de sus fundamentos permanecerá como un problema abierto en el futuro previsible, sin la posibilidad de alcanzar una respuesta final.

II. Tampoco debemos esperar una respuesta final a la pregunta por el "ser" de las matemáticas. Al respecto, la única respuesta precisa que se ha podido alcanzar es negativa: la matemática no es una sintaxis del lenguaje o un conjunto de convenciones sintácticas carentes de contenido.

III. La matemática incluye un juego formal con signos carentes de significado, pero no es sólo eso. En su desarrollo interviene un *sentido de la evidencia* que se halla en la base de todas sus

consideraciones. Este "sentido de la evidencia" no es del todo racional y desborda el ámbito de la sensibilidad.

Estos puntos tienen como base nuestra interpretación de los teoremas limitativos, principalmente los de Gödel y Tarski, y sus implicaciones serán consideradas en extenso en la siguiente sección.

5.3 Conclusiones generales

Nos adentramos ahora en el terreno de la especulación filosófica a fin de inquirir en el significado último de los teoremas limitativos. Este cambio de dominio se refleja no sólo en el tono más dubitativo del texto, sino en la mayor vaguedad de nuestras afirmaciones.

Al reflexionar en torno a los teoremas de Gödel, la primera y más inmediata conclusión a la que podemos llegar es la siguiente: en la matemática, al igual que en la ciencias de la naturaleza —donde la mecánica cuántica sugiere que la realidad física es indeterminada—, también hay una indeterminación respecto a los objetos considerados.[1] A diferencia de los problemas escolares, donde siempre se tiene la información necesaria para resolverlos, en cualquier teoría matemática de cierto nivel invariablemente se encuentran cuestiones que no se pueden decidir con base en los axiomas.[2] Tal incompletud de las teorías axiomáticas se debe no a una omisión circunstancial, sino a nuestra incapacidad para formular un cuadro axiomático adecuado (es decir, a una limitación esencial de nuestra capacidad creativa).

Por ejemplo, en el caso de la aritmética podemos encontrar en todo momento relaciones numéricas de carácter general que se ofrecen al entendimiento como accidentales, sin causa aparente, pudiéndose incluso tratar de problemas absolutamente irresolubles.[3]

De alguna manera, los teoremas limitativos apuntan hacia una estructura abstracta respecto a la cual el entendimiento no logra formular de manera sistemática todas las suposiciones correctas acerca de ella (en el sentido de la regla mencionada en la sección **4.4.2**). Podemos decir entonces que así como la percepción sensible se enfrenta a ciertos límites que se pueden ampliar (con el uso, por ejemplo, del telescopio), pero no eliminar, también nuestro entendimiento los tiene, y los recursos mediante los cuales los extendemos (por ejemplo, la adición de nuevos métodos de prueba o nuevos axiomas) tienen, a lo más, un efecto parcial. En este sentido, nuestro poder de discriminación conceptual no está menos limitado que nuestra sensibilidad.[4]

---

[1] De hecho, el teorema de Lowenheim-Skolem, que apenas si hemos tocado en este trabajo, establece que cuando pretendemos hablar de algún dominio infinito en particular, inadvertidamente hablamos de otros dominios similares. Véase al respecto el apéndice **18**, §2.

[2] Claro está que muchos de estos problemas se podrán decidir en una teoría más extensa, pero ¿será acaso que en la nueva teoría estaremos hablando de los mismos objetos? ¿de qué "realidad" se trata en todo caso? A fin de cuentas, para extender una teoría mediante nuevos axiomas es necesario recurrir a formas de evidencia que respalden la elección, y que pueden depender de factores externos a la matemática misma, es decir, estar determinadas por un grupo social o por la historia. En tal caso, la posibilidad de probar una proposición A o su negación $\neg A$ depende de tal elección, lo cual equivale a un acto de creación. Por el contrario, si lo que se asume es que en la matemática hay un objeto de estudio específico (platonismo), la cuestión es más precisa: en todo momento, nuestra relación con aquello que investigamos no nos permite responder ciertas preguntas.

[3] Un ejemplo podría ser el posible hecho de que todo número par mayor que dos sea la suma de dos números primos (conjetura de Goldbach), que no se ha podido probar ni refutar. Véase al respecto la sección 4.3.1.

[4] Estos argumentos adquieren su mayor fuerza en relación al platonismo, es decir, en relación a la idea de que la estructura de los números naturales existe independientemente del conocimiento que tengamos de ella, concepción implícita a la matemática clásica. Si nos plantamos en el nominalismo, según el cual las únicas realidades que podemos reconocer son aquellas

Esta indeterminación de las teorías matemáticas es similar a la de nuestra imagen de la naturaleza, en cuanto a que hay cuestiones significativas respecto a ella que no podemos responder. Es también lo que hace tan atractiva la matemática y una de las causas del retorno a la semántica que ha experimentado la matemática moderna.[5] Esto nos lleva al problema de la verdad matemática, cuestión que se entiende mejor cuando se le examina en el contexto de la aritmética, aunque mucho de lo que diremos es aplicable a otras teorías matemáticas.

Ciertamente, lo que la teoría aritmética procura es *aprehender* la "verdad", restringida al ámbito de los números. Al respecto, y con base en los teoremas limitativos, sabemos que ésta no es recursiva (es decir, no es decidible), ni enumerable (es decir, no es constructiva), y ni siquiera se le puede definir en el lenguaje de la aritmética misma.[6] Más allá del finitismo, la "verdad aritmética" es un *ideal* hacia el cual porfiamos, un arquetipo al que ansiamos llegar, una noción que se construye históricamente mediante la adición de nuevos principios que se incorporan con base en inéditas e impredecibles evidencias.[7] Es más, no hay, ni puede haber, una explicación completa de por qué aceptamos como verdaderas algunas proposiciones aritméticas, pues la "verdad aritmética" descansa en última instancia en un sentido de la evidencia que no podemos racionalizar del todo. Como hemos visto, Hilbert intentó plasmar este ideal en el concepto de derivación formal. Los teoremas limitativos nos muestran que esto no fue más que una ilusión, otra aproximación imperfecta a dicho ideal. De alguna manera, la "verdad" es algo que colocamos en el horizonte matemático para dar sentido a la búsqueda: he ahí el mundo de los números, encontremos la verdad que hay en él.

Sin lugar a dudas, esta noción de "verdad aritmética" es algo muy cercano a lo que Kant denomina *ideales de la razón pura*. Al respecto, dice que un ideal es la encarnación cabal, pero no

implicadas por nuestro simbolismo, y según el cuál nosotros inventamos la matemática de la misma manera en que inventamos el juego del ajedrez, la única diferencia es que la aritmética es un juego que debemos jugar si lo que nos interesa es "conocer" la naturaleza, y en ello se tienen las mismas limitaciones que en el caso anterior.

[5] Por ejemplo, frente a la imposibilidad de un sistema axiomático completo para la aritmética elemental, la descripción y operación de sus objetos debe ser directa, al igual que el procedimiento lógico que interviene en la construcción de la teoría, que es esencialmente creativo, pues en todo momento hay que recurrir a la incorporación de nuevos métodos de demostración. Un ejemplo de ello es el método diagonal de Cantor, que ya hemos tenido la ocasión de comentar en la sección 2.6.2.

[6] Estas cuestiones ya fueron analizadas con cierto detenimiento en la sección 4.2.1. Recordemos, por ejemplo, cómo es que a consecuencia del teorema de Tarski ningún sistema axiomático es capaz de establecer su propia semántica. Esto significa, entre otras cosas, que cualquier intento por establecer desde la matemática misma sus propias condiciones de verdad es inadecuado, pues las metas a las cuales aspiramos no se pueden precisar desde su interior. Para mayores detalles, véase el apéndice 18, §6.

[7] Si esta noción se pudiera definir en la aritmética, sería una propiedad matemática. En cuanto a la noción de *verdad recursiva*, se trata tan sólo de una aproximación a este ideal, y vastos dominios de la matemática quedan fuera de su alcance. Como quiera que sea, esta última noción se encuentra en el punto de partida del conocimiento en general, pues con ella damos forma a la idea de *conocimiento exacto*, sobre todo a través del concepto de *función recursiva*. En este trabajo sólo hemos tocado tangencialmente esta noción y en ocasiones sin mencionarla *ex profeso* como, por ejemplo, en las secciones 3.4.3 y 4.2.2. De hecho, todo el trabajo de aritmetización de Gödel se apoya en ella, al igual que la totalidad de los teoremas limitativos, aunque en la formulación de algunos de ellos no figura de manera explícita. Se trata también del concepto central en la teoría de la calculabilidad, que ocupa un lugar de privilegio en las ciencias de la computación, y el sostén de toda caracterización de la noción de *verdad* en matemáticas.

real, de la perfección en un campo determinado, algo que sólo existe en el pensamiento, pero que corresponde a una idea que representa.[8] Tales ideales no poseen fuerza creadora, pero sí *fuerza práctica*, y sirven como principios reguladores, como un modelo de perfección indispensable a la razón, que se sirve de ellos para apreciar y medir el grado de insuficiencia de los que es incompleto.[9] En este sentido, los teoremas limitativos nos acercan al punto de vista de Kant, al mostrarnos cómo eso que llamamos "verdad matemática" es algo imposible de abarcar mediante un conjunto determinado de reglas. Frente a esta imposibilidad nos vemos obligados a construir dicho paradigma de manera histórica, a trascender el ámbito de la aritmética a causa de nuestra inhabilidad para fijarla de manera absoluta. Es precisamente la prosecución de este ideal lo que eleva la matemática por encima de su uso práctico, lo que la alimenta y sostiene más allá de su utilidad. Baste recordar la manera en que algunos matemáticos se han expresado en relación a los deleites estéticos de la matemática. Por ejemplo, en un trabajo publicado en 1899, Poincaré escribió lo siguiente:

> La matemática tiene una triple finalidad. Debe procurar un instrumento para el estudio de la naturaleza. Además, tiene un propósito filosófico y, me atrevo a decirlo, una finalidad estética. Debe incitar al filósofo a explorar las nociones de número, espacio y tiempo; y, sobre todo, los adeptos encuentran en la matemática deleites análogos a aquellos que proporcionan la pintura o la música. Ellos admiran la delicada armonía de los números y las formas; se asombran cuando un nuevo descubrimiento les revela una perspectiva inesperada ¿Acaso el placer que experimentan no tiene un carácter estético, aunque los sentidos no participen de él? Es verdad que sólo unos cuantos privilegiados son llamados a disfrutarla plenamente, pero ¿no sucede lo mismo con las más nobles artes? Por tanto, no titubeo al decir que la matemática merece ser cultivada por sí misma, y que las teorías que no admiten aplicación a la física merecen ser estudiadas igual que las otras.[10]

Tales desplantes se han entendido por lo general como rarezas, como epifenómenos asociados a actitudes extravagantes ante esta dsiciplina. Creemos que esta apreciación es falsa y que tales visiones estéticas forman parte su espíritu. La matemática adquiere de esta manera un sentido interior en el que reafirma su libertad.

---

[8] Kant se sirve del siguiente ejemplo: «La virtud, y con ella la sabiduría humana en toda su pureza, constituyen ideas. Él sabio (el del estoico) es un ideal, esto es, un hombre que sólo existe en el pensamiento, pero que corresponde plenamente a la idea de sabiduría. Así como la idea ofrece la *regla*, así sirve el ideal, en este caso, como *arquetipo* de la completa determinación de la copia. No poseemos otra guía de nuestras acciones que el comportamiento de ese hombre divino que llevamos en nosotros, con el que nos comparamos, a la luz del cual nos juzgamos y en virtud del cual nos hacemos mejores, aunque nunca podamos llegar a ser como él.». [Kant, CRP, B597].

[9] Estas últimas palabras son una cita casi literal de Kant, que no hemos querido reproducir al pie de la letra. Véase Kant, CRP, B598.

[10] Cita tomada de Moritz, 1958, p. 181. Al igual que Poincaré, muchos otros matemáticos han expresado opiniones semejantes sobre la similitud entre la matemática y el arte, entre los cuales se hallan figuras como Sylvester, Gauss y Hardy.

He ahí, por ejemplo, a Gödel, que juzga también la verdad de la hipótesis del continuo con base en criterios estéticos, como lo son su fertilidad o la plausibilidad de sus consecuencias, lo cual lo lleva a sospechar que es falsa. ¿No es acaso éste un paso en la prosecución de un ideal? Lo que Gödel hace equivale a decir: "rechacemos la hipótesis del continuo, pues su aceptación nos aleja de nuestro ideal". Esta clase de argumentos y puntos de vista acercan a la matemática más al arte que a la ciencia, pues parten de criterios ajenos a esta última disciplina, como si establecieran una ecuación: lo verdadero es lo bello y lo bello, verdadero.[11]

Al abismarnos en estas cuestiones no podemos sustraernos a la idea de que la matemática es una actividad tan cercana al arte como a la ciencia. Esta concepción no es novedosa, pero sí muy impopular entre los matemáticos hoy en diá. No obstante, al mirar hacia el pasado podemos encontrar a grandes personalidades que la han adoptado, como G. H. Hardy (1877-1947), uno de los matemáticos británicos más importantes de principios del siglo veinte, cuando afirma

> Un matemático, al igual que un pintor o un poeta, es un constructor de diseños. Si los suyos son más perdurables que los de los otros, es debido a que están hechos de *ideas*. [...]
> Los diseños del matemático, como los del pintor o del poeta, deben ser *hermosos*; las ideas, al igual que los colores y las palabras, deben amoldarse entre sí de manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas. Y aquí debo enfrentar una falsa idea aún muy extendida [...], lo que Whitehead ha denominado la "superstición literaria" de que el amor por una apreciación estética de las matemáticas es una "obsesión confinada a unos cuantos excéntricos en cada generación".[12]

En épocas más recientes, y con el apoyo de los teoremas limitativos, Hermann Weyl escribió lo que consideramos una síntesis de nuestras reflexiones: «"Hacer matemáticas" puede que sea una actividad creadora del hombre, como la música, cuyos productos en forma y en sustancia están condicionados por la historia y por ello impiden una racionalización objetiva completa.».[13]

Quizá éste sea el mayor beneficio que los teoremas limitativos trajeron consigo: el haber puesto en evidencia las limitaciones de los poderes matemáticos del entendimiento humano. La incompletud esencial de las más importantes teorías axiomáticas, y la irresolubilidad del problema de la decisión, son un recordatorio de que en el dominio de la demostración, al igual que en el

---

[11] En este caso nos referimos a un placer estético que se dirige no tanto a los sentidos como al entendimiento, que lo hace exclamar, maravillado, "lo veo y no lo creo", tal como lo hiciera Cantor.

[12] Hardy, 1941. Tomado de Newman, 1956, p. 2027. Otro pasaje de gran interés es el siguiente, éste debido a E. Lampe, un contemporáneo de Cantor: «Sin importar cuán separada parezca estar la razón calculante del matemático del intrépido vuelo de la fantasía del artista, debemos recordar que estas expresiones no son sino imágenes momentáneas, retenidas arbitrariamente entre las actividades de ambos. En la proyección de nuevas teorías, el matemático necesita una fantasía tan creativa y audaz como la del artista productivo, y en los detalles de la composición el artista también debe calcular desapasionadamente los medios necesarios para consumar con éxito las partes. Común a ambos es la creación, la generación de formas a partir de la mente.» E. Lampe, 1893. Cita tomada de Moritz, 1958, p. 185.

[13] Weyl, 1949. Cita tomada de la traducción al español, p. 251.

reino de los procesos, el entendimiento deberá por siempre trazar nuevos e inesperados caminos para llegar a la solución de los problemas que él mismo se plantea, pues este cometido requiere de algo más que un simple cálculo: necesita de nuestra intuición, creatividad, imaginación, capacidad para descubrir analogías y hasta un poco de experiencia. Son éstos los principales elementos al momento de trazar el camino. Y si bien una vez resuelto un problema su solución se debe exponer con estricto apego al canon de la lógica, y el resultado deducirse de los principios admitidos, esto sólo sucede *después* del acto de creación, tras superar la incertidumbre sobre si el problema se podrá o no resolver con los medios seleccionados. En este sentido, los teoremas limitativos fueron un freno a la tendencia formalista de principios del siglo veinte, y ayudaron a la matemática a volver a la semántica, al significado y a la verdad. Desde entonces, el pensamiento axiomático se ha visto forzado a permanecer como una fase del pensamiento matemático, no como su esencia.

Epílogo. Para la filosofía matemática el programa de Hilbert significó un periodo de renovación. Al fin entrelazada con la matemática, sus problemas se pudieron plantear de manera precisa y ofrecer de esta manera una base concreta para su discusión. Sin lugar a dudas, el mayor beneficio provino de los teoremas de Gödel, que nos legaron un penetrante análisis de la naturaleza de la matemática, de sus limitaciones y de las complejidades que se ocultan detrás de ella. Ahora sabemos, con la exactitud de un teorema matemático, de los límites del método axiomático, y que la matemática no es el edificio sólido y completo que Hilbert alguna vez imaginó. También sabemos que vastos dominios de esta disciplina no son mecanizables, y que estarán por siempre abiertos a nuevos métodos y procedimientos de demostración. Así, tras los hechos limitativos, muchos de los cuales pueblan estas páginas, podemos decir, como lo hiciera Emil Post hace ya algún tiempo, que *el pensamiento matemático es, y debe ser, esencialmente creativo*.

Ésta es, quizá, la principal enseñanza que podemos derivar del empeño de Hilbert y la espectacular respuesta de Gödel, dos visionarios que con su obra nos obligaron a cambiar nuestra manera de pensar la matemática.

Referencias bibliográficas

Referencias Bibliográficas

Abbagnano, Nicola,

1961 *Dizionario di filosofia*, Turín, Unione Tipografico-Editrice, 1961. [tr. al español de Alfredo N. Galleti, *Diccionario de filosofía*, México-Buenos Aires, Fondo de Cultura Económica, 1963].

Ackermann, Wilhelm,

1924 «Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit». *Mathematische Annalen*, vol. 93, pp. 1-36.

Ackermann, Wilhelm, y Hilbert, David,

Véase, **Hilbert, David, y Ackermann, Wilhelm.**

American Mathematical Society (AMS)

1976 *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 28, American Mathematical Society, 1976.

Anderson, A. R., (editor).

1964 *Minds and Machines*. Englewood Sliff, Nueva Jersey, Prentice Hall, Inc. [tr. al español de Karl Wendl, *Mentes y máquinas*, México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1970].

Aristóteles,

Obras, (tr. al español de Francisco de la P. Samaranch), Madrid, Aguilar, 1997.

Ayer, Alfred J., (editor)

1965 *El Positivismo Lógico*, México, Fondo de Cultura Económica.

Ayer, Alfred J.,

1971 *Lenguaje, verdad y lógica*, Barcelona, Ediciones Martínez Roca, S. A.

Bachelard, Gastón,

1973 *El nuevo espíritu científico*, México, Siglo XXI Editores, 1973.

Badiou, Alain et al, (editores)

1969 *Cahiers pour l'Analyse 10: La formalisation*, Paris, Editions du Seuil, 1969.

Baire, R., Borel, E., Hadamard, J., Lebesgue, H.,

1905 «Cinq lettres sur la thêorie des ensembles», *Bull. Soc. Math. de France*, t. XXXIII, 1905, pp. 261-273.

Bartle, Robert G.,

1964 *The Elements of Real Analysis*, Nueva York, John Wiley & Sons, Inc., 1964.

Bell, Eric Temple,

1937 *Men of Mathematics*, Nueva York, Simon and Schuster, 1937.

Benacerraff, Paul, y Putnam, Hilary, (editores)

1964 *Philosophy of Mathematics, Seleccted Readings*, Cambridge, Massachusetts, Cambridge University Press, 2ª edición, 1991.

1965 «What numbers could not be», *Philosophical Review*, 74, pp. 47-73. [Reimpreso en Benacerraf, 1964, pp. 272-294.]

Bernays, Paul,

1935 «Sur le platonisme dans les mathématiques», *L'Einseignement mathématique*, vol. 34, pp. 52-69. [tr. al inglés de Paul Benacerraf, «On Platonism in mathematics», en Benacerraf, 1964, pp. 258-271.]

Bochenski, Inocenty M.,

1955 *Formale Logik*, Friburgo-Munich, K. Alber, 1955.

Bocher, Maxime,

1904 «Fundamental Conceptions and Methods in Mathematics», Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 9, pp. 120-134.

Boole, George,

1854 *The Laws of Thought*, Nueva York, Dover Publications Inc., 1958.

Borel, Emile,

1928 *Leçons sur la théorie des functions*, París, Gauthier-Villars, 1928.

Bourbaki, Nicolas,

1969 *Elements d'histoire des mathématiques*, París, Herman, Editerus des Sciences et des Arts, 1969. [tr. al español de Jesús Hernández: *Elementos de historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza Editorial, 1972.]

Boyer, Charles B.,

1968 *A History of Mathematics*, Nueva York, Wiley and Sons, 1968.

Burali_Forti, Cesare,

1897 «Una questione sui numeri transfinit», *Redinconti del Circolo matematico di Palermo 11*, pp. 154-164. [tr. al inglés en Heijenoort, 1967, pp. 104-111.]

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan,

1907 *On the Foundations of Mathematics*, Tesis, Amsterdam (1907). Hay una versión en inglés en Heyting, 1975, pp. 11-101.

1908 «De onbetrouwbaarheid der logische principes», Tijdschrift voor wijsbergeerte, vol. 2, pp. 152-158. [tr. al inglés de Arend Heyting, «The Unreliability of the Logical Principles», en [Heyting, 1975, pp. 107-111]]

1912 «Intuitionism and Formalism», *Bulletin of the American Mathematical Society 20*, 1913. Reimpreso en [Benacerraf y Putnam, 1964], pp. 77-89.

1923 «Über die Bedeutung des Stzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematic, insbesondere in der Funktionentheorie», *Journal für die reine und angewandte Mathematik 154*, pp. 1-7. [tr. al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg, «On the significance of the principle of the excluded middle in mathematics, especially in function theory», en [Heijenoort, 1967] pp. 334-345].

1927 «Intuitionistische Bertrachtungen über den Formalismus», *Koninklije Akademie van wetenschappen te Amsterdam*, Proceedings of the section of sciences 31, 1928, pp. 374-379. [tr. al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg, «Intuiutionistic reflections on formalism», en [Heijenoort, 1967] pp. 490-492]

1948 «Conciousness, philosophy and mathematics», *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy* (Amsterdam, Agosto de 11-18 de 1948), Amsterdam, North Holland, 1949. Reimpreso en Benacerraf y Putnam, 1964, pp. 90-96.

Cantor, Georg,

1883 «Grundlagen einer allgemmeinen Mannigfaltigkeitslehere», en Cantor 1932, pp. 165-208.

1883a «Fondaments d'une théorie genérale des ensembles», *Acta Mathematica 2*, pp. 381-408. Reproducido en Badiou et al, 1969.

1895 «Beirtrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehere (I)», *Mathematische Annalen*, Vol. xlvi,1895, pp. 481-512. Traducido al inglés en Cantor, 1955.

1897 «Beirtrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehere (II)», *Mathematische Annalen*, Vol. xlix, 1897, pp. 207-246. Traducido al inglés en Cantor, 1955.

(1932) *Gesammelte Abhandlugen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Ed. por Ernst Zermelo, Berlin, J. Springer, 1932, pp. 486.

(1955) *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Nueva York, Dover Publications, Inc, 1955.

Carnap, Rudolf,

1935 «Philosophy and Logical Sintax», Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., Londres, 1935. [tr. al español de Cesar N. Molina: *Filosofía y sintaxis lógica*, México, Centro de estudios Filosóficos, UNAM, 1963].

1936 «Testability and Meaning», *Philosophy of Science 3*, pp. 419-471.

1937 *The logical syntax of languaje*, Nueva York, Harcourt Brace, 1937.

1963 *Filosofía y sintaxis lógica*, México, UNAM, Centro de Estudios Filosóficos, cuaderno 12.

Cavaillès, Jean,

1938 *Méthode axiomatique et formalisme*, París, Hermann, 1981. [tr. al español de Santiago Ramírez Castañeda: *Método axiomático y formalismo*, México, Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias, UNAM, 1993.]

Curry, Haskell,

1951 *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North-Holland, 1951.

1976 *Foundations of Mathematical Logic*, Nueva York, Dover, 1976.

Church, Alonso,

1936 «An unsolvable problem of elementary numbert theory», *The American Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 345-363. Reproducido en Davis, 1964, pp. 88-107.

1936a «A note to the Entscheidungsproblem», *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, no. 1 y no. 3. Reproducido en Davis, 1964, pp. 108-114.

Davis, Martin (editor),

1964 *Basic Papers On Undecidable Propositions, Unsolvable Problems And Computable Functions*, Nueva York, Raven Press, 1964.

Dauben, Joseph Warren,

1979 *Georg Cantor*, Cambridege, Massachusetts, Harvard University Press, 1979.

Dawson, Jr., John,

1997 *Logical Dilemas. The life and Work of Kurt Gödel*, Wellesley, Massachusetts, A. K. Peters, ed., 1997.

Dedekind, Richard,

1888 *Essays on the Theory of Numbers*, Nueva York, Dover Publications, 1963.

DeLong, Howard,

1971 *A Profile of Mathematical Logic*, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1971.

Dieudonné, Jean,

1948 «David Hilbert (1862-1943)», en *Le Lionais, 1948*. pp. 312-319 de la traducción la español.

1992 *Mathematics, the Music of Reason*, Berlín, Springer-Verlag, 1992.

Dowling, William F.,

1989 «There are no safe virus tests», *Anerican Mathematical Monthly*, Vol. 96, pp. 835-836.

Dummett, Michael,

1977 *Elements of Intuitionism*, Londres, Oxford University Press, 1977.

Dyson, Freeman,

1964 «Mathematics in the Physical Sciences», *Scientific American*, Vol. 211, N° 3, 1964, p. 129.

Einstein, Albert,

1949 «Reply to criticisms», en Schilpp, 1949.

Eisenhart, Luther Pfahler,

1966 *Coordinate Geometry*, Nueva York, Dover Publications, 1966.

Enderton, Herbert B.,

1972 *A Mathematical Introduction to Logic*, Nueva York, Academic Press, 1972. [tr. al español de Pablo Rosenblueth, *Una introducción matemática a la lógica*, México, UNAM, 1987.]

Euclides,

(1992) *Elementos de Geometría I-II*, (versión española de Juan David García Bacca), México, UNAM, 1992.

Eves, Howard,

1976 *An Introduction to the History of Mathematics*, 4ª ed., Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

Ewald, William, B., (editor)

1996 *from Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 vols., Oxford, Clarendon Press, 1996.

Feferman, Solomon,

1988 «Kurt Gödel: Conviction and Caution», en Shanker, 1988, pp. 96, 114.

Fraenkel, Abraham A.,

1976 *Teoría de los conjuntos y lógica*, México, Colección *Cuadernos*, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, 1976.

Franchella, Miriam,

1995 «L. E. J. Brouwer: Toward Intuitionistic Logic», *HISTORIA MATHEMATICA* 22, 1995, pp. 304-322.

Frege, Gottlob,

1893 *Grudgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet*, Jena, H. Pohle, Vol. 1, 1993.

1980 *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Chicago, University of Chicago Press, 1980 (Cartas traducidas del alemán al inglés por Hans Kaal, en una edición al cuidado de Gottfried Gabriel *et al.*).

Galileo Galilei,

(1996) *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Madrid, Editorial Planeta - De Agostini S. A., 1996.

Gentzen, Gerhard,

1969 *The Collected Papers of Gerhard Gentzen* (editado por M. E. Szabo), Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

Gerhardt, C. I., (editor)

1875-90 *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, 7 vols. Berlín, 1875-90.

Gödel, Kurt,

1929 *Über die Vollständigkeit del Logickkalküls*, Tesis doctoral mecanografiada, Universidad de Viena. [Reproducida en edición bilingüe (alemán-inglés) en Gödel, 1986, pp. 60-101.]

1930 «Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionkalküls», *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, pp. 349-360. [tr. al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg, en Heijenoort, 1967, pp. 582-591. Reproducido en edición bilingüe (alemán-inglés) en Gödel, 1986, pp. 102-123.]

1931 «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematicas und verwandter Systeme I», *Monatchefte für mathematik und Physik 38*, pp. 173-198. [tr. al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg en Heijenoort, 1967, pp. 583-617, y en Gödel, 1981, pp. 145-195].

1931? «[Über unentscheidbare Sätze (1931?)]» Manuscrito encontrado entre los ensayos inéditos de Gödel, quizá de 1931 y presumiblemente dedicado a la difusión de sus teoremas. Publicado en Gödel, 1981, pp. 30-35 junto con una traducción al inglés de Stephen Cole Kleene, bajo el título «On undecidable sentences, (1931?)».

1933 «Zur Intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie», *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (ed. por K. Menger), pp. 34-38. [tr. al español de Jesús Mosterín, «Sobre la teoría de números y la aritmética intuicionista», en Gödel, 1981, pp. 120-126].

1944 «Russell's mathematical logic», en Benacerraf, 1964, pp. 447-469.

1947 «What is Cantor's continuun problem?», en Benacerraf, 1964, pp. 470-485.

1951 «Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications», en Gödel, 1995, pp. 304-323. [tr. al español de Francisco Rodríguez consuegra, «Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas», en Rodríguez Consuegra, 1994, pp. 149-169.]

1953/9 «Is mathematics syntax of lànguaje?» versiones III y V, en Gödel, 1995, pp. 334-362.

1953/4 «¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?», versión II, en Rodríguez Consuegra, 1994, pp. 191-207.

1955/6 «¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?», versión VI, en Rodríguez Consuegra, 1994, pp. 231-236.

1958 «Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes», *Dialectica*, núm. 12, pp. 280-287. [tr. al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg y Jean van Heijenoort, «On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint», en Godel, 1990, pp. 241-251.]

1981 *Obras Completas*, (ed. por Jesús Mosterín), Madrid, Alianza Editorial, 1981.

1986 *Collected Works, vol. I: publications 1929-1936*, (ed. por Solomon Feferman, John W. Dawson, Jr., Gregory H. Moore, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay y Jean van Heijenoort), Nueva York y Oxford, Oxford University Press.

1990 *Collected Works, vol. II: publications 1938-1947*, (ed. por Solomon Feferman, John W. Dawson, Jr., Gregory H. Moore, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay y Jean van Heijenoort), Nueva York y Oxford, Oxford University Press.

1995 *Collected Works, vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, (ed. por Solomon Feferman, John W. Dawson, Jr., Warren Goldfarb, Charles Parsons y Robert M. Solovay), Nueva York y Oxford, Oxford University Press.

Goldfarb, Warren (editor),

1971 *Jacques Herbrand: Logical Writings*, Dordrecht, Reidel Publishing Company, 1971.

Grattan-Guinness, Ivor,

1979 «In Memoriam Kurt Gödel: His 1931 correspondence with Zermelo on His Incompletability Theorem», *Historia Mathematica* 6, pp. 294-304.

Hardy, Godfrey Harold,

1941 *A Mathematician's Apology*, Cambridge, Cambridge University Press, 1941. [Una versión reducida se halla en Newman, 1956, pp. 2027-2038]

Heath, Thomas L.,

1956 *Euclid's Elements*, 3 vols, Nueva York, Dover Publications Inc., 1956.

Heijenoort, Jean van, (editor)

1967 *From Frege to Gödel*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1967.

1968 *Jacques Herbrand: Écrits Logiques*, Paris, Presses Universitaries de France, 1968. [tr. al inglés de Burton Dreben, van Heijenoort y Warren Goldfarb en Goldfarb, 1971.]

Herbrand, Jacques,

1930 *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Tesis ante la Universidad de París. [tr. al inglés de Warren Goldfarb, en Goldfarb, 1971, pp. 44-202].

1930a «Les bases de la logique hilbertiene», *Revue de metaphysique et de morale* 37, 1930, pp. 243-255. [tr. al inglés de Warren Goldfarb, en Goldfarb, 1971, pp. 203-214].

1930b Nota sin firmar sobre Herbrand 1930, escrita por el mismo Herbrand, *Annales de l'Universite de paris 6*, 1931, pp. 186-189 [tr. al inglés de Warren Goldfarb, en Goldfarb, 1971, pp. 272-276].

Heyting, Arend,

1931 «Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik», *Erkenntnis*, vol. 2, pp. 105-115. [tr. al inglés de Paul Benacerraf y Hilary Putnam, «The intuitionist foundation of mathematics», en [Benacerraf y Putnam, 1964] pp. 52-61].

1955 *Les fondements des mathématiques. Intuitionisme, Théorie de la demostration*, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

1956 *Intuitionism, An introduction*, Amsterdam, North-Holland, 1956.

1956a «La conception intuitionniste de la logique», *Études philosophiques, N° 11*, pp. 226-233.

1975 *L. E. J. Brouwer Collected Works 1; Philosophy and Foundations of Mathematics*, Amsterdam, North Holland, 1975.

Hilbert, David,

1899 *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig y Berlín, Teubner, 1899. [tr. al inglés de E. J. Townsend con algunas adiciones hechas por Hilbert a la edición francesa de 1899: *Foundations of Geometry*, La Salle, Illinois, Open Court Publishing Co., 1962.]

1900 «Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker Kongress zu Paris, 1900», *Archiv der Mathematik und Physik*, 3ª serie, 1, 1901, pp. 44-63 y 213-237. [tr. inglesa de Mary Winston Newson, «Mathematical problems», en AMS 1976, pp. 1-34.]

1900a «Über den Zahlbegriff», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8*, 1900, pp. 180-194. [tr. al español de Luis Felipe Segura, «Acerca del concepto de número», en Hilbert, 1993, pp. 17-22.]

1904 «Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik», *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heildelberg vom 8, bis 13, August 1904*, Leipzig, 1905, pp. 174-185. [tr. inglesa de Beverly Woodward: «Foundations of logic and Arithmetic», en van Heijenoort 1967, pp. 130-138.]

1917 «Axiomatisches Denken», en Hilbert, 1935, vol. 3, pp. 146-156. [tr. al español de Luis Felipe Segura, «El pensamiento axiomático», en Hilbert, 1993, pp. 23-35.]

1922 «Neubegründung der Mathematik», en Hilbert 1935, vol. 3, pp.157-177. [tr. al español de Luis Felipe Segura, «La nueva fundamentación de las matemáticas», en Hilbert, 1993, pp. 37-62.]

1922a «Die logischen Grundlagen der Mathematik», en Hilbert, 1935, vol. 3, pp. 178-191. [tr. al español de Luis Felipe Segura, «Los fundamentos lógicos de las matemáticas», en Hilbert, 1993, pp. 63-81.]

1925 «über das Unendliche», *Mathematische Annalen* 95 (1926) pp. 161-190. [tr. al español de Luis Felipe Segura, «Acerca del infinito», en Hilbert, 1993, pp. 83-121.]

1927 «Die Grundlagen der mathematik», *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburggischen Universität*, Vol. 6, 1928, pp. 65-85. [tr. al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg y Dagfinn Føllesdal: «The foundations of mathematics», en Heijenoort, 1967, pp. 464-479.]

1928 «Probleme der Grundlegung der Mathematik», *Mathematische Annalen* 102, 1929, pp. 1-9. [tr. al francés de Jean Largeaut, «Problèmes de foundation des mathèmatiques», en Largeaut, 1992, pp. 175-185.]

1930 «Naturerkennen und Logik», *Die Naturwissenschaften 18*, pp. 953-963. [tr. al inglés de William B. Ewald, «Logic and the Knowledge of Nature», en Ewald, 1996, pp. 1157-1165.]

1930a «Die Grundelgung der elementaren Zahlenlehre», *Mathematische Annalen* 104 (1931). [tr. al español de Luis Felipe Segura, «La fundamentación de la teoría elemental de los números», en Hilbert, 1993, pp. 123-135.]

1935 *Gesammelte Abhandlungen*, Berlín, Springer Verlag, (3 vols.), 1935.

(1993) *Fundamentos de las matemáticas* (recopilación), Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias, UNAM, 1993.

Hilbert, David, y Ackermann, Wilhelm,

1928 *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlín, Springer, 1928. [tr. al inglés de Lewis M. Hammond et al. con base en la (ampliada) segunda edición alemana de 1938, *Principles of Mathematical Logic*, Nueva York, Chelsea Publishing Company, 1950.]

Hilbert, David, y Bernays, Paul,

1934 *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Berlín, Springer, 1934.

1939 *Grundlagen der Mathematik*, vol. 2, Berlín, Springer, 1939.

Kant, Immanuel,

1783 *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* [tr. al español de Julián Besteiro, *Prolegómenos*, Buenos Aires, Aguilar, 1975.]

1786 *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. [tr. al español de Samuel Nemirovsky, *Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza*, México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1993].

1787 *Kritik der reinen Vernunft* 2ª ed. [tr. al español de Pedro Rivas, *Crítica de la razón pura*, Madrid, Alfaguara, 1997.]

Kleene, Stephen C.,

1952 *Introduction to Metamathematics*, Princeton, Nueva Jersey, D. Van Nostrand Company, Inc., 1952.

1967 *Mathematical Logic*, Nueva York, John Wiley & Sons, Inc. 1967.

Kline, Morris,

1994 *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Editorial, AU 715 (Vol. I), AU 724 (Vol. II) y AU 729 (Vol. III), 1994.

Körner, Stephan,

1960 *The Philosophy of Mathematics*, Londres, Hutchinson University Library. 1960. [tr. al español de Carlos Gerhard, *Introducción a la filosofía de la matemática*, México, Siglo XXI editores, 1967.]

Kreisel, Georg,

1958 «Hilbert's programme», en Benacerraf, 1964, pp. 207-238.

Ladrière, Jean,

1957 *Limitations internes des formalismes*, París y Lovaina, 1957. [tr. al español de José Blasco, *Limitaciones internas de los formalismos*, Madrid, Editorial Tecnos, 1969]

Largeault, Jean, (editor)

1992 *Intuitionisme, et theorie de la demonstration*, París, Librairie Philosophique J. Vrin, 1992.

Lavine, Shaughan,

1998 *Understanding the Infinite*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1998.

Lebesgue, Henri,

1905 «Sur les fonctions représentables analytiquement», *Journal de Mathématiques*, 1905, pp. 139-219.

Le Lionais, Francois, (editor)

1948 *Les grands courants de la pensée mathématique*, París, Cahiers du Sud, 1948. [Tr. al español de Néstor Miguez, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Buenos Aires, EUDEBA, 1962].

Leibniz, Gottfried Wilhelm,

Véase Gerhardt, C. I., (editor)

Mendelson, Elliot,

1979 *Introduction to Mathematical Logic*, 2ª ed., Nueva York, D. Van Nostrand Company, 1979.

Moritz, Robert Edouard,

1958 *On Mathematics*, Nueva York, Dover Publications Inc., 1958.

National Research Council's (editor)

1969 *The Mathematical Sciences*, Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1969.

Newman, James R., (editor)

1956 *The World of Mathematics* (4 vols), Nueva York, Simon and Schuster, 1956.

Pajares, Carlos,

1973 *La nueva física, Biblioteca Salvat de grande temas, vol. 100,* México, Salvat Editores S. A., 1973.

Penrose, Roger,

1989 *The emperor's New Mind*, Oxford, Oxford University Press, 1989.

Post, Emil Leon,

1941 «Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions», en [Davis, 1964], pp. 340-417.

1944 «Recursively enumerable sets of positive integers and therir decision problems», en [Davis, 1964], pp. 305-337.

Péter, Rózsa,

1961 *Playing With Infinity*, Nueva York, Dover, 1961.

Poincaré, Jules Henri,

1902 *La science et l'hypothèse*, París, Flamarion, 1902. [tr. al español de algunos capítulos de Elí de Gortari, *Filosofía de la Ciencia*, México, UNAM, Colección Nuestros Clásicos, N° 32, 1964.]

1908 *Science et methode*, París, Flamarion, 1908. [tr. al español de M. García Miranda y L. Alonso, *Ciencia y método*, Madrid, Espasa-Calpe, Colección Austral N° 409, 3ª ed. 1963.]

Ramírez, Santiago,

1989 *El desconocido número 5*, Tesis de doctorado en filosofía, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, 1989.

1990 «Al reencuentro del cosmos. Filosofía de caos», *Mathesis*, vol. 6, N° 4, noviembre 1990, pp. 419-431.

1995 «A return to Viena», *Mexican Studies in the History and Philosophy of Science, vol. 172*, Dordrecht, Holanda, Kluwer Academic Press, 1995, pp. 265-273.

Ramnoux, Clemence,

1972 «Los presocráticos», en *Historia de la filosofía, vol.2*, México, Siglo Veintiuno Editores, 1972, pp. 1-21.

Reichenbach, Hans,

1951 *The rise of Scientific Philosophy*, Berkeley, California, University of California Press, 1951. [tr. al español de Horacio Flores Sánchez, *La filosofía científica*, México, Fondo de Cultura Económica, 2ª ed., 1967.]

Reid, Constance,

1970 *Hilbert*, Nueva York, Springer-Verlag, 1972 (2ª ed.).

Riemann, Bernhard,

1968 *Oeubres Mathématiques*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1968. (Traducción francesa de L. Laugel).

Rodríguez Consuegra, Francisco,

1994 *Kurt Gödel: Ensayos inéditos*, Madrid, Biblioteca Mondadori, 1994.

Rosser, Barkley,

1936 «Extensions of some theorems of Gödel and Church», *Journal of Symbolic Logic*, vol. 10, pp. 87-91.

Russell, Bertrand,

1903 *The principles of Mathematics*, Londres, Cambridge University Press, 2ª ed., 1937. [tr. al español de Juan Carlos Grimberg, *Los principios de las matemáticas*, Madrid, Espasa Calpe S. A., 1967.]

1906 «Les paradoxes de la logique», *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 14, pp. 627-650.

1919 *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, George Allen and Unwin Ltd, décima edición, 1960.

Russell, Bertrand y Whitehead, Alfred,

1910 *Principia Mathematica* (*To *56*), Londres, Cambridge at the University Press, 4ª ed. 1967.

Saccheri, Girolamo,

1773 *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, Milán, 1733. [tr. parcial al inglés de G. B. Halsted, Chicago, Open Court, 1920.]

Schilpp, Paul, (editor)

1949 *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, Nueva York, Tudor Publisihing Company, 1949.

1963 *The Philosophy of Rudolf Carnap*, La Salle, Open Court, 1963.

Sestier, Andrés, (editor)

1981 *Documentos históricos de la matemática*, México, edición privada, 1981.

Shanker, S. G., (editor)

1988 *Gödel's Theorem in focus*, Nueva York, Routledge, 2ª ed. 1990.

Skolem, Toralf,

1920 «Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical proposiitions: A simplified proof of a theorema by L. Löwenheim and generalizations of theorems», en Heijenoort, 1967, pp. 252-263.

1922 «Some remarks on axiomatized set theory», en Heijenoort, 1967, pp. 290-301

1923 «The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent varaibles reanging over infinite domains», en Heijenoort, 1967, pp. 302-333.

Torres, Carlos,

1978 *La filosofía formalista de la matemática: el punto de vista de Hilbert*. Tesis de licenciatura (matemáticas), Facultad de Ciencias, UNAM, 1978.

1989 *Los teoremas de Gödel*. Tesis de maestría (matemáticas), Facultad de Ciencias, UNAM, 1989.

1989a «La filosofía y el programa de Hilbert», *Mathesis*, vol. 5, N° 1, febrero, 1989, pp. 33-56.

1995 «Kurt Gödel: Ensayos inéditos», *Mathesis*, vol. 11, 1995, pp. 251-282.

1995a «The Philosophy and the Program of Hilbert», *Mexican Studies in the History and Philosophy of Science, vol. 172*, Dordrecht, Holanda, Kluwer Academic Press, 1995, pp. 151-172.

1999 «Los sistemas formales», *Perspectivas en las teorias de sistemas*, México, Siglo XXI, 1999, pp. 25-44.

1999a «El segundo problema de Hilbert sobre la compatibilidad de los axiomas de la aritmética», *Miscelánea Matemática*, N° 29, diciembre 1999, pp. 73-97.

1999b «Hilbert, Kant y el fundamento de las matemáticas», *Theoria, Revista del Colegio de Filosofía*, Facultad de Filosofia y Letras, UNAM, N° 8-9, diciembre 1999, pp. 111-129.

2000 «La lógica matemática en el siglo XX», *Miscelánea Matemática*, N° 31, septiembre 2000, pp. 61-105.

Turing, Alan M.,

1937 «Computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem», *Proceedings of the London Mathematical Society (2)*, no. 42, pp. 230-265. Reproducido en Davis, 1964, pp. 116-153.

1950 «Computing Machinery and Intelligence», *Mind*, vol. LIX, núm. 236, 1950. [tr. al español de Karl Wendl, «Máquinas computadoras e inteligencia», en Anderson, 1964, pp. 11-45]

van Heijenoort, Jean,

1967 *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, Massachusetts, 1967, Harvar University Press, 1967.

von Neumann, John,

1927 «Zur Hilbertschen Beweistheorie», *Math. Zeith.*, vol. 26, pp. 1-46.

1931 «Die formalistische Grundlegung der Mathematik», *Erkenninis* t. II, p. 116-121. [tr. al inglés de Erna Putnam y Gerald J. Massey, «The formalist foundations of mathematics», en Benacerraf, 1964, p. 61-65.]

Wang, Hao,

1974 *From Mathematics to Philosophy*, Londres, Routledge and Kegan Paul, 1974.

1987 *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridege, Massachusetts, MIT Press, 1987. [tr. al español de Pilar Castillo Criado, *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Madrid, Alianza Editorial, 1991.]

1993 *Popular Lectures on Mathematical Logic*, Nueva York, Dover Publications, Inc., 1993.

1996 *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*, Cambridege, Massachusetts, MIT Press, 1996.

Weyl, Hermann,

1944 «David Hilbert, 1862-1943», *Obituary notices of fellows of the Royal Society*, 4 (1942-1944), Londres.

1944a «David Hilbert and His Mathematical Work», *Bulletin of the American Mathematical Society* 50, pp. 612-654. [Una versión reducida se reproduce en Reid, 1970, pp. 245-283].

1946 «Mathematics and logic. A brief survey serving as a preface to a review of "The Philosophy of Bertrand Russell"», *American Mathematical Monthly*, vol. 53, pp. 2-13.

1949 *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, Princeton University Press, 1949, 4ª reimpresión, 1959. [tr. al español de Carlos Ímaz, *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1965.]

Wittgenstein, Ludwig,

1978 *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Cambridge, Massachusetts: 1978.

1979 *Tractatus Logico-Philosophicus*, Madrid, Alianza Universidad, vol. 50.

Zermelo, Ernst,

1904 «Proof that every set can be well-ordered», Carta a David Hilbert traducida al inglés y reproducida en Heijenooth, 1967, pp. 139-141.

1908 «Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung», *Mathematische Annalen 65*, pp. 107-128, 1908. [tr. al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg, «A new proof of the possibility of a well-ordering», en van Heijenoort 1967, pp. 183-198.]

1908a «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I», *Mathematische Annalen 65*, pp. 261-281, 1908. [tr. al inglés de Stefan Bauer-Mengelberg, «Investigations in the foundations of set theory I», en van Heijenoort 1967, pp. 200-215.]

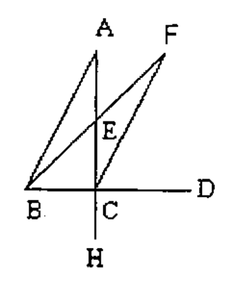
Apéndice 1

Un breve comentario sobre la demostración en Euclides

Hemos señalado que la demostración euclidiana no está libre de defectos desde el punto de vista de la lógica. En este sentido, se trata más bien de *argumentos matemáticos* más o menos precisos cuyo papel es establecer que la proposición considerada se sigue de los postulados. De hecho, en algunos argumentos Euclides recurre a supuestos tácitos que no se infieren lógicamente de los postulados, como en el siguiente ejemplo:

Proposición I.16 *En un triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.*

Sea el triángulo el ABC y prolónguese uno de sus lados, el BC, hasta el punto D.



Digo que el ángulo externo ACD es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos CBA y BAC.

Demostración

Córtese AC en dos partes iguales en E [prop. I.10] y prolónguese BE [post. 1] hasta el punto F [post. 2] de modo que BE resulte igual a EF [prop. I.3].

Trácese FC [post. 1] y prolónguese AC hasta el punto H [post. 2]

Como AE es igual a EC y EB igual a EF, los lados AE y EB son respectivamente iguales a los lados CE y EF;

y el ángulo AEB es igual al ángulo FEC, por ser opuestos por el vértice [prop. I.15];

por lo tanto, la base AB será igual a la base FC y el triángulo ABE es igual al triángulo FEC; y los demás ángulos de uno serán respectivamente iguales a los correspondientes del otro, a aquellos que subtiendan lados iguales [prop. I.4].

En consecuencia, el ángulo BAE es igual al ángulo ECF.

Pero el ángulo ECD es mayor que el ECF [n.c. 5]

y el ángulo ACD será mayor también que el BAE.

De la misma manera, si BC se divide en dos partes iguales, se puede demostrar que el ángulo BCG, es decir, el ángulo ACD [prop. I.15], es mayor que el ángulo ABC.

Por tanto, si en un triángulo se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos, que es lo que se quería demostrar. ■

En este caso el supuesto tácito es que la línea recta tiene una extensión infinita, lo que obliga a que el punto F sea exterior al triángulo ABC y el ángulo ECD contenga al ángulo ECF. Si la recta BE volviera sobre sí misma, BF podría ser tan grande como para que F coincidiese con B o se encontrara sobre el segmento BE. Si tal fuese el caso, la demostración se vendría abajo. Para que

la demostración fuera universal habría que demostrar que las líneas rectas tienen una extensión infinita, mas esto no es posible sobre la sola base de los primeros cuatro postulados de Euclides, en los que supuestamente se apoya la demostración. La conclusión sólo se alcanza bajo el supuesto tácito de que el punto F es externo al triángulo ABC, lo que es muy fácil de aceptar al considerar figuras como la que acompaña a la demostración.

Apéndice 2
Una demostración por *consequentia mirabilis*

Los libros VII, VIII y IX de los *Elementos* tratan esencialmente con las propiedades de los números enteros de un modo geométrico, en el sentido de que los números están representados por segmentos rectilíneos y no por signos numéricos. En particular, la proposición IX.12 citada en el texto trata de progresiones geométricas y propiedades de divisibilidad. En el texto griego se enuncia así:

Proposición 12 (libro IX) *Si a partir de la unidad se forma una proporción continua con tantos números como se quiera, entonces, sin importar cuántos número primos midan al último de ellos, éstos también medirán al que sigue de la unidad.*

En el lenguaje de la matemática moderna esta proposición se expresa como sigue:

Si $1, b_1, b_2 \ldots, b_n$ *forman una progresión geométrica, y* p *es un número primo que divide a* b_n *entonces* p *también divide a* b_1.

Para demostrar esta proposición por *consequentia mirabilis* debemos asumir como hipótesis que la proposición es falsa y concluir, por demostración directa, que es verdadera.

Sea r la razón de progresión geométrica y supongamos que p es un número primo que no divide a b_1 pero sí a b_n.

Sea $b_n = m \cdot p$.
Como $b_n = r \cdot b_{n-1}$, y $b_1 = r$, $b_1 \cdot b_{n-1} = m \cdot p$.

En consecuencia, p divide al producto $b_1 \cdot b_{n-1}$ y por consiguiente también divide a alguno de sus factores. No obstante, por hipótesis sabemos que p no divide a b, de donde se sigue que p divide a b_{n-1}.

Por fuerza de repetir el mismo procedimiento nos vemos llevados a la conclusión de que p divide a b_{n-2}, y por consiguiente a b_{n-3} y así sucesivamente, hasta llegar finalmente a la conclusión de que p divide a b_1, exactamente lo opuesto de lo que se supuso al inicio de la demostración.[1] ■

Es interesante comparar el argumento que acabamos de presentar con el intento de Saccheri por demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de su negación.

[1] Es decir, la suposición de que p no divide a b_1 lleva a la conclusión de que p sí divide a b_1. El resto de la demostración es muy simple: como $\neg A \rightarrow A$ y $A \rightarrow A$, por tercero excluido se infiere que A (demostración por casos).

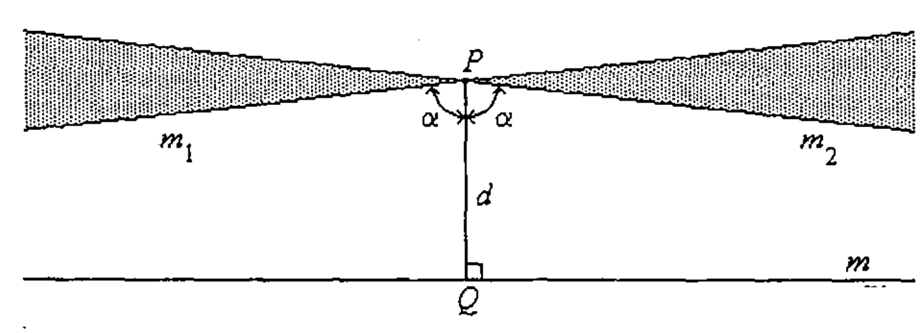
Apéndice 3

Un comentario acerca de la geometría de Lobachevsky y dos modelos para las geometrías no euclidianas

Comentario. El axioma que sustituye al quinto postulado de Euclides y caracteriza a la geometría de Lobachevsky es el siguiente: *Dada una línea recta m y un punto P que no incide con ella, por P hay más de una línea recta (contenida en el plano por P y m) que no interseca a m.*

Con base en este axioma y los demás postulados de la geometría euclidiana se demuestra que siempre existen dos rectas m_1 y m_2 por P tales que:

1) no intersecan a m,
2) forman ángulos iguales con la perpendicular a m por P, y
3) tienen la propiedad de que todas las rectas por P comprendidas en el ángulo entre m_1 y m_2 que contiene a la perpendicular, intersecan a m, mientras que las demás rectas por P no lo hacen (esto último corresponde a la región sombreada en la siguiente figura que, aunque euclidiana, representa el concepto. Esto último es inevitable, pues nuestra percepción de la "hoja de papel" es euclidiana y debemos apoyarnos en ella a fin de ilustrar el concepto).



Las dos rectas m_1 y m_2 separan a las rectas por P en dos clases: las que intersecan a m y las que no lo hacen. Si bien con apego a la definición dada por Euclides todas las rectas de esta segunda clase son paralelas a m, Lobachevsky reserva este nombre para las líneas límite, es decir, para m_1 y m_2.[1] El ángulo α que cada una de éstas rectas forma con la perpendicular PQ se llama *ángulo de paralelismo*, y ocupa un lugar muy importante en esta geometría. Éste siempre es agudo, y Lobachevsky demuestra que su valor (es decir, el valor de α) depende de la longitud d del segmento PQ, y escribe $\alpha = \pi(d)$.

Lobachevsky también demuestra que si la unidad de longitud se elige como la distancia correspondiente al ángulo $\alpha = 2\,Arctan(1/e)$, donde e es la base de los logaritmos naturales (e = 2.7182818284 ..., un número trascendente), entonces

[1] Las otras líneas por P que no intersecan a m se llaman *hiperparalelas*.

$$\pi(d) = 2\,Arc\tan(e^{-d}) \quad \text{y} \quad d = \ln\cot\left(\frac{\pi(d)}{2}\right)$$

Nótese que el ángulo de paralelismo $\pi(d)$ se incrementa desde 0 hasta $\pi/2$ cuando d decrece desde $\propto$ hasta 0, de modo que a "pequeña escala", la geometría de Lobachevsky se aproxima a la euclidiana. Asimismo, como con cada ángulo $\pi(d)$ está asociada una distancia d, podemos ver que las distancias, al igual que los ángulos, son absolutos en la geometría de Lobachevsky.

Esto último quizá se aclare al comparar la geometría de Lobachevsky con la de Euclides. En ambas geometrías los ángulos se pueden medir en términos de una unidad en cierto sentido "natural" (el ángulo recto, por ejemplo, o la vuelta completa). Sin embargo, en la geometría euclidiana no sucede lo mismo con las longitudes: no hay una unidad que en forma natural sirva para este propósito, sino que hay que definirla arbitrariamente y conservarla en algún lugar (en algo así como una "Oficina de Medidas" para no olvidarse de ella). La habría si asociada con el ángulo recto hubiese una longitud privilegiada. Esto es lo que sucede con la geometría de Lobachevsky, en la que la unidad de longitud se puede precisar con base en la unidad angular. Por ejemplo, se le puede definir como la distancia d tal que $\pi(d)$ es medio ángulo recto. Podemos decir entonces que en la geometría de Lobachevsky se tiene una unidad absoluta para medir longitudes, donde "absoluta" significa "un estándar implícito en los axiomas".

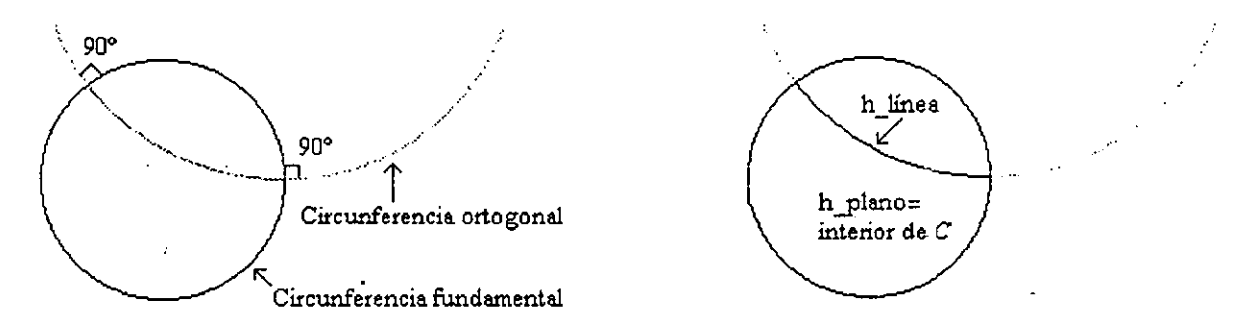
Si lo anterior no es suficientemente claro, considérese lo siguiente. En la geometría euclidiana no existe ninguna relación entre los ángulos y el área de un triángulo, pues la suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual a dos rectos y esto es independiente de la medida de los lados del triángulo. En cambio, en la geometría de Lobachevsky, si bien la suma de los ángulos de un triángulo siempre es menor que dos rectos, ésta depende de la longitud de los lados, aproximándose a cero cuando el triángulo se agranda y a dos rectos cuando el área tiende a cero (lo que de nuevo nos muestra que, "en lo pequeño", la geometría de Lobachevsky se aproxima a la euclidiana).

Un modelo para la geometría de Lobachevsky en el plano euclidiano. Henri Poincaré (1854-1912) fue uno de los primeros matemáticos en idear un modelo para la geometría de Lobachevsky dentro de la geometría euclidiana plana. Este modelo nos muestra que la primera es tan consistente como la segunda.

En general, la base para construir un modelo euclidiano de una geometría G consiste en interpretar las nociones primitivas de G (*punto*, *línea*, etc.) como referidas a ciertos objetos euclidianos de modo que bajo la interpretación los postulados de G se convierten en enunciados (euclidianos) verdaderos. En este caso queremos que todos los axiomas de la geometría euclidiana se satisfagan, menos el de Playfair, pues no deseamos que la paralela sea única.

Al definir el modelo debemos hacer frente al problema de dar a las nociones primitivas de la geometría —*punto, línea recta, estar entre*, etc.— dos sentidos distintos: uno para designar elementos y relaciones del plano euclidiano, y otro para designar elementos y relaciones de la geometría de Lobachevsky. Para evitar confusiones, cuando los utilicemos en el sentido no euclidiano antepondremos la letra "h" a la palabra en cuestión. Por ejemplo, escribiremos "h_punto" para referirnos a un punto del espacio de Lobachevsky.

El h_plano mismo (es decir, el universo no euclidiano) consiste en este caso de todos los puntos al interior de una circunferencia fija *C* del plano euclidiano. A *C* la llamaremos *circunferencia fundamental*. Los h_puntos serán los puntos al interior de la circunferencia fundamental. Consideremos ahora las circunferencias *X* que cortan ortogonalmente a *C*, es decir, que se intersecan con *C* de modo que las tangentes a *C* y a *X* en el punto de intersección forman un ángulo recto. Las h_líneas (es decir, la "líneas" de la geometría hiperbólica) serán los arcos de tales circunferencias que se hallan al interior de *C*.



La incidencia de h_puntos y h_líneas será la incidencia usual de puntos y arcos de circunferencia al interior de *C*. Los puntos sobre la circunferencia serán considerados puntos al infinito (es decir, puntos ideales) que no pertenecen al modelo. El ángulo entre dos h_líneas es el ángulo entre los arcos de circunferencia que las representan. En este modelo es fácil visualizar algunas propiedades que parecen imposibles de representar en el marco euclidiano. La figura 1 muestra dos paralelas m_1 y m_2,los arcos *PR* y *PS*, a una h_línea *m* por un punto *P* fuera de ella. Nótese que los extremos *R* y *S* de los arcos no pertenecen al modelo (no son h_puntos), pues se encuentran sobre la circunferencia fundamental, no al interior de la misma.

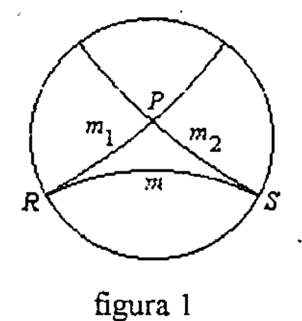


figura 1

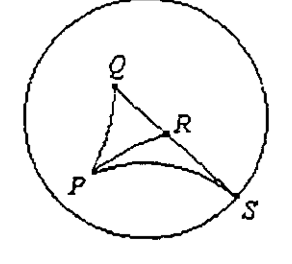
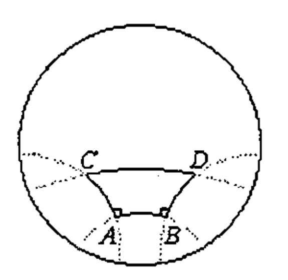
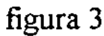


figura 2

En la figura 2 se muestra un h_triángulo ordinario *PQR* en el que la suma de los ángulos internos es aparentemente menor que dos rectos, y un h_triángulo impropio *PRS* en el que uno de los vértices es un punto al infinito *S*. En la figura 3 se muestra un cuadrilátero de Saccheri *ABCD* con ángulos rectos en *A* y *B*, siendo evidente que los ángulos de la cúspide son menores que un recto cada uno de ellos. En la figura 4 se muestra un cuadrilátero de Lambert *ABCD* en el que hay tres ángulos rectos *A*, *B* y *C*, mientras que el ángulo en *D* es evidentemente menor que un recto.




figura 3

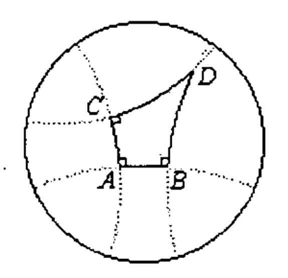


figura 4

Lo que hace importante a este modelo no es sólo que permite representar con suma facilidad los resultados de la geometría de Lobachevsky, sino que en él se pueden establecer con todo rigor las proposiciones de dicha geometría y generalizarlas a tres dimensiones, esto último tomando una esfera fundamental y esferas ortogonales a ella como h_planos. Es importante destacar que todos estos resultados se obtienen en realidad al interior de la geometría euclidiana, pues son relativos a circunferencias construidas en ella. Digamos que el modelo "existe" en la geometría euclidiana plana y como tal establece una prueba de consistencia relativa para la geometría de Lobachevsky, o *geometría hiperbólica*. En otras palabras, la geometría hiperbólica es tan consistente como la geometría euclidiana, y en ella sólo se producirá una contradicción en caso de que ya la haya en la euclidiana.

Un modelo para la geometría de Riemann en el espacio euclidiano. La geometría de Riemann no se puede obtener de la euclidiana de manera tan simple como la de Lobachevsky, con sólo cambiar un axioma. El problema radica en que de los axiomas de incidencia, orden y congruencia de la geometría euclidiana plana (los grupos I, II y III de la sección **1.3**) se sigue que para toda línea hay otra línea que no la toca. Estos axiomas se tienen que modificar; en particular, dos líneas cualesquiera se tendrán que cortar en al menos un punto. A esta geometría se le denomina *geometría elíptica* y es básicamente idéntica con la *geometría esférica* que a continuación exponemos.

Como en el caso anterior y a fin de evitar confusiones, antepondremos la letra "e" a las palabras que utilizaremos en sentido no euclidiano. Por ejemplo, escribiremos "e_punto" para referirnos a un punto del espacio elíptico.

El e_plano mismo (es decir, el universo no euclidiano) consiste en este caso en la superficie de una esfera fija E del espacio euclidiano. A E se le llama *esfera fundamental*. Las e_líneas son los círculos máximos sobre la esfera, es decir, las líneas en que E se intersecta con un plano que pasa por el centro de la esfera (también llamadas *geodésicas*). Un e_punto es una pareja de puntos diametralmente opuestos de la esfera. V. gr., en la figura 5 la parejas (P, P'), (Q, Q') y (R, R') son tres e_puntos, y el círculo $QPQ'P'$ es una e_línea.

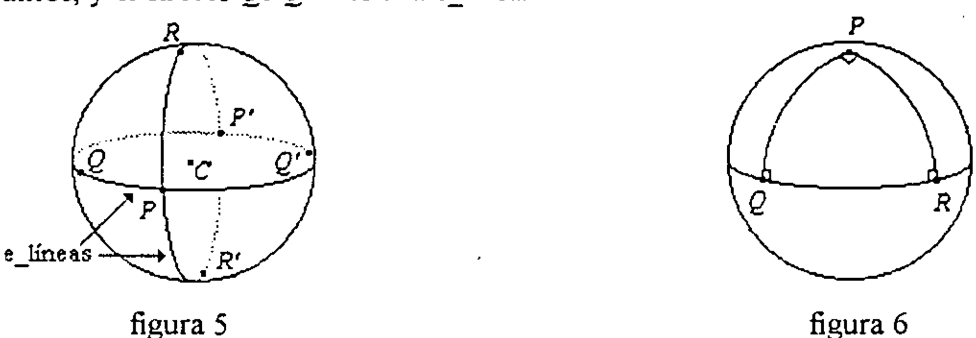


figura 5

figura 6

Dos e_líneas siempre tienen un e_punto en común, pues dos círculos máximos sobre la esfera fundamental se intersecan en puntos diametralmente opuestos (como los usos horarios de la esfera terrestre, que se intersecan en los polos). En la figura 5, los e_puntos (P, P') y (Q, Q') determinan una única e_línea (hay un único plano que pasa por ellos y el centro de la esfera). En la figura 6 se muestra un e_triángulo PQR en el que cada uno de los ángulos internos es igual a un recto. De hecho, por el e_punto P pasan una infinidad de e_perpendiculares a la e_línea por Q y R, del mismo modo que en los polos geográficos se intersecan una infinidad de perpendiculares al ecuador de la esfera terrestre. En la geometría elíptica la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es mayor que dos rectos, y se cumple la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri. Si se elige como distancia entre dos e_puntos la longitud del arco más corto sobre el círculo máximo que pasa por ellos, entonces la distancia máxima en la geometría elíptica es $\pi r/2$, donde r es el radio de la esfera fundamental.

Apéndice 4
La geometría proyectiva de los siete puntos de Fano

Ilustramos el concepto de sistema axiomático formal con un ejemplo de geometría finita: la *geometría proyectiva de los siete puntos de Fano.*

Términos indefinidos.

"punto", "línea", "incide" (relación binaria).

Axiomas.

A1. Si A y B son puntos distintos, al menos una línea incide con ellos.

A2. Si A y B son puntos distintos, a lo más una línea incide con ellos.

A3. Si M y N son líneas distintas, al menos un punto incide con ellas.

A4. Hay al menos una línea.

A5. Cada línea incide con al menos tres puntos.

A6. Ninguna línea incide con más de tres puntos.

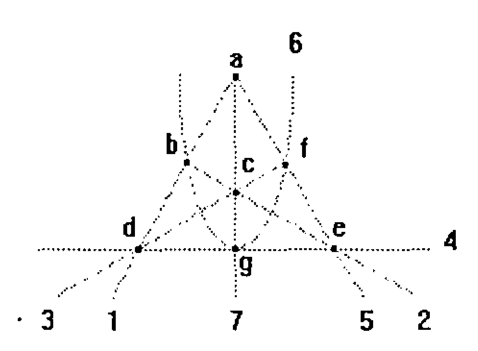
A7. No todos los puntos inciden con una misma línea.

Consistencia. Los axiomas A1-A7 tratan con la sola relación de incidencia entre puntos y líneas (el punto x incide con la línea y). Para asegurar su consistencia exhibimos a continuación un número finito de objetos *a, b, c, …* (los *puntos*) y un número finito de conjuntos de puntos 1, 2, 3, … (las *líneas*) que los hacen verdaderos. Cada asterisco en la tabla indica que el punto pertenece a la línea o que la línea incide con el punto (v.g., el símbolo * en el cruce del segundo renglón y la sexta columna indica que el punto b pertenece a la línea 6).

M	1	2	3	4	5	6	7
a	*				*		*
b	*	*				*	
c		*	*				*
d	*		*	*			
e		*		*	*		
f			*		*	*	
g				*		*	*

Nos encontramos ante un modelo combinatorio para los axiomas de Fano. El valor de este tipo de modelos radica en que cada axioma se puede verificar por inspección directa (de la tabla en este caso). Por ejemplo, del hecho de que cada columna en la tabla tiene tres asteriscos se sigue que los axiomas A5 y A6 son verdaderos en esta interpretación. Este ejemplo deja ver que hay casos en que el sentido intuitivo de los objetos considerados es irrelevante para saber si los

axiomas son o no verdaderos. Más importante es la forma en que tales objetos se relacionan entre sí de acuerdo a reglas impuestas por nosotros (la tabla es una libre creación, no algo preexistente en la naturaleza). La siguiente es una representación geométrica del modelo *M*:



Independencia. Mostramos la independencia de los axiomas A1-A6 exhibiendo seis modelos M1-M6 en cada uno de los cuales son verdaderos todos los axiomas menos el correspondiente al índice del modelo (i.e. A1 es falso en M_1, A2 en M_2 etc.).

M_1	1	2	3	4
a	*		*	
b	*			*
c	*	*		
d		*		*
e		*	*	
f			*	*

M_2	1	2	3	4
a	*	*	*	
b	*	*		*
c	*		*	*
d		*	*	*

M_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	*	*	*	*								
b	*							*	*	*		
c	*				*	*	*					
d		*				*		*			*	
e			*		*				*		*	
f				*			*			*	*	
g		*			*					*		*
h				*		*			*			*
i			*				*	*				*

M_4: un único punto, ninguna línea (los demás axiomas se cumplen por vacuidad).

M_5	1	2	3
a	*	*	
b	*		*
c		*	*

M_6	1
a	*
b	*
c	*

Dualidad. Los axiomas 1 y 3 tienen una propiedad interesante: si se intercambian los términos 'punto' y 'línea', el axioma 1 se convierte en el axioma 3 y viceversa. A esta correspondencia alternada de propiedades se le llama *dualidad*, y las proposiciones que resultan de su aplicación se dice que son el dual la una de la otra. Dos parejas de proposiciones duales son las siguientes:

- Cualesquiera dos líneas inciden con un punto.
- Cualesquiera dos puntos inciden con una línea.

- Dada una línea, hay un punto que no incide con ella.
- Dado un punto, hay una línea que no incide con él.

Teoremas. Algunos teoremas de interés son los siguientes:

T1.(Dual de A2) Si M y N son líneas distintas, no hay más de un punto que incide con las dos.
T2. (Dual de A4) Hay al menos un punto.
T3. (dual de A5) Cada punto incide con al menos tres líneas.
T4. (Dual de A6) Ningún punto incide con más de tres líneas.
T5. (Dual de A7) No todas las líneas inciden con un mismo punto.

El dual de cada axioma es un teorema. Debido a ello, el dual de cada teorema es también un teorema y no necesita demostrarse por separado. De hecho, el dual de un teorema T se demuestra dualizando la demostración de T, i.e. intercambiando en dicha demostración los términos "punto" y "línea". A éste se le conoce como *principio de dualidad.*

T6. Hay exactamente siete puntos.

Demostración. De los axiomas A4, A5 y A7 se infiere que hay un línea M que incide con tres puntos A, B, C y un punto D que no incide con ella.

De los axiomas A1, A5 y A6 se infiere la existencia de tres líneas N, P, Q tales que:

— N incide con los puntos A y D y un tercero que llamamos E.
— P incide con los puntos B y D y un tercero que llamamos F.
— Q incide con los puntos C y D y un tercero que llamamos G.

De T1 se sigue que los puntos A, B, C, D, E, F y G son distintos entre si. Tenemos con ello siete puntos.

Ahora supongamos que hay un octavo punto H. De A1, A5 y A6 se infiere que hay una línea R que incide con A y H y otro punto X. Por T1, X no puede ser ni B ni C ni D (si no, habría dos puntos incidiendo con dos líneas distintas: R y alguna entre M, N y P). Se tiene así que ningún punto incide con las líneas R y Q, lo que contradice a A3. Esto demuestra que la supuesta existencia de un octavo punto es falsa. ■

T7. Hay exactamente siete líneas.

No es necesario demostrar esta proposición: su dual es T6 y por ello es un teorema. Si así lo desea el lector, como ejercicio puede construir una demostración de T7 dualizando la demostración de T6.

Otros teoremas de interés son los siguientes:

T8. Hay dos puntos y dos líneas tales que cada uno de los puntos incide sólo con una de los líneas, y cada una de las líneas incide sólo con uno de los puntos.

T9. Hay dos puntos y dos líneas tales que ninguno de los puntos incide con ninguna de las líneas, mas la línea que incide con los puntos también incide con el punto incidente con las líneas.

Estos dos teoremas tienen algo en común: son autoduales. Los axiomas A1, A2 y A3 y los teoremas T1, T8 y T9 son los axiomas de K. Menger para la geometría proyectiva plana. El modelo que acabamos de dar también es un modelo de estos axiomas, con lo que se demuestra su consistencia.

Categoricidad. Los teoremas T6 y T7 dejan ver que cualquier modelo de los axiomas A1-A7 se puede poner en correspondencia biunívoca con el modelo combinatorio que se utilizó para demostrar su consistencia y, por consiguiente, que cualquier otro modelo es isomorfo a él. Queda, de este modo, establecida la categoricidad de los axiomas de la geometría proyectiva de los siete puntos de Fano.

Apéndice 5

Una prueba de consistencia para la geometría euclidiana

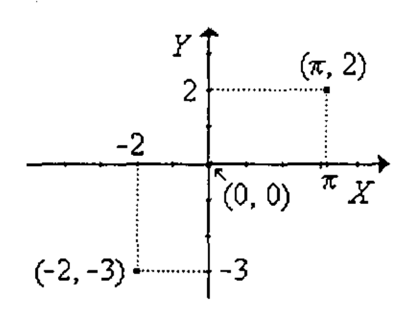
En este apéndice mostramos las ideas geométricas subyacentes a la construcción del modelo aritmético de la geometría euclidiana, expuesta en la sección **1.4**, y demostramos que realmente se trata de un modelo.

Recordemos que para construir el modelo se hicieron las siguientes identificaciones:

1) Por «punto» se entiende *pareja ordenada* (x, y) de números reales. A los números x e y se les llama *coordenadas* del punto.

Así, por ejemplo, son puntos (0, 0), (π, 2) y (–2, –3).

En la figura a la derecha mostramos la interpretación gráfica de estas parejas de números como puntos en el plano. Esta identificación permite tratar a los puntos del plano como parejas ordenadas de números. Nótese que el método de las coordenadas no es parte del modelo, pero indica cómo enlazar el álgebra con la geometría.



2) Sean a, b y c tres números reales tales que a y b no son ambos cero. Por «línea» se entiende el conjunto solución de la ecuación $ax + by + c = 0$, es decir, el conjunto de parejas ordenadas (puntos)

$$\{(x, y) \mid x \in \Re, y \in \Re \text{ y } ax + by + c = 0\}$$

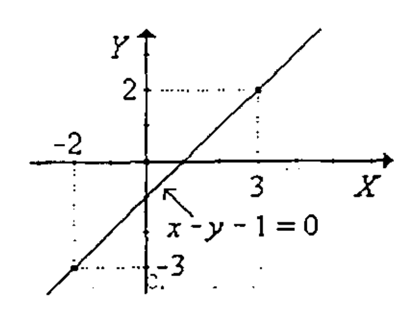
En este contexto, dos ecuaciones de primer grado en x e y cuyos coeficientes difieren entre sí en un factor constante distinto de cero, representan una y la misma línea, y cualquiera de ellas se llamará *ecuación de la línea.*

3) Se dice que un punto «está en» una línea si y sólo si las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la línea.[1]

Volviendo a la interpretación anterior, en la figura a la derecha dibujamos la línea correspondiente a la ecuación

$$x - y - 1 = 0$$

Como se ve, los puntos (–2, –3) y (3, 2) están en esta línea, pues sus coordenadas satisfacen la ecuación. Otra ecuación de la recta es $-2x + 2y + 2 = 0$, ya que sus coeficientes difieren de los de la anterior en el factor –2.



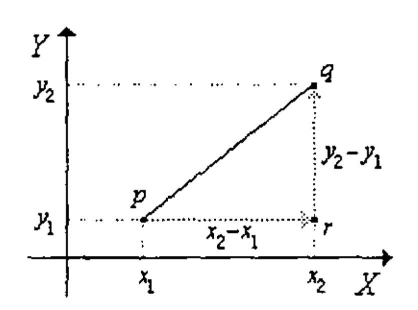
[1] Nótese que la relación «estar en» es una relación binaria entre puntos y líneas. Esta distinción es relevante en la medida en que pone de manifiesto la idea de que las matemáticas son una teoría general de relaciones.

4) Se dice que el punto (x, y) «está entre» los puntos (a, b) y (a', b') si y sólo si hay un número real t, mayor que 0 y menor que 1, tal que

$$x = a + t(a' - a) \quad \text{e} \quad y = b + t(b' - b)$$

Como en seguida veremos, esta misteriosa definición, al igual que la de «congruencia», tienen una lectura geométrica simple con base en el método de las coordenadas y el teorema de Pitágoras.[2]

Consideremos dos puntos $p(x_1, y_1)$ y $q(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano. Como se muestra en la figura a la derecha, con ellos y el punto $r(x_2, y_1)$ se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos son los segmentos pr y rq, de longitudes dirigidas $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$, respectivamente. A su vez, la longitud de la hipotenusa pq es igual a la distancia entre p y q. Por el teorema de Pitágoras tenemos que

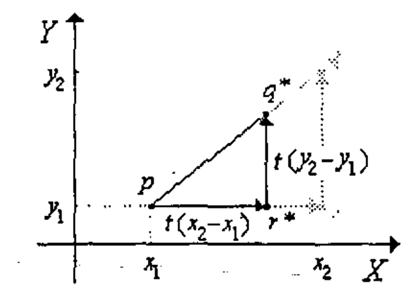


$$d(p, q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ahora consideremos un número real t mayor que 0 y menor que 1. Supongamos, para facilitar las cosas, que $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$ son positivos. En tal caso tenemos que:

$$0 < t(x_2 - x_1) < x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad 0 < t(y_2 - y_1) < (y_2 - y_1)$$

Si ahora a partir del punto p formamos un triángulo rectángulo pq^*r^* con catetos $t(x_2 - x_1)$ y $t(y_2 - y_1)$ como en la figura a la derecha, el resultado será un triángulo semejante al original, y los puntos p, q^* y q estarán sobre una línea recta. Además, el punto q^* estará entre p y q. Mas en este caso las coordenadas del punto q^* serán



$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) \quad \text{e} \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

tal como se pide en la definición de «estar entre».

5) Se dice que el par de puntos $p(x_1, y_1)$, $q(x_2, y_2)$ es «congruente» con el par de puntos $r(x_3, y_3)$, $s(x_4, y_4)$ si y sólo si

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2.$$

Como se puede ver, el miembro de la izquierda de la igualdad es el cuadrado de la distancia entre los puntos p y q, y el miembro de la derecha es el cuadrado de la distancia entre los puntos r y s. Por tanto, la lectura geométrica de esta definición es la siguiente: dos segmentos son congruentes si y sólo sí sus longitudes son iguales.

---

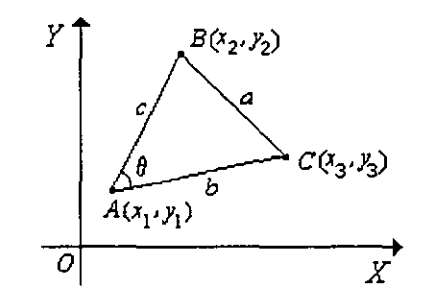
[2] Teorema de Pitágoras: *si* a *y* b *son los catetos de un triángulo rectángulo, y* c *es la hipotenusa, entonces* $a^2 + b^2 = c^2$ (la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa).

6) Sean $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $A'(x_1',y_1')$, $B'(x_2',y_2')$ y $C'(x_3',y_3')$ seis puntos tales que B, C son distintos de A, y B', C' son distintos de A'. Se dice que los ángulos BAC y $B'A'C'$ son «congruentes» si y sólo si

$$\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}}=\frac{(x_2'-x_1')(x_3'-x_1')+(y_2'-y_1')(y_3'-y_1')}{\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}\sqrt{(x_3'-x_1')^2+(y_3'-y_1')^2}}$$

Esta definición pierde su misterio al observar que el miembro de la izquierda de la igualdad es el coseno del ángulo BAC y el miembro de la derecha es el coseno del ángulo $B'A'C'$, como a continuación se muestra.

Consideremos un ángulo BAC con vértice en A. Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) las coordenadas de A, B y C, respectivamente, y sea θ el valor del ángulo BAC, tal como se indica en la figura a la derecha. Si a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo, entonces, por la ley de los cosenos, tenemos que



$$\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Pero $a=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$, $b=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$, y $c=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, de modo que la ley de los cosenos se puede escribir como sigue:

$$\cos\theta=\frac{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-\left[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2\right]}{\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

que al simplificar se reduce a

$$\cos\theta=\frac{(x_3-x_1)(x_2-x_1)+(y_3-y_1)(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

El miembro de la derecha de la última igualdad es uno de los términos que figuran en la definición de «congruencia» de ángulos recién enunciada (el otro término es el coseno del ángulo $B'A'C'$). Así, la lectura geométrica de dicha igualdad es la siguiente: los ángulos BAC y $B'A'C'$ son congruentes si y sólo si sus cosenos son iguales. Nótese que para calcular el coseno de un ángulo, lo único que se requiere es el valor de las coordenadas de dos puntos sobre sus lados y el vértice, y que la definición de «congruencia» que acabamos de dar concuerda a la perfección con la idea geométrica que tenemos de ella, pues dos ángulos se pueden "superponer" el uno al otro si y sólo si sus cosenos son iguales.

Hay que tener presente que la lectura geométrica que acabamos de hacer de las definiciones no forma parte de ellas; si la hemos sacado a la luz ha sido con el propósito de mostrar las ideas que llevaron a interpretar de esta manera los términos primitivos «punto», «línea», «congruencia», etc. Esto significa, entre otras cosas, que los nombres anteriores se aplican no ya a objetos geométricos, sino a entidades algebraicas. Por ejemplo, cuando se "habla" de una «línea», el objeto referido es un conjunto de parejas ordenadas de números, no un conjunto de puntos en el plano. La idea es que bajo esta interpretación de los términos primitivos, los postulados de Hilbert se convierten en un conjunto de enunciados algebraicos verdaderos para los números reales, es decir, en un conjunto de teoremas algebraicos. Veamos con un ejemplo cómo se hace lo anterior.

Consideremos el primero de los axiomas:

I.1 Si A y B son dos puntos distintos dados, hay una y sólo una línea a que pasa por ellos.

De acuerdo a nuestra interpretación, este axioma se transforma en el siguiente enunciado algebraico:

I.1' Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos parejas distintas de números reales, entonces hay una y sólo una ecuación $ax + by + c = 0$ (salvo por aquellas ecuaciones de primer grado en x e y cuyos coeficientes difieren de a, b y c en un factor constante distinto de cero) tal que

1) $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, y
2) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$ (las parejas pertenecen al conjunto solución).

Para demostrar este resultado tenemos que hacer dos cosas:

i) probar que hay una ecuación $ax + by + c = 0$ que satisface las condiciones (1) y (2), y
ii) probar que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen al conjunto solución de otra ecuación $a'x + b'y + c' = 0$, entonces hay un número $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' = kc$ (existencia de una constante de proporcionalidad).

Demostración.

i) Sean $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ y $c = x_1y_2 - x_2y_1$.

En primer lugar, $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, pues si ambos fuesen 0 se tendría que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, en contra de la hipótesis de que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

En segundo lugar, si en la ecuación $ax + by + c = 0$ substituimos (x_1, y_1) ó (x_2, y_2) en vez de (x, y), se verifica la igualdad, lo cual demuestra que ambas parejas pertenecen al conjunto solución de la ecuación. Por ejemplo,

$ax_1 + by_1 + c$	verificando para (x_1, y_1)
$= (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 + x_1y_2 - x_2y_1$	sustituyendo
$= y_1x_1 - y_2x_1 + x_2y_1 - x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1$	distribuyendo

$= (y_1x_1 - x_1y_1) + (x_1y_2 - y_2x_1) + (x_2y_1 - x_2y_1)$ agrupando
$= 0 + 0 + 0 = 0.$

ii) Supongamos que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen al conjunto solución de la ecuación $a'x + b'y + c' = 0$. Probaremos que existe una constante $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ y $c' = kc$.

Para tal fin, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \neq 0$ (es decir, $y_1 - y_2 \neq 0$).

Como (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son solución de la ecuación $a'x + b'y + c' = 0$, tenemos que

$a'x_1 + b'y_1 + c' = 0$
$a'x_2 + b'y_2 + c' = 0$
$a'(x_1 - x_2) + b'(y_1 - y_2) = 0$ sustrayendo miembro a miembro, factorizando
$-a'b + b'a = 0$ sustituyendo a y $-b$ en vez de $y_1 - y_2$ y $x_1 - x_2$.

Por tanto, $b'a = a'b$, y como $a \neq 0$, $b' = (a'/a)b$.

Sea $k = a'/a$. Vamos a demostrar que k es la constante de proporcionalidad buscada, es decir, que $a' = ka$ y $c' = kc$.

Obviamente, $a' = (a'/a)a = ka$, por lo que sólo tenemos que probar la igualdad para c'. Como $ax_1 + by_1 + c = 0$, tenemos que $c = -ax_1 - by_1$, y como $a'x_1 + b'y_1 + c' = 0$, tenemos que $c' = -a'x_1 - b'y_1$, de donde se siguen las siguientes igualdades:

$c' = -a'x_1 - b'y_1$
$= -(a'/a)a \cdot x_1 - (a'/a)b \cdot y_1$ sustituyendo $(a'/a)a$ en vez de a' y $(a'/a)b$ en vez de b'
$= (a'/a) \cdot (a \cdot x_1 - b \cdot y_1)$ factorizando
$= (a'/a)c$ sustituyendo c en vez de $a \cdot x_1 - b \cdot y_1$.

Por tanto, $c' = kc$, y los coeficientes de la ecuación $a'x + b'y + c' = 0$ son proporcionales a los de la ecuación original. El caso en que $a = 0$ es semejante al anterior, pues $b \neq 0$, y se podría hacer con él lo que antes hicimos con a, en cuyo caso la constante de proporcionalidad sería $k = b'/b$. Con esto damos por concluida la demostración.

Hemos probado que cuando los términos primitivos «punto», «línea», etc. los interpretamos como en **(1)-(6)** el axioma **I.1** se convierte en un teorema de álgebra. Los demás axiomas se pueden verificar de manera semejante, demostrándose con ello que los axiomas de Hilbert no expresan sino algunos hechos relevantes del álgebra lineal y la teoría de las ecuaciones lineales, que son un modelo de ellos.[3]

---

[3] El lector interesado en la demostración de los axiomas de Hilbert en tanto que teoremas del álgebra puede consultar el siguiente texto: Eisenhart 1966.

Apéndice 6
Los números complejos

Los números complejos aparecieron por la necesidad de resolver ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en números reales, más el ánimo de resolverla llevó a escribir

$$x = \sqrt{-1}$$

y a decir que $\sqrt{-1}$ es una *solución*, aunque no se tuviese ninguna imagen geométrica de la misma. Incluso se le dio un nombre: ***i***. Este *número* tiene la propiedad de que su cuadrado es -1, y con el tiempo se le llegó a conocer como la *unidad imaginaria*. De ahí que a las expresiones de la forma bi se les llame *números imaginarios*, y a las de la forma $a + bi = a + b\sqrt{-1}$ *números complejos*. Este tipo de expresiones se presentan de un modo natural al *resolver* la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ (donde a, b y c son números reales) con la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pues si $b^2 - 4ac < 0$, el numerador resulta un número complejo. Hacia 1600 ya se disponía de un cálculo algebraico para esta clase de números sujeto a las mismas leyes que los números reales. En particular, se conocían las siguientes reglas para sumar y multiplicar números complejos:

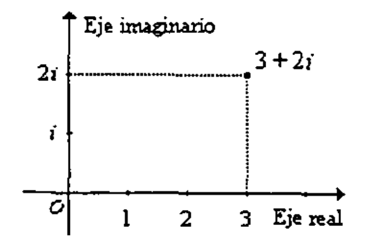
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

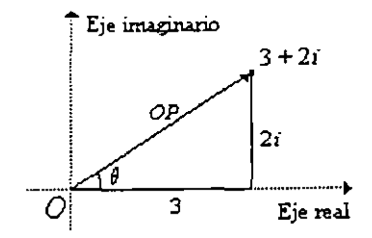
Estas reglas resultan de aplicar las del álgebra ordinaria a las expresiones $(a + bi)$ y $(c + di)$ junto con la regla $i^2 = -1$. Para 1825 ya se tenían dos representaciones geométricas de los números complejos, una en forma de vectores (Wessel y Argand), y otra como puntos en el plano (Gauss y Hamilton).[1] Para ello basta pensar a los números a y b que figuran en el número complejo $a + bi$ como las coordenadas de un punto P en el plano, y al segmento OP como un vector que lo representa, tal como se muestra en las siguientes figuras.

---

[1] Aún así, Gauss se muestra intranquilo respecto al significado de los números complejos. En una carta escrita en 1825 dice: «la verdadera metafísica de $\sqrt{-1}$ es elusiva». (cita tomada de Kline, 1994, p. 835).



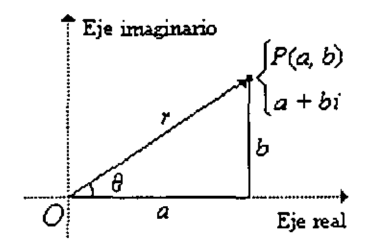
Representación de Gauss



Representación de Wessel y Argand

En la interpretación vectorial de los números complejos, la suma no representa ningún enigma y corresponde a la *Ley del paralelogramo* mencionada en la sección 2.1. En cuanto al producto de números complejos, su representación geométrica se entiende mejor expresando dichos números en la que se llama su *forma polar*, la cual envuelve al ángulo θ que el vector *OP* forma con la parte positiva del eje *X*.

Consideremos de nuevo la representación de Wessel y Argand de un número complejo $z = a + bi$ y sea $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ la longitud o *módulo* del vector *OP* (i. e., la distancia de *P* al origen *O*). De la figura tenemos que los números *a* y *b* son



$$a = r \cos\theta \quad \text{y} \quad b = r \operatorname{sen}\theta$$

donde θ es el ángulo que el vector *OP* forma con la parte positiva del eje *X*. Así,

$$a + bi = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

A $r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ se le llama *forma polar* del número *z*. Si ahora escribimos dos números complejos en su forma polar y los multiplicamos, veremos aparecer una relación entre los ángulos de los vectores correspondientes. En efecto, sean

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$$

y

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$$

dos números complejos. En tal caso, el producto $z_1 z_2$ es igual a

$$r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$$
$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\ \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i\,(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1)]$$
$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

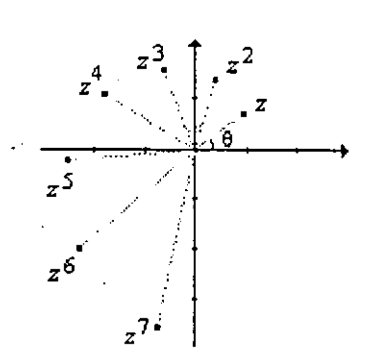
esto último por las identidades trigonométricas

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\ \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \text{ y}$$
$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1$$

Este resultado se resume así: el módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y el ángulo correspondiente es la suma de los ángulos. Si ahora llamamos *giros* a los números complejos de longitud 1 (es decir, cuyo módulo es la unidad), entonces el producto de un número complejo z con ángulo θ por un giro g con ángulo θ_0 es el número complejo $w = gz$ tal que su módulo es igual al módulo de z y su ángulo es igual a $\theta + \theta_0$. Por tanto, multiplicar un número complejo z por un giro g es lo mismo que rotar (o *girar*, de ahí el nombre) el vector correspondiente un ángulo θ_0. En tal caso, todos los puntos del plano describen una trayectoria circular en torno al origen, y se desplazan, no la misma distancia, pero sí un mismo ángulo.

Veamos un par de ejemplos.

1) Consideremos el número complejo $z = 1.2(0.8 + i\ 0.6)$, ya escrito en forma polar. En este caso el módulo de z es 1.2 (la distancia del punto al origen), $cos\ \theta = 0.8$ y $sen\ \theta = 0.6$ (pues $0.8^2 + 0.6^2 = 1$), y el ángulo θ que el vector forma con la parte positiva del eje X es aproximadamente igual a 74° 50'. Formemos las potencias z^2, z^3, z^4, z^5, z^6 y z^7.



Como el módulo de z es mayor que 1, al efectuar las multiplicaciones los módulos serán cada vez más grandes: $(1.2)^2$, $(1.2)^3$, $(1.2)^4$, $(1.2)^5$, $(1.2)^6$ y $(1.2)^7$, tal como se puede ver en la figura. Por su parte, los ángulos correspondientes serán 2θ, 3θ, 4θ, 5θ, 6θ y 7θ, lo que también se puede ver en la figura, pues él ángulo entre los vectores consecutivos es siempre el mismo e igual a θ, y cada z^k se obtiene sumando θ al ángulo anterior.

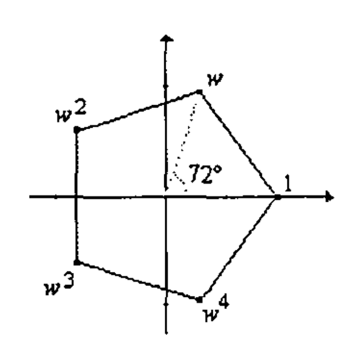
2) Consideremos el número complejo $w = cos\ 72° + i\ sen\ 72°$, escrito en forma polar. En este caso el módulo de w es 1, por lo que w es un giro y el punto correspondiente está en la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Aunque no daremos el valor exacto de las funciones trigonométricas del ángulo de 72°, su valor aproximado es $cos\ 72° \approx 0.309$ y $sen\ 72° \approx 0.9511$, por lo que un número próximo a w es $0.309 + i\ 0.9511$.

Si elevamos w a la quinta potencia, el modulo será 1, y el valor del ángulo será $5 \cdot 72° = 360°$, de modo que $w^5 = 1$. De la misma manera tenemos que los números complejos

$$w^2 = cos\ 144° + i\ sen\ 144°,\quad w^3 = cos\ 216° + i\ sen\ 216° \ \text{ y } \ w^4 = cos\ 288° + i\ sen\ 288°$$

son raíces quintas de la unidad, pues al elevar cualquiera de ellos a la quinta potencia, el resultado es 1. Por ejemplo,

$(w^4)^5 = (cos\ 288° + i\ sen\ 288°)^5 = cos\ (5{\cdot}288)° + i\ sen\ (5{\cdot}288)° = cos\ 1440° + i\ sen\ 1440° = 1$, pues $cos\ 1440° = 1$ y $sen\ 1440° = 0$, ya que $1440° = 4{\cdot}360°$.



Como se ve en la figura, éstas raíces, junto con el punto (1, 0), son los vértices de un pentágono regular.

En general, las raíces n-ésimas de la unidad, es decir, las soluciones de la ecuación $x^n = 1$, se obtienen con la fórmula

$$w_k = cos\left(\frac{k \cdot 360^o}{n}\right) + i\left(\frac{k \cdot 360^o}{n}\right), \quad k = 1,2,\ldots,n$$

Para finalizar diremos que la importancia de los números complejos en la teoría de ecuaciones es que con ellos se puede resolver completamente cualquier ecuación polinomial con coeficientes complejos, sin importar su grado.

Apéndice 7
La teoría cantoriana de conjuntos

En 1638 Galileo Galilei (1564-1642) observó que los cuadrados de los enteros positivos se podían poner en correspondencia uno a uno con los enteros positivos:

Enteros positivos:	1	2	3	4	5	...	n	...
	↕	↕	↕	↕	↕	...	↕	...
Números cuadrados:	1	4	9	16	25	...	n^2	...

Esta correspondencia ponía en duda el antiguo axioma de que *el todo es mayor que la parte* (noción común NC1 de Euclides, cf. sección 1.1), mostrando que éste deja de valer más allá de las colecciones finitas, y significó para Galileo un hecho incomprensible, pues es evidente que los números cuadrados son sólo una parte de los enteros positivos. Lo anterior lo llevó a concluir que el infinito es algo que trasciende nuestro entendimiento finito y, por lo tanto, ininteligible, sin que por ello nos abstengamos de razonar en torno a él. Esto lo expresa en su *Discorsi intorno à due nuove scienze* (Diálogos relativos a dos nuevas ciencias) en boca de *Salviati* con las siguientes palabras: «He de expresar algunas ideas mías, diciendo de nuevo lo que no hace mucho he expuesto; es decir, que el infinito, por sí solo, excede nuestra capacidad de comprensión, lo mismo que ocurre con los indivisibles».[1] A través de este personaje, Galileo explica el problema:

> *Salviati.* Si continúo preguntando cuántos son los números cuadrados, se puede responder con certeza que son tantos cuantas raíces tengan, teniendo presente que todo cuadrado tiene su raíz, y toda raíz su cuadrado; no hay, por otro lado, cuadrado que tenga más de una raíz, ni raíz que tenga más de un cuadrado.
> *Simplicio.* Así es.
> *Salviati.* Pero si pregunto cuántas raíces hay, no se puede negar que hay tantas como números, ya que no hay ningún número que no sea raíz de algún cuadrado. Estando así las cosas, habrá que decir que hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números. Decíamos al principio, sin embargo, que todos los números son muchos más que todos los cuadrados, puesto que la mayoría de ellos no son cuadrados. Incluso el número de cuadrados va disminuyendo siempre a medida que nos acercamos a números más grandes, ya que hasta cien tenemos diez cuadrados, que es tanto como decir que sólo la décima parte son cuadrados; y en diez mil sólo la centésima parte son cuadrados, mientras que en un millón la cifra ha descendido a la milésima parte. Con todo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, habría que decir que hay tantos cuadrados como números en total.

---

[1] Galileo, 1638, p. 106.

Sagredo. En este caso, ¿qué es lo que se deduce?
Salviati. Yo no veo qué otra cosa haya que decir si no es que infinitos son todos los números, infinitos los cuadrados, infinitos sus raíces; la multitud de los cuadrados no es menor que la de todos los números, ni ésta mayor que aquélla; y finalmente, que los atributos de mayor, menor e igual que no se aplican a los infinitos, sino sólo a las cantidades finitas [*terminate*].[2]

El punto de vista moderno es un tanto distinto al de Galileo. Así, lo que a él le parecía un contrasentido —el que "el todo fuese igual a una de sus partes"— pasó a ser el distintivo de los conjuntos infinitos, y permitió distinguir mediante una propiedad formal lo finito de lo infinito. Fue Dedekind el primero en poner esta idea en forma de definición, que aquí expresamos en lenguaje moderno:

Un conjunto es infinito si tiene un subconjunto propio equivalente a él, es decir, un subconjunto que se puede poner en correspondencia una a uno con sus elementos.

Esta definición se apoya en la posibilidad de distinguir entre *inclusión* y *equipotencia*, dos nociones que hasta poco tiempo antes se habían confundido. Así, lo que para Galileo era un hecho incomprensible (que un conjunto tuviese la misma potencia que un subconjunto propio), se convirtió en la prueba de que los enteros positivos son un conjunto infinito.

Para comparar entre sí conjunto infinitos, Cantor se sirvió de una noción que ya figura en el argumento de Galileo, la de *correspondencia*, y con base en ella pudo extender el concepto de número entero al dominio de los conjuntos infinitos, llegando incluso llegó a definir una peculiar aritmética de números transfinitos.

Comparación de conjuntos infinitos. Uno de los primeros descubrimientos de Cantor fue que hay distintas clases de conjunto infinitos, y que éstas son irreductibles entre sí. Esto lo hizo mostrando que hay conjuntos infinitos cuyos elementos no se pueden poner en *correspondencia uno a uno*, con lo que situó esta última noción en la base de su teoría.

Quizá un ejemplo sea suficiente para aclarar esta idea.

Si en un auditorio nos preguntasen: ¿cuál es mayor, el número de personas o el número de sillas? habría varios procedimientos sencillos para contestar a la pregunta. Uno de ellos sería *contar* las personas y las sillas y comparar los respectivos números. Otro sería pedir que cada persona se sentara en una y sólo una silla, sin que dos individuos lo hiciesen en el mismo lugar, y observar el resultado. Si alguien quedase de pie, habría más sillas que personas, o viceversa. En cambio, si no sobrasen ni personas ni sillas, diríamos que las hay

[2] *Op. cit*, pp. 109-110.

en el mismo número. La ventaja de este último procedimiento es que para comparar el conjunto de personas con el conjunto de sillas no se necesita conocer su número; más bien, lo único que se necesita es la noción de *correspondencia*, idea perfectamente extensible a los conjuntos infinitos.

En general, se dice que dos conjuntos A y B tienen la misma *potencia* (el mismo *número de elementos*) en caso de que sea posible establecer una *correspondencia uno a uno* (*biunívoca*, *biyectiva*) entre ellos, es decir, asociar a cada elemento de A un único elemento de B de modo que:

1) ningún elemento de B quede fuera de la correspondencia, y

2) ningún elemento de B corresponda a más de un elemento de A.[3]

Esta noción, que no presenta mayor interés cuando se aplica a conjuntos finitos, conduce a resultados asombrosos cuando es llevada al dominio de lo infinito. En primer lugar, permite asignar un "tamaño" a colecciones infinitas tomando como punto de referencia algunas de ellas como, por ejemplo, la de los números reales o la de los números naturales $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.[4] De ahí la siguiente definición:

> Un conjunto A es *numerable* cuando se puede poner en correspondencia uno a uno con el conjunto N de los números naturales.

En la práctica, para mostrar que un conjunto infinito es numerable es suficiente con indicar cómo se pueden asentar sus elementos en un lista, de modo que el primero corresponda a 0, el segundo a 1, el tercero a 2, y así sucesivamente. Aun cuando la enumeración sea infinita, en ella cada elemento del conjunto detentará una posición finita, es decir, se encontrará a un número finito de "pasos" del primero.

Por ejemplo, los enteros se pueden enumerar de la siguiente manera:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots, n, -n, \ldots$$

por lo que decimos que el conjunto de los números enteros es *numerable*.

(Nota. La sección **2.6.3** se podrá leer casi sin ningún problema al llegar a este punto.)

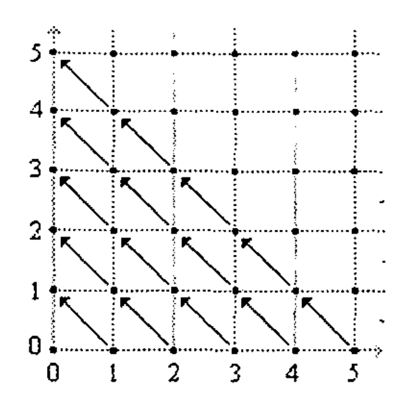
Las fracciones positivas también se puede enumerar, al igual que los números racionales y los números algebraicos (los números complejos que son raíces de alguna ecuación

---

[3] Se trata de la misma noción que se expuso en la sección **2.3** bajo el nombre de *transformación*. En otras palabras, las *transformaciones* geométricas son un caso particular de correspondencias uno a uno.

[4] El conjunto N resulta de añadir al conjunto N^* de los enteros positivos el número 0, i. e., $N = N^* \cup \{0\}$. De acuerdo con el teorema de Dedekind, mencionado en la sección **2.6.2**, la potencia de este conjunto es la más pequeña de la jerarquía *transfinita*, pues todo conjunto infinito posee un "duplicado" de él.

polinomial con coeficientes enteros). En el siguiente diagrama mostramos cómo se pueden enumerar todas las parejas de números naturales (n, m) utilizando un procedimiento análogo al de la sección **2.6.3** para los fracciones positivas.



Las parejas se pueden contar siguiendo las flechas paralelas. El conteo produce la siguiente sucesión: (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (1, 2), (0, 3), (4, 0), (1, 3), ...Nótese que las parejas están dispuestas en orden creciente de acuerdo con el siguiente criterio: primero aquellas cuyas componentes suman 0, después aquéllas cuyas componentes suman 1, luego las que suman 2, y así sucesivamente.

La siguiente lista incluye algunos resultados de enumerabilidad de conjuntos y forma parte de la sección **2.6.3**. Su repetición tiene como único fin redondear la exposición.

1) El conjunto de números racionales es numerable.
2) El conjunto de pares ordenados de números racionales es numerable.
3) El conjunto de ternas ordenadas de números naturales es numerable.
4) En general, el conjunto S_n de sucesiones finitas de n números naturales, para cada n fija, es numerable.
5) Los conjuntos S de sucesiones finitas de números naturales y T de sucesiones finitas de números racionales son numerables.
6) El conjunto de ecuaciones algebraicas, de la forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ son números enteros y $a_n \neq 0$, es numerable.
7) El conjunto de *números algebraicos*, es decir, de números que son raíz de una ecuación algebraica, es numerable.
8) El conjunto de *expresiones* de un lenguaje L con alfabeto A, donde A es un conjunto finito o numerable (una *expresión* es una sucesión finita de símbolos de A), es numerable.

En la sección **2.6.3** se encuentra una prueba del inciso (1) anterior. En 1874 Cantor se planteó un problema que hasta entonces había pasado inadvertido: ¿Es $\mathfrak{R}$, el conjunto de los números reales, numerable? El primer resultado substancial de la naciente teoría de conjuntos fue el descubrimiento de que la respuesta a esta pregunta es negativa. La primera demostración que dio fue por reducción al absurdo tomando como base el *principio de los intervalos anidados*, una proposición equivalente al axioma de Dedekind. Esta conquista lo llevó a intensificar las investigaciones en torno a la equipotencia de conjuntos, que a la larga lo condujeron a la teoría de los números transfinitos. Con la demostración de la existencia

de conjuntos no numerables, los conceptos de *cardinalidad*, implícito en el de correspondencia uno a uno, y de *numerabilidad* adquirieron un nuevo significado. Además, dado que el concepto de *correspondencia* no exige nada por parte de los conjuntos considerados, la teoría se generalizó a conjuntos cualquier naturaleza, no necesariamente de puntos o de números.

Números cardinales. Más allá de los conjuntos de puntos o de números, es posible desarrollar una teoría de conjuntos que no presuponga nada acerca de la naturaleza de sus elementos. Para ello conviene introducir cierta terminología y notación.

Entre los conjuntos se incluye el *conjunto vacio* que no contiene elementos. A este conjunto se le denota con Ø o con $\{\}$. Análogamente, el conjunto cuyo único elemento es a se denota con $\{a\}$, y el conjunto cuyos elementos son a, b, c, ... con $\{a, b, c, ...\}$. Si a es elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$, y si no lo es, $a \notin A$. Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismos elementos, en cuyo caso se escribe $A = B$, y son equivalentes cuando se puede establecer una correspondencia uno a uno entre ellos, en cuyo caso se escribe $A \sim B$.

En cuanto al concepto de *número cardinal*, todo parece indicar que lo natural sería definirlo diciendo que dos conjuntos tiene cardinales iguales si y sólo sí son equivalentes en el sentido recién señalado. Aunque ésta parece una formulación natural del concepto, la "definición" es insatisfactoria en la media en que no dice explícitamente lo que es un "número cardinal". Al respecto, Cantor ofreció la siguiente definición por abstracción:

> Nos referiremos con el nombre de "potencia" o "número cardinal" de M al concepto general que, por medio de nuestra facultad activa del pensamiento, surge del agregado M cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus distintos elementos m y de el orden en el que están dados.
> Denotamos el resultado de este doble acto de abstracción, el número cardinal de M, con $\overline{\overline{M}}$.[5]

[5] Cantor, 1955, p. 86. La notación $\overline{\overline{M}}$ está sugerida en la definición: la doble raya un indica que se trata de una doble abstracción. Si lo único que se abstrae es de la naturaleza de los elementos, lo que se tiene según Cantor es la noción de número *ordinal*, que se denota con $\overline{M}$. La definición cantoriana apunta al hecho de que al abstraer la naturaleza y el orden en que se presentan los elementos de un conjunto, lo único que permanece es su "cantidad". En la literatura moderna el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ también se denota con *card* M y se define con base en la noción de número ordinal, que depende de la presentación axiomática de teoría.

El número cardinal de un conjunto A es un objeto que se asocia a todos los conjuntos B equivalentes a él, de modo que $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ si y sólo si $A \sim B$.[6] ¿Qué son los número cardinales más allá de esta caracterización? Cualquier cosa que sean, es irrelevante para la teoría.

La noción de "parte de" se introduce con la siguiente definición: Un conjunto A' es un *subconjunto* (una parte) de un conjunto A (en símbolos, $A' \subset A$) si todo elemento a' de A' es un elemento de A.

Obsérvese que los subconjuntos de un conjunto A incluyen al conjunto vacío $\varnothing$ y a A mismo. Evidentemente, si $A'' \subset A'$, y $A' \subset A$, entonces $A'' \subset A$. Así mismo, se definen la unión, intersección y diferencia de dos conjuntos como sigue:

1) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$
2) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$
3) $A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$[7]

Consideremos ahora la importante cuestión de comparar números cardinales. Dados dos conjuntos A y B, ¿se pueden poner en correspondencia alguno de ellos con un subconjunto del otro? Al respecto hay cuatro posibilidades:

1) Hay un $B' \subset B$ tal que $A \sim B'$, pero no hay un $A' \subset A$ tal que $B \sim A'$.

2) Hay un $A' \subset A$ tal que $B \sim A'$, pero no hay un $B' \subset B$ tal que $A \sim B'$.[8]

3) Hay un $B' \subset B$ tal que $A \sim B'$ y hay un $A' \subset A$ tal que $B \sim A'$.

4) No hay un $B' \subset B$ tal que $A \sim B'$ y no hay un $A' \subset A$ tal que $B \sim A'$.

En el caso (1) se dice que el cardinal de A es menor que el cardinal de B (i. e., $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$), mientras que en el caso (2) se dice que el cardinal de B es menor que el cardinal de A.[9]

---

6 Nótese que Cantor no define explícitamente la noción de "número cardinal", sino que lo hace en contexto, como parte de la definición de "tener el mismo número cardinal". Posteriormente Bertrand Russell (1872-1970) intentó una definición explícita un tanto dudosa, al decir que el número cardinal de un conjunto es el conjunto de todos los conjuntos equivalentes a él. Cf. Russell, 1903, p. 171, Russell y Whitehead, 1910, 72.66, o Russell, 1919, p. 18 para una versión modificada de la definición anterior.

7 En la definición se hace uso de la notación *descriptiva* para los conjuntos. En ésta, el conjunto se *describe* enunciando una condición (una *propiedad* o *relación*) que sus elementos satisfacen. La notación $\{x \mid P(x)\}$ se lee "el conjunto de todas las x tales que $P(x)$", donde $P(x)$ es una condición que cumplen los elementos del conjunto y sólo ellos.

8 Esta posibilidad resulta de intercambiar A con B en el inciso anterior, por lo que en cierto sentido expresa lo mismo.

9 Para justificar la relación $x < y$ como una relación entre cardinales, y no sólo entre los conjuntos A y B, nótese que si $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, y $X \sim A$ e $Y \sim B$, entonces $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$. Además, la relación es *transitiva*: si x, y y z son tres números cardinales, y $x < y$, e $y < z$, entonces $x < z$.

En cuanto a (3), en 1898 Friedrich Schröder (1841-1902) y Felix Bernstein (1878-1956) probaron que en tal caso A y B son equivalentes, es decir, que de (3) se sigue que $A \sim B$. A éste se le conoce como el *teorema de la equivalencia*, y se le puede enunciar así:

$$\text{Si } A \sim B' \subset B \text{ y } B \sim A' \subset A, \text{ entonces } A \sim B.$$ [10]

La demostración de que todos los números cardinales son comparables entre sí, es decir, que el caso (4) jamás se cumple, fue algo tardía, y se obtuvo como una consecuencia del teorema de Zermelo de 1904 sobre la posibilidad de bien ordenar todo conjunto.[11] Como corolario se tiene lo siguiente:

$$\text{Si } A \subset B, \text{ entonces } \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}.$$

A los cardinales de los conjuntos infinitos se les llama *cardinales transfinitos*.[12] El número cardinal del conjunto de los números naturales N se denota con $\aleph_0$ (aleph-cero)[13], y es el menor de todos los cardinales tranfinitos. Su relación con los otros números cardinales es la siguiente:

- Si n es un número natural, entonces $n < \aleph_0$.
- Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable, es decir, para todo conjunto infinito A hay un $A' \subset A$ tal que $\overline{\overline{A'}} = \aleph_0$.
- Si $\overline{\overline{A}}$ es un cardinal transfinito, entonces $\aleph_0 \leq \overline{\overline{A}}$ ($\aleph_0$ es el primer cardinal transfinito).
- La cardinalidad de un conjunto infinito A no cambia al añadirle un conjunto finito o numerable de elementos.

Cardinales transfinitos superiores. Una consecuencia de la prueba de que el conjunto de los números reales no es numerable es que el cardinal del continuo es estrictamente mayor que $\aleph_0$. Esto significa que hay una jerarquía de conjuntos infinitos según su "tamaño" en la que N precede a $\Re$. Si denotamos con $\aleph$ la cardinalidad del continuo, entonces $\aleph_0 < \aleph$. Tras descubrir el resultado anterior, fueron dos las cuestiones que preocuparon a Cantor: la

[10] La demostración de este resultado se puede encontrar en varios libros como, por ejemplo, Kleene 1952 y Fraenkel, 1976.

[11] Un conjunto ordenado se dice que está *bien ordenado* si todos sus subconjuntos no vacíos tienen un primer elemento. El problema de bien ordenar un conjunto fue desde siempre una de las preocupaciones de Cantor, pues de ello dependía la posibilidad de extender los métodos de conteo a conjuntos no numerables. En particular, su interés se centró en el problema de definir un buen orden entre los números reales, pues en su orden habitual no cumplen con esta propiedad (por ejemplo, el conjunto de números reales comprendidos en el intervalo (0, 1) no tiene primer elemento). La demostración de que $\Re$ se puede bien ordenar depende de un poderoso axioma que Zermelo debió adoptar para ésta y otras cuestiones, y que ahora se conoce como *axioma de elección*. Este principio tiene un marcado carácter no constructivo y se convirtió rápidamente en un tema para la polémica. De esto nos ocupamos en los capítulos **2** y **3**.

[12] Podemos considerar que los números naturales son los números cardinales de los conjuntos finitos. Por ejemplo, cuando se dice que el conjunto de las letras de nuestro alfabeto $A = \{a, b, c, \ldots x, y, z\}$ tiene veintinueve elementos, lo que se quiere decir es que $\overline{\overline{A}} = 29$.

[13] La letra «$\aleph$» es la primera del alfabeto hebreo, y Cantor la utilizó por primera vez en [Cantor, 1895].

de saber si habia cardinales transfinitos mayores que $\aleph$ (el dominio de los cardinales transfinitos seria muy pobre si sólo contuviese a estos dos cardinales), y la de saber si entre $\aleph_0$ y $\aleph$ habia otros números cardinales. La primera de ellas lo llevó a la teoría de los cardinales transfinitos superiores, y la segunda al *problema del continuo*, ampliamente comentado en la sección **2.6.3**.

En cuanto a la existencia de conjunto de mayor cardinalidad que $\mathfrak{R}$, Cantor demostró en 1891 un resultado que produjo nuevos avances en la teoría. Si denotamos con $\wp(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A, llamado *conjunto potencia de A*, podemos enunciar el teorema de Cantor como sigue:

$$\text{Para todo conjunto } A,\ \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\wp A}}$$

Así, dado cualquier cardinal finito o transfinito, existe uno mayor, lo que garantiza la existencia de una jerarquía ininterrumpida de cardinales transfinitos. La demostración de Cantor tiene como base nuevamente el método diagonal y procede por reducción al absurdo: si S es un conjunto de subconjuntos de A, y $S \sim A$, entonces hay un subconjunto X de A tal que $X \notin S$.

En este punto Cantor introdujo una sugestiva notación. Si c es el cardinal de un conjunto A, el cardinal de su conjunto potencia se denota con 2^c. Esta notación concuerda con la de la aritmética usual cuando c es un número finito. Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, entonces $\overline{\overline{A}} = 3$ y el cardinal de $\wp(A)$ es 8, como el lector podrá comprobar contando el número de subconjuntos de A (sin olvidar que el conjunto vacío $\varnothing$ es uno de ellos). Mas en este caso $2^3 = 8$, es decir, la notación para el cardinal del conjunto potencia coincide con la notación aritmética, pues el cardinal de $\wp(N)$ se denota con $2^{\aleph_0}$. En conformidad con el teorema de Cantor, se tiene la siguiente sucesión ilimitada de cardinales transfinitos:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \ldots$$

pues $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{\wp(N)}} < \overline{\overline{\wp(\wp(N))}} < \overline{\overline{\wp(\wp(\wp(N)))}} < \ldots$

Según lo visto en la sección **2.6.4**, los siguientes conjuntos tienen cardinalidad $2^{\aleph_0}$:

- El conjunto $\mathfrak{R}$ de los números reales.
- El conjunto $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ de todos los puntos del plano coordenado.
- El conjunto $\mathfrak{R}^3 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ de todos los puntos de espacio coordenado, y en general, el conjunto $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \ldots \times \mathfrak{R}$ de todas las sucesiones de n números reales.
- El conjunto $\mathfrak{R}^N$ de todas las funciones de N en $\mathfrak{R}$.

- El intervalo (0, 1) de todos los números x tales que $0 < x < 1$, y en general cualquier intervalo (a, b) de números reales.
- El conjunto T de los números *trascendentes*, es decir, de los números reales y complejos que no son solución de alguna ecuación algebraica.
- El conjunto C de todas las funciones de $\Re$ en $\Re$ que son *continuas*.
- El conjunto $\wp(N)$ de subconjuntos de N.

De acuerdo con la notación de Cantor para el cardinal del conjunto potencia, el último inciso se puede expresar diciendo que el número $\aleph$ es igual a $2^{\aleph_0}$, es decir, que $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

La hipótesis generalizada del continuo. Hay un punto de interés relativo a los números cardinales transfinitos que queremos señalar. Es el siguiente: de la existencia de un subconjunto equivalente a N en todo conjunto infinito A (teorema de Dedekind), se sigue que $\aleph_0$ es el primer cardinal transfinito, es decir, el menor de todos ellos. En 1895 Cantor demostró que los cardinales transfinitos constituyen una sucesión bien ordenada, en el sentido de que a partir de $\aleph_0$ hay un cardinal $\aleph_1$ que le sucede inmediatamente, es decir, que tiene la siguiente propiedad: si c es un cardinal transfinito y $\aleph_0 < c$, entonces $\aleph_1 \leq c$.[14] Siguiendo en la misma tónica demostró que hay un cardinal transfinito $\aleph_2$ con la misma propiedad respecto a $\aleph_1$, y en general que si $\aleph_\alpha$ es un cardinal de esta sucesión, entonces hay un cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ con la propiedad de que $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$ y tal que cualquier cardinal transfinito c mayor que $\aleph_\alpha$ es mayor o igual a $\aleph_{\alpha+1}$, es decir, demostró que cada $\aleph_\alpha$ tiene un sucesor inmediato. Asi, Cantor ofreció una sucesión infinita de desigualdades

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} \ldots$$

en la que para cada α, $\aleph_{\alpha+1}$ es el cardinal transfinito inmediato de $\aleph_\alpha$. De hecho, Cantor demostró que dado cualquier cardinal, este tiene un cardinal mayor inmediato.

Desde esta perspectiva, el problema del continuo de Cantor se expresa así:

$$¿\text{Es } \aleph = \aleph_1? \text{ o bien, } ¿\text{Es } 2^{\aleph_0} = \aleph_1?$$

pues sabemos que $\aleph = 2^{\aleph_0}$. Esta interrogante se puede generalizar como sigue:

$$¿\text{Es } 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \text{ para cualquier } \alpha?$$

La respuesta afirmativa a esta pregunta se conoce como *hipótesis generalizada del continuo* (HGC, o GCH por sus siglas en inglés), y fue formulada por Felix Hausdorff (1868-1942) en 1908; significa que para cualquier cardinal $\aleph_\alpha$, entre él y el cardinal $2^{\aleph_\alpha}$ de su conjunto potencia no hay ningún otro número cardinal. Al respecto, en 1938 Gödel

[14] La misma propiedad que en los enteros: cada uno de ellos tiene un sucesor inmediato.

demostró que esta hipótesis es *compatible* con los axiomas de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos (ZF).[15] A su vez, en 1963 Paul Cohen demostró que la negación de la hipótesis generalizada del continuo también es compatible con los axiomas de ZF, por lo que el problema generalizado del continuo es *indecidible* con los recursos disponibles en la teoría hasta este momento.[16]

Números ordinales. Al definir los números cardinales transfinitos Cantor hace una doble abstracción: olvida la naturaleza de los objetos considerados, y el orden en que éstos están dados. Es así como se obtienen los *aleph*. No obstante, es posible proceder de otra manera; v. gr., haciendo abstracción de la naturaleza de los elementos de un conjunto, mas no del orden en que están dispuestos. En tal caso lo que resulta son los números *ordinales*.

La distinción entre número *cardinal* y número *ordinal* nos es familiar en el dominio de los números finitos, es decir, en los números enteros. Por ejemplo, podemos hablar de cuatro espectadores en un teatro —cuatro es un número cardinal— o del *cuarto* espectador en la primera fila comenzando por la izquierda; *cuarto* es un número ordinal. Esta distinción no ofrece mayor interés en el caso finito, y los libros de aritmética elemental le dedican menos espacio que los libros de gramática. Esto se debe a que en el domino de lo finito los números cardinales se corresponden de manera exacta con los ordinales, de modo que las operaciones entre unos y otros coinciden entre sí y los resultados son los mismos. Por ejemplo, cuatro espectadores más dos espectadores son seis espectadores, y el segundo espectador después del cuarto espectador es el sexto espectador. En este ámbito la noción de número ordinal no presenta ninguna novedad.

No obstante, al *otro lado del infinito* las cosas son diferentes. En efecto, a un mismo número cardinal transfinito le corresponden una multitud de números ordinales transfinitos. Esta diferencia, que Cantor puso en evidencia por vez primera, plantea serias dificultades de las que sólo daremos una idea en estas líneas. Para empezar, dio lugar a una aritmética ordinal radicalmente distinta de la aritmética cardinal; en segundo lugar, dio lugar a propiedades radicalmente distintas para unos y otros números y obligó a utilizar formas de razonamiento problemáticas en el tratamiento de los números cardinales como, por ejemplo, el axioma de elección que más adelante veremos.

Establezcamos la diferencia entre los números cardinales y los números ordinales. El conjunto

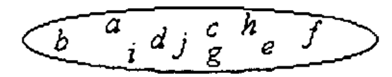
---

15 A esta teoría nos referimos en el capítulo 3. Por lo pronto podemos hacer el siguiente comentario de ZF: se trata de una teoría axiomática en la que es posible reconstruir toda la teoría cantoriana de conjuntos, e incluso el edificio entero de la matemática clásica.

16 *Indecidible*: que no se le puede demostrar ni *refutar* (i. e., probar su negación) con ellos.

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$$

está dispuesto según un orden, a diferencia de la colección



en la que no hay un orden entre sus elementos. Aunque ambos agregados tienen los mismos elementos (y por ende la misma potencia), se les puede distinguir por este segundo aspecto, es decir, porque en el primer caso no se ha hecho abstracción del orden en que están dados sus elementos. En general, se dice que un conjunto A está *bien ordenado* si sus elementos forman una sucesión con las siguientes características:

1) Hay un primer elemento a_0,
2) Todo elemento, a condición de que no sea el último, está seguido por un elemento particular, y
3) En todo subconjunto no vació A' de A, finito o infinito, hay un elemento a_0' que precede a todos los demás (un primer elemento relativo al sistema).

Así, en todo conjunto bien ordenado hay una relación de precedencia entre sus elementos, y dados dos cualesquiera de ellos, por fuerza uno y sólo uno de ellos precede al otro en el orden (en cuyo caso se escribe $x < y$).[17]

Los siguientes son algunos ejemplos:

1) La sucesión de los números naturales en su orden natural:

$$0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n+1, ...$$

2) El conjunto de los números racionales positivos con la ordenación de la sección **2.6.3**:

$$1, -1; 2, -2; 1/2, -1/2; 1/3, -1/3; 3, -3; 4, -4; 3/2, -3/2; 2/3, -2/3; \ 1/4, -1/4...$$

3) El conjuntos de parejas ordenadas de números naturales, con la ordenación dada con anterioridad en este apéndice:

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 0), (3, 1), ...$$

[17] En su orden natural, ni los números reales positivos ni los números racionales no negativos son conjuntos bien ordenados, Por ejemplo, entre los números reales positivos no hay uno que sea el primero, y entre dos números racionales no negativos r y s, con $r < s$, siempre hay otro más, como por ejemplo $(r+s)/2$, de modo que no hay un elemento particular de este conjunto que sea el siguiente de r. En ambos caso se trata de conjuntos ordenados, pero no *bien* ordenados. Los conjuntos bien ordenados se presentan siguiendo un orden discreto, por saltos (no continuo), formando una sucesión que, en ocasiones, puede presentar elementos que no tienen un predecesor inmediato (elementos límite), como tendremos la ocasión de ver en relación al *segundo principio de formación* de los números ordinales.

La regla de ordenamiento es la siguiente: la pareja (m, n) tiene un rango más bajo en el orden que la pareja (m', n') si $m + n < m' + n'$, y cuando $m + n = m' + n'$, la designación del rango se rige por la magnitud de m y m'.

4) El conjunto de los números naturales con la siguiente ordenación:

$$0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...; 1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...$$

Aquí se piensa en la totalidad de los números naturales de tal modo que primero vienen los números pares en su orden natural y después los impares, también en su orden natural. En esta ordenación todo número par precede a todo número impar.

5) De nuevo el conjunto de los números naturales, aunque ordenado de otra manera:

$$2, 4, 6, ..., 2n, ...; 1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...; 0.$$

Aquí se considera un orden semejante al del ejemplo anterior salvo que el número 0 tiene la más alta jerarquía, es decir, es posterior a todos los demás.

6) El conjuntos de parejas ordenadas de números naturales, con la siguiente ordenación:

$$\begin{array}{llllllll}
(0, 0), & (0, 1), & (0, 2), & (0, 3), & ..., & (0, n), & (0, n + 1), & ... \\
(1, 0), & (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & ..., & (1, n), & (1, n + 1), & ... \\
(2, 0), & (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & ..., & (2, n), & (2, n + 1), & ... \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
(m, 0), & (m, 1), & (m, 2), & (m, 3), & ..., & (m, n), & (m, n + 1), & ... \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

En este caso la regla de ordenamiento es la siguiente: de dos parejas (m, n) y (m', n') la primera tiene rango más bajo si $m < m'$, y si $m = m'$, el rango se determina por la magnitud de n y n'.

El concepto de *número ordinal* aparece cuando se abstrae la naturaleza de los elementos de un conjunto bien ordenado, más no el orden en que éstos se presentan. La noción de *semejanza* entre conjuntos bien ordenados es la siguiente:

> Dos conjuntos bien ordenados A y B son *semejantes* si se les puede poner en correspondencia uno a uno de tal modo que la relación de rangos entre los elementos de A sea la misma que la relación de rangos entre los correspondientes elementos de B, en cuyo caso se escribe $A \cong B$.

Nótese que en la definición de semejanza se vuelve a utilizar la noción de *correspondencia* que ya había aparecido en relación al concepto de número cardinal. Nótese también que si

dos conjuntos son *semejantes* en el sentido recién descrito, entonces son equipotentes (tienen el mismo cardinal), pero no a la inversa.[18]

En general, la correspondencia por medio de la cual se prueba la semejanza sólo es posible de una manera, mientras que la equivalencia de conjuntos se puede probar de distintas maneras (en caso de que lo sean).

Por ejemplo, los conjuntos bien ordenados (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*) y (7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17) son *semejantes*; en la correspondencia *a* debe relacionarse con 7, *b* con 8, ... y *k* con 17, y ésta es la única manera de establecer su semejanza. De la misma manera, los conjuntos bien ordenados de los ejemplos **(1)**, **(2)** y **(3)** son *semejantes*. El *tipo de orden* o *número ordinal* de estos conjuntos se representa con el símbolo ω (omega).[19]

[Como se ve, el estudio de los números transfinitos llevó a invenciones maravillosas (¿hallazgos?), una de las cuales es el número omega. De él dice Cantor: "El número ω debe ser el primer número entero que sigue a todos los enteros finitos; es decir, se le debe declarar como superior a todos estos números."[20] Este número se pude definir como el límite de la sucesión 1, 2, 3, 4, etc. en el infinito, a condición de considerar este límite no como interior, sino como exterior a esta sucesión. Su existencia resulta de un acto intelectual que Cantor denomina "el segundo principio de formación". El primer principio es el siguiente: dado un número, añadir a éste una unidad para engendrar el siguiente número en la sucesión. Los números formados con este principio constituyen una sucesión, y entre dos de ellos siempre media una progresión finita. El segundo principio consiste en imaginar un nuevo número inmediatamente superior a todos los generados con el primer principio a partir de un número dado; una especie de *límite* de una sucesión.

El número ω no sólo es una especulación asombrosa, sino que ocupa un lugar importante en las matemáticas y la filosofía. Con su inclusión, la vaguedad y la indefinición del infinito y todas las imágenes borrosas implicadas en la sola mención de la palabra fueron superadas: la barrera del infinito actual se había rebasado, se había llegado más allá de él.]

Aritmética ordinal. Si dos conjuntos bien ordenados *A* y *B* con ordinales *a* y *b* se reúnen formando un nuevo conjunto bien ordenado *C* de modo que los elementos de cada uno de ellos conserven sus rangos entre sí, y a los elementos de *A* se les considera de menor rango

---

[18] Es decir, si $A \cong B$, entonces $A \sim B$, pero $A \sim B$ no implica que $A \cong B$, como veremos en los ejemplos **(8)** y **(9)**. Asimismo, si $A \cong B$ y $B \cong C$, entonces $A \cong C$ (la relación es *transitiva*).

[19] Esta letra es la última del alfabeto griego.

[20] La cita de Cantor no es textual; se trata de una paráfrasis de un pasaje de [Cantor 1883a], texto reproducido en Badiou et al., 1969, p. 50.

que los de B (es decir, se les considera anteriores a todos los elementos de B), entonces el número ordinal c de C se denomina *suma* de los números ordinales a y b, y se escribe

$$a + b = c$$

En general, $a + b$ y $b + a$ son sumas distintas cuando alguno de los sumandos A ó B es infinito. Veamos algunos ejemplos.

7) Los conjuntos bien ordenados

$$0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n + 1, ...$$

y

$$1, 2, 3, 4, ..., n, n + 1, ..., \quad .$$

son semejantes, aunque el segundo es sólo una parte del primero. La semejanza se obtiene con la correspondencia $n \mapsto n + 1$ del primero en el segundo. A ambos les corresponde el ordinal ω.

8) Los conjuntos bien ordenados

$$0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n + 1, ...$$

y

$$1, 2, 3, 4, ..., n, n + 1, ...; 0$$

no son semejantes, a pesar de que tiene los mismos elementos: el segundo de ellos tiene, según la relación de rangos, un último elemento, mientras que el primero no lo tiene. Al segundo conjunto le corresponde el ordinal $\omega + 1$.

9) Los conjuntos

$$1, 2, 3, 4, ..., n, n + 1, ...; 0$$

y

$$2, 3, 4, ..., n, n + 1, ...; 0, 1$$

no son semejantes, a pesar de que tiene los mismos elementos: el segundo de ellos tiene, según la relación de rangos, dos últimos elementos, mientras que el primero sólo tiene uno. Al segundo conjunto le corresponde el ordinal $\omega + 2$.

10) Los conjuntos bien ordenados

$$1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...; 0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...$$

y

$$0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...; 1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...$$

son semejantes, a pesar de que los números aparecen en distinto orden. A ambos conjuntos les corresponde el número ordinal $\omega + \omega$ que más adelante identificaremos como $\omega \cdot 2$.

11) Al conjunto

$$2, 4, 6, ..., 2n, ...; 1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...; 0$$

le corresponde el ordinal $\omega + \omega + 1$, pues tiene un último elemento.

Con base en los ejemplos **(8)-(11)** el lector se habrá dado cuenta de cómo se pueden formar conjuntos bien ordenados que tenga ordinales de la forma $(\omega + \omega + ... + \omega)$, $\omega + n$ y $(\omega + \omega + ... + \omega) + n$.

12) $1 + \omega = \omega$, mientras que $\omega + 1 \neq \omega$, por lo que la ley conmutativa $a + b = b + a$ no se cumple en general en el caso de la aritmética ordinal transfinita. En efecto, el ordinal del conjunto bien ordenado

$$1, 2, 3, 4, ..., n, n + 1, ...$$

es ω, al igual que el ordinal del conjunto

$$0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n + 1, ...$$

No obstante, este último conjunto resulta de reunir los conjuntos (0) y (1, 2, ... n, ...) en uno sólo, por lo que su ordinal también es $1 + \omega$, que es la suma de ordinales de su "progenie".

Si cada elemento de un conjunto bien ordenado B de tipo b se substituye por un conjunto bien ordenado de tipo a, se formará un conjunto bien ordenado C. El número ordinal c de C se denomina *producto* de los números ordinales a y b, y se escribe

$$a \cdot b = c$$

En este caso el orden en que se presentan los factores A y B es importante. Al primero de ellos se le llama *multiplicando* y al segundo *multiplicador*. Aquí también $a \cdot b$ es en general distinto de $b \cdot a$. Sin embargo, la asociatividad sigue siendo válida:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Veamos algunos ejemplos.

13) Sea $a = \omega$ y $b = 2$. Aquí $B = (1, 2)$. Si en lugar de "1" sustituimos un conjunto de tipo ω, digamos (1, 2, 3, 4, ...) y en lugar de "2" sustituimos otro conjunto de tipo ω, digamos (– 1, – 2, – 3, – 4, ...), se obtiene el conjunto bien ordenado

$$1, 2, 3, 4, ...; -1, -2, -3, -4, ...$$

de tipo $\omega + \omega$, que denotamos con $\omega \cdot 2$.

14) Sean $a = 2$, $b = \omega$, a la inversa que en el ejemplo anterior. Aquí $B = (1, 2, 3, 4, ..., n, ..)$. Si en lugar de "1" sustituimos un conjunto de tipo 2, digamos $(1, -1)$, en lugar de "2" un conjunto de tipo 2, digamos $(2, -2)$, y, en general, en lugar de "n" un conjunto de tipo de tipo 2, digamos $(n, -n)$, se obtiene un conjunto bien ordenado

$$1, -1, 2, -2, ..., n, -n, ...$$

de tipo ω. Por tanto, $2 \cdot \omega = \omega$, mientras que $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$, por lo que la ley conmutativa para el producto no se cumple: $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$.

Al conjunto bien ordenado del ejemplo (6) le corresponde el número ordinal $\omega \cdot \omega$, que también se escribe en forma exponencial como ω^2, notación que extiende la de la aritmética usual.

Como sabemos, ω es el ordinal transfinito más pequeño, y su potencia es $\aleph_0$. No obstante, ω no es el único ordinal correspondiente a dicho número cardinal. Si denotamos con $p(a)$ la potencia correspondiente a un número ordinal a, es claro que

$$\aleph_0 = p(\omega) = p(\omega + 1) ... = p(\omega + n) ... = p(\omega \cdot 2) ... = p(\omega \cdot n) ... = p(\omega^2) ... = p(\omega^n) ...$$

y se puede demostrar (aunque aquí no lo haremos) que $\aleph_0$ es la potencia correspondiente a todos los números de la forma

$$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, ..., \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}, ... \quad (1)$$

Cantor denominó *segunda clase de números* al conjunto de todos los números ordinales correspondientes a la potencia $\aleph_0$. Los números de la segunda clase, puestos en su orden natural, constituyen un conjunto bien ordenado cuyo tipo denotó Cantor con la letra Ω. La potencia de Ω no es $\aleph_0$, sino $\aleph_1$ como lo demuestra en [Cantor 1883a].

Como se ve, mientras que los números ordinales finitos obedecen a las mismas leyes que los números cardinales finitos, razón por la cual no se les otorgó la debida importancia antes de Cantor, en el transfinito su diferencia se revela con toda claridad.

Los siguientes son algunos ejemplos de igualdades curiosas a la luz de la aritmética finita. Para todo $n \in N$:

$$n + \omega = \omega, n \cdot \omega = \omega \text{ y } (\omega + n) \cdot \omega = \omega^2$$

Los números ordinales forman una sucesión que tiene muchas propiedades en común con la de los números naturales. Por ejemplo, cualquier conjunto de números ordinales está bien ordenado por la relación de precedencia. Debido a ello los matemáticos pudieron extender el *principio de inducción*, extraído del dominio de los números naturales, al transfinito, y

efectuar demostraciones por inducción sobre segmentos arbitrarios de números ordinales. De hecho, tras los trabajos de Cantor las *pruebas por inducción* y las *definiciones por recursión* se pudieron llevar a cualquier conjunto bien ordenado.[21]

Con esto damos por terminada la presentación de algunos temas de la teoría de conjuntos en la que escasamente hemos señalado algunos aspectos de la misma. Debemos decir que el extracto es sumamente frágil, sin demostraciones, y que en él se han soslayado temas fundamentales como el de la aritmética cardinal, la relación entre los números ordinales y los números cardinales, el axioma de elección y la axiomatización de la teoría, aunque de estos dos últimos temas tendremos la oportunidad de hablar en el texto principal y en el siguiente apéndice.

---

[21] El principio de *inducción transfinita* se enuncia en forma análoga al principio de inducción fuerte para los números naturales, y es el siguiente (donde $P(x)$ significa "el elemento x tiene la propiedad P"):

Si $P(x_0)$, donde x_0 es el primer elemento de un conjunto bien ordenado X, y si para todo z en X, $P(y)$ para todo $y < z$ implica $P(z)$, entonces $P(x)$ para todo x en X.

En 1936 Gerhard Gentzen (1909-1945) probó la consistencia de los axiomas de Peano para la aritmética mediante un argumento que se sirve de la inducción transfinita sobre los números ordinales hasta el número ε_0, caracterizado por ser el límite de la sucesión (1) de la página anterior. Esto revista gran importancia para el tema que nos ocupa, sobre todo si se le examina desde la perspectiva del segundo teorema de incompletud de Gödel, o teorema de la consistencia, que veremos en el capítulo 4.

Apéndice 8
La teoría axiomática de Zermelo-fraenkel

Cantor da en su obra un tratamiento enteramente intuitivo e informal a los conjuntos, manejándolos como objetos del pensamiento ordinario y dejándose llevar por el sentido común en sus argumentos, sin detenerse a examinar sus principios. De hecho, juzga que la noción básica de la teoría, la de conjunto o agregado (*Menge*), no es susceptible de un análisis matemático exhaustivo. El tratado *Beirtrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehere (I)* (Contribuciones al fundamento de la teoría de conjuntos (I)) de 1895,[1] quizá la mejor presentación que Cantor hiciera de su teoría, comienza con la siguiente "definición", ya expuesta en la sección **2.6** y que repetimos por comodidad: «Por un *conjunto* [Menge] hemos de entender cualquier reunión en un todo [*Zusammenfassung zu einem Ganzen*] *M* de objetos definidos y distintos de nuestra intuición o nuestro pensamiento.».[2] Para todo fin práctico, la definición anterior es un adorno inoperante, y no ocupa ningún lugar en la teoría. En esto la situación es enteramente análoga a la de las definiciones euclidianas de *punto*, *línea*, etc. que no sirven de nada en el despliegue de la geometría y que, al parecer, fueron puestas con el único propósito de sugerir qué es lo que se pretende significar con tales términos en el discurso. Además, un atento examen de la definición deja ver que en ella se hace referencia de manera implícita a una facultad especial —al entendimiento, que realiza el acto *reunir los objetos en un todo*— que se debe evitar cuando se busca incorporar la noción a una teoría formal. Por tales motivos la definición de Cantor no pudo conservar su forma original, y fue reemplazada por un principio más abstracto conocido como *principio de comprensión*.[3] Este principio apareció por primera vez en el tratado *Grudegesetze der Arithmetik* vol. 1 de Gottlob Frege (1848-1925), publicado en 1893, y fue utilizado con algunas modificaciones por Russell y Whitehead (1861-1947) en *Principia Mathematica*.[4] En su teoría, Zermelo presenta este principio con algunas restricciones dándole el nombre de axioma *de separación*.

---

[1] Cantor 1895.

[2] Cantor 1955, p. 85.

[3] El principio de comprensión establece que toda propiedad (*predicado* en la lógica moderna) determina un conjunto formado por todos los términos que la poseen. En un primer intento de simbolización podemos escribir lo siguiente: $P \leftrightarrow \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } P\}$. Esta idea corresponde a la noción de *clase* que utilizan Frege y Russell, y a la idea de *extensión de los conceptos* de la lógica tradicional.

[4] En *Principia Mathematica* se define *clase* como «todos los objetos que satisfacen una función proposicional.» [Russell y Whitehead, 1910, p. 23]. Para formar una clase ya no se trata de reunir objetos en el entendimiento, sino de reunir los valores a de la variable x que figura en una función proposicional $P(x)$ para los que la proposición $P(a)$ es verdadera. ¿Con qué clases se cuenta? eso depende del tipo de funciones proposicionales que se consideren admisibles. En gran medida, *Principia Mathematica* es un examen crítico de las reglas que hay que imponer a la formación de funciones proposicionales a fin de cerrarle el paso a clases como la de la antinomia de Russell.

Aunque Zermelo ya se había apoyado en algunos axiomas en la demostración del teorema del buen orden (como, por ejemplo, el de elección), no fue sino hasta 1908 que presentó una lista de axiomas para la teoría de conjuntos. Para entonces la disciplina ya había alcanzado la madurez suficiente como para reconocer en ella un reducido número de principios que servirían como fundamento para su reconstrucción axiomática, muy en el espíritu que Hilbert manifestara años más tarde en la conferencia *Axiomatisches Denken* (El pensamiento axiomático) ante la Sociedad Matemática Suiza.[5] En 1908 Zermelo publicó un escrito titulado «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I» (Investigaciones en torno a los fundamentos de la teoría de conjuntos I) en el que propuso sus célebres axiomas para la teoría de conjuntos. El artículo inicia con las siguientes palabras:

> La teoría de conjuntos es una rama de las matemáticas cuya tarea es investigar las nociones fundamentales de "número", "orden" y "función" tomándolas en su forma primitiva y más simple, y desarrollar a partir de ellas los fundamentos lógicos de toda la aritmética y todo el análisis; de este modo se constituye en una componente indispensable de las ciencia matemática. No obstante, en la actualidad la existencia misma de esta disciplina parece estar amenazada por ciertas contradicciones, o "antinomias", que se pueden derivar de sus principios —que, al parecer, gobiernan necesariamente nuestro pensamiento— y para las que no se ha encontrado una solución enteramente satisfactoria. En particular, en vista de la "antinomia de Russell" del conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos, hoy en día parece inaceptable seguir asignando a cualquier noción lógicamente definible un conjunto, o clase, como su extensión. La definición original de Cantor de un conjunto como "una reunión en un todo de objetos definidos y distintos de nuestra intuición o nuestro pensamiento" requiere, por lo tanto, de algunas restricciones; al presente, la definición dada por Cantor no se ha podido reemplazar con éxito por otra igual de simple y que no dé lugar a tales dudas. Bajo tales circunstancias, en este momento no tenemos ninguna alternativa que no sea la de proceder en la dirección contraria y, tomando como punto de partida la teoría de conjuntos dada históricamente, buscar los principios requeridos para establecer las bases de esta disciplina matemática. Al resolver el problema debemos, por una parte, restringir los principios lo suficiente como para excluir todas las contradicciones y, por la otra, tomarlos lo suficientemente amplios como para retener todo lo que hay de valor en la teoría.
>
> En este trabajo me propongo mostrar cómo la teoría creada por Cantor y Dedekind se puede reducir, en su totalidad, a unas cuantas definiciones y principios, o axiomas, que parecen ser independientes entre sí. La ulterior y más filosófica pregunta por el origen y la validez de estos principios no será examinada aquí. Ni siquiera he podido demostrar rigurosamente que mis axiomas son consistentes, aunque esto es algo esencial; en vez de ello, me limito a señalar aquí y allá que las antinomias

[5] De esta conferencia hemos reproducido algunos pasajes en la sección 1.5.3. Una traducción al español se encuentra en Hilbert 1993, pp. 23-36.

> descubiertas hasta ahora desaparecen de una vez por todas si se adoptan como base los principios propuestos. No obstante, espero haber hecho alguna labor preparatoria para subsiguientes investigaciones en torno a problemas de tal profundidad.[6]

Este pasaje merece de nuestra parte algunos comentarios que consideramos relevantes.

1) El trabajo de Zermelo se adhiere directamente a la empresa axiomática de Hilbert, de modo que su propósito no es el de establecer un conjunto de principios verdaderos, indemostrables y mejor conocidos que aquello que se infiere a partir de ellos, y que habrían de sustentar la verdad de la teoría; más bien, se trata de principios que permiten reconstruir la teoría en tanto que sistema hipotético-deductivo para así resaltar su estructura lógica.

2) La teoría axiomática es a su vez una definición implícita de las nociones de *conjunto* y *pertenencia a un conjunto*, que ya no dependen de su contenido intuitivo. En esto la situación sería enteramente análoga a la de las nociones y relaciones geométricas en el caso de los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, ampliamente comentada en la sección **1.3.1**, y la axiomatización caería dentro del marco conceptual señalado en la sección **1.5.3**.

3) Si bien Zermelo está consciente de la amenaza que representan las antinomias de la teoría de conjuntos, su propósito al axiomatizar la teoría no es tanto responder al peligro que éstas representan, como un intento por preservar la teoría matemática de conjuntos, evitando a su vez las paradojas que nos obligan a restringir la noción de conjunto. En otras palabras, su idea es desarrollar una teoría matemática de las nociones de *número* y *función* que sea satisfactoria para los matemáticos —a esto es a lo que se refiere cuando habla de «retener todo lo que hay de valor en la teoría»— y que permita reconstruir el edificio entero de la matemática clásica, dando así una base segura a esta ciencia. Esto no es lo mismo que desarrollar una teoría general de conjuntos o clases sobre la que se fundamentaría la noción de número, como la impulsada por Frege, Russell y Whitehead.[7] No se trata, pues, de reducir la teoría a otra más vasta y profunda, sino de reconstruirla de modo que el espíritu matemático se sienta seguro en ella.

Como veremos, en la teoría de Zermelo los conjuntos no se consideran como engendrados por propiedades (*predicados*), sino que, conforme al espíritu de la nueva axiomática, se les postula directamente como entidades primitivas de las que se exige satisfagan ciertos axiomas que enuncian sus características. Por ejemplo, uno de sus axiomas establece que a cada objeto corresponde un conjunto cuyo único elemento es dicho objeto, otro dice que

---

[6] Zermelo, 1908a. Tomado de Heijenoorth 1967, pp. 201-202.

[7] Zermelo no afirma que la noción de *número* se reduce a la de conjunto, como lo hacen Frege, Russell y Whitehead, sino que en la teoría de conjuntos se puede desarrollar satisfactoriamente la aritmética en tanto que teoría matemática, cosa muy distinta.

los subconjuntos de un conjunto dado forman a su vez un conjunto (*existencia* del conjunto potencia), etc. Lo que realmente importa es que los postulados garanticen la existencia, en el sistema abstracto, de todos los conjuntos que son necesarios en la práctica matemática, aun a costa de no responder a la pregunta de si la noción de conjunto ahí propuesta corresponde o no a la noción intuitiva.

Así, en la teoría de Zermelo la noción de conjunto permanece indefinida, y lo único que se sabe de los «conjuntos» es lo que "dicen" los axiomas, que describen su comportamiento y la forma en que se les ha de tratar matemáticamente. La exposición axiomática comienza con las siguientes palabras:[8]

> 1. La teoría de conjuntos se ocupa de un *dominio* B de individuos a los que llamaremos simplemente *objetos* y entre los que se hallan los *conjuntos*. Si dos símbolos a y b denotan al mismo objeto, escribimos $a = b$, y de lo contrario $a \neq b$. Decimos que un objeto a "existe" si pertenece al dominio B; de la misma manera, dada una clase A de objetos, decimos que "existe un objeto en la clase A" si el dominio B contiene un objeto de esta clase.
> 2. Entre los objetos del dominio B prevalecen ciertas *relaciones fundamentales* de la forma $a \in b$. Si para dos objetos a y b se cumple la relación $a \in b$, decimos que "a es un elemento de b", o que "b contiene al elemento a". Salvo por una sola excepción (axioma II), se dice que un objeto b es un *conjunto* si y sólo si contiene otro objeto, a, como elemento.
> 3. Si todo elemento de un conjunto M también es elemento de un conjunto N, de modo que de $x \in M$ siempre se sigue que $x \in N$, decimos que M es un *subconjunto* de N y escribimos $M \subseteq N$. Siempre sucede que $M \subseteq M$, y de $M \subseteq N$ y $N \subseteq R$ siempre se sigue que $M \subseteq R$. Dos conjuntos M y N se dice que son *ajenos entre sí* si no tienen ningún elemento en común, o si ningún elemento de M es elemento de N.
> 4. Una cuestión o aserción C se dice que es *definida* cuando las relaciones fundamentales del dominio determinan, sin arbitrariedad alguna, si ésta se cumple o no por medio de los axiomas y las leyes universalmente válidas de la lógica. De igual forma, una "función proposicional" [Klassenaussage] $P(x)$, en la que el término variable x varía sobre todos los individuos de una clase A, se dice que es definida si lo es *para cada individuo particular* x de la clase A. Así, la cuestión de si $a \in b$ o no, siempre es definida, al igual que la cuestión de si $M \subseteq N$ o no.[9]

Los axiomas de Zermelo son siete:

> **I.** (Axioma de extensionalidad) Si todo elemento de un conjunto M es también un elemento de un conjunto N, y viceversa, y, por lo tanto, $M \subseteq N$ y $N \subseteq M$, entonces $M = N$. En breve, todo conjunto está determinado por sus elementos.

---

[8] Hemos modificado la notación para ajustarla al uso actual.

[9] Zermelo, 1908a. La cita se tomó de Heijenoort, 1967, p.201.

II. (Axioma de los conjuntos elementales) Existe un conjunto (impropio), el *conjunto nulo*,[10] $\varnothing$, que no contiene ningún elemento. Si a es un objeto del dominio, existe un conjunto $\{a\}$ que contiene a a y sólo a él como elemento; si a y b son dos objetos del dominio, siempre existe un conjunto $\{a, b\}$ que contiene como elementos a a y b y a ningún otro objeto x distinto de ellos.[11]

III. (Axioma de separación) Si una función proposicional $P(x)$ es definida para los elementos de un conjunto M, entonces M tiene un subconjunto M_p que contiene como elementos precisamente a aquellos elementos de M para los que $P(x)$ es verdadera.

IV. (Axioma del conjunto potencia) A todo conjunto T le corresponde un conjunto PT, el *conjunto potencia de* T, que contiene como elementos precisamente a todos los subconjuntos de T.

V. (Axioma de la unión) A cada conjunto T le corresponde un conjunto $\cup T$, la *unión de* T, que contiene como elementos a los elementos de los elementos de T.

VI. (Axioma de elección) Si T es un conjunto cuyos elementos son conjuntos diferentes de $\varnothing$ y mutuamente ajenos entre sí, la unión $\cup T$ incluye al menos un subconjunto S que tiene un único elemento en común con cada elemento de T.

También podemos expresar el axioma diciendo que siempre es posible *elegir* un único elemento de cada conjunto M, N, ... de T y combinar todos estos elementos en un conjunto S.

VII. (Axioma del conjunto infinito) Existe en el dominio al menos un conjunto Z que contiene al conjunto vacío como elemento y que está constituido de modo que a cada uno de sus elementos a corresponde un elemento de la forma $\{a\}$, es decir, que con cada uno de sus elementos a, también contiene como elemento al conjunto $\{a\}$.[12]

El resto del artículo lo dedica Zermelo a discutir en detalle la equipotencia de conjuntos, mostrando que la teoría de los números cardinales de Cantor se sigue de los siete axiomas precedentes.

La elaboración de una base axiomática para la teoría de los conjuntos de Cantor no concluyó con el trabajo de Zermelo. No obstante, antes de considerar algunos hechos sucedidos en el terreno de la exposición axiomática de la teoría, queremos señalar algunos aspectos que consideramos relevantes de la teoría axiomática de Zermelo, muchos de los cuales se relacionan directamente con el desarrollo ulterior de la lógica matemática y con la

---

[10] En español también decimos *conjunto vacío*.

[11] Antes de enunciar el axioma, Zermelo hace la observación de que el conjunto que sólo contiene a los elementos a, b, c, ..., r se suele denotar con $\{a, b, c, ..., r\}$.

[12] Los axiomas fueron tomados de Heijenoort, 1967, pp. 201-204 con algunas modificaciones, sobre todo en la notación.

teoría de la demostración, una disciplina creada por Hilbert a fin de investigar el problema de la consistencia de las teorías axiomáticas. La numeración de los comentarios continúa a partir de los precedentes.

4) Zermelo expone su teoría en el marco del lenguaje ordinario, antes que en el más preciso lenguaje de la lógica simbólica ya conocido en aquél momento. En esto su presentación se asemeja a la que Hilbert hiciera de la geometría nueve años atrás. Una consecuencia de ello es que la noción de *propiedad definida* no es clara, pues no hay un criterio para decidir si una propiedad arbitraria es o no definida; es más, en el contexto del lenguaje natural sería difícil encontrar un criterio para determinar cuáles frases (aserciones) expresan propiedades de los objetos del dominio B y cuáles no. A esto habremos de volver en el inciso (7).

5) El axioma **III** es más débil que el principio cantoriano que afirma que toda propiedad concebible da lugar a un conjunto, y también que el principio de comprensión. Zermelo simplemente afirma que toda propiedad definida "adecuadamente" *separa* un conjunto M_P a partir de un conjunto dado M, de modo que sus elementos ya están dados con anterioridad. De este modo evita de propósito la construcción de conjuntos como el de Russell, cuyos elementos se definen en términos del conjunto mismo. En particular, con base en la idea de que la propiedad $x \notin x$ es definida, Zermelo prueba que el dominio B no es un conjunto.

6) El axioma **VII** de Zermelo garantiza la existencia en B de un conjunto infinito Z_0 con elementos $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, etc. que no se puede alcanzar con los otros axiomas a partir del conjunto vacío, único objeto cuya existencia está asegurada incondicionalmente por los demás postulados. Este conjunto Z_0 sirve como representación del conjunto 0, 1, 2, ... de los número naturales en la teoría axiomática.

7) El sistema de Zermelo fue la base del trabajo posterior en toda la teoría axiomática de conjuntos, y con el paso del tiempo experimentó diversos cambios y mejoras hasta alcanzar un cierto estándar de rigor muy distinto al primigenio. En este sentido, uno de los defectos de la presentación original era que la noción de *propiedad definida* era más bien vaga e imprecisa, por lo que en 1922 Toralf Skolem (1887-1963) propuso fijar la noción reemplazando el lenguaje ordinario con un lenguaje simbólico apropiado, e identificar las *propiedades definidas* con las fórmulas que se pudieran construir a partir de las formas básicas $a \in b$ y $a = b$ mediante las operaciones lógicas de negación (*no*, $\neg$), conjunción (*y*, $\wedge$), disyunción (*o*, $\vee$), implicación ($\rightarrow$), equivalencia ($\leftrightarrow$), cuantificación universal (*para todo* x, $\forall x$) y cuantificación existencial (*existe* x, $\exists x$). En otras palabras, las *propiedades definidas* serían aquellas propiedades de los conjuntos que se pudieran expresar mediante una *fórmula* obtenida a partir de *fórmulas básicas* (de la forma $a \in b$ ó a

$= b$) mediante la aplicación reiterada de los *operadores lógicos* ¬, ∧, ∨, →, ↔, ∀ y ∃. Esto implicaba, entre otras cosas, la necesidad de recurrir a un lenguaje formal en la teoría. Esto nos lleva al último tema que habremos de abordar en este apéndice.

La necesidad ya señalada de precisar la noción de *propiedad definida* implicó la introducción de lenguajes formales regidos por reglas de construcción sintáctica muy estrictas. Tales lenguajes ya se conocían desde principios de siglo, siendo quizá el más adecuado para tales fines el de Russell y Whitehead en *Principia Mathematica*. Entre 1922 y 1951 fueron exploradas diversas extensiones, modificaciones y alternativas del sistema de Zermelo tomando en consideración el uso de tales lenguajes. Los creadores de estas teorías fueron Abraham Fraenkel (1891-1965), John von Neumann (1903-1957), Paul Bernays (1888), Kurt Gödel (1906-1978) y Willard Van Orman Quine (1908). De todas ellas, la más utilizada en la práctica matemática es la *Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel*, o **ZF**, que resulta de la teoría de Zermelo mediante la modificación y adición de algunos axiomas, y de la introducción de un lenguaje más preciso. En lo que sigue sólo nos ocuparemos de esta teoría, exponiendo sus axiomas en su forma moderna.

A diferencia de la manera usual de presentar una teoría axiomática en matemáticas, en la que sólo se enumeran los términos indefinidos y los axiomas, la más rigurosa exposición formal requiere ademas explicitar los símbolos con que se construye el lenguaje, y las reglas con que se componen los enunciados de la teoría. Como se puede ver en el capítulo **3**, por estricto que parezca este modo de proceder, resulta insuficiente ante los requisitos que Hilbert impone a las pruebas de consistencia, según los cuales también es menester especificar los axiomas lógicos y las reglas de inferencia mediante las cuales se derivan los teoremas de la teoría.

Símbolos.- Los símbolos se clasifican en varias categorías, según su función.

Constantes: ∅ (conjunto vacío).

Variables: $x_0, y_0, z_0, \ldots; x_1, y_1, z_1, \ldots; \ldots; x_n, y_n, z_n, \ldots; \ldots$

Relaciones: ∈ (pertenencia)

Lógicos: ¬ (no), ∧ (y), ∨ (o), → (implica), ↔ (equivalente), ∀ (para todo), ∃ (existe), = (igual)

Puntuación:) [paréntesis derecho], ([paréntesis izquierdo].

Fórmulas.- Las reglas para construir fórmulas son muy simples. Se comienza por definir lo que es una fórmula *básica* (o *atómica*) y después una fórmula *compuesta* (o *molecular*).

Básicas. Si a y b son el símbolo $\varnothing$ o alguna variable, entonces $a \in b$ y $a = b$ son *fórmulas básicas* o *atómicas*.

Compuestas. Si ϕ y ψ son fórmulas y x es una variable, entonces son fórmulas (*compuestas*, o *moleculares*).

$$\neg\phi,\ (\phi \wedge \psi),\ (\phi \vee \psi),\ (\phi \rightarrow \psi),\ (\phi \leftrightarrow \psi),\ \forall x\phi \text{ y } \exists x\phi$$

Llamemos L_{ZF} a este lenguaje. Una propiedad de conjuntos es *definida* si existe una fórmula de L_{ZF} que la define o expresa, es decir, si la propiedad se identifica con alguna fórmula construible en este lenguaje.

Aunque los medios expresivos de L_{ZF} parecen muy limitados, su poder es suficiente como para expresar y desarrollar en él todas las nociones y todas las demostraciones importantes de la teoría de conjuntos, e incluso de la matemática clásica. Por ejemplo, la noción de *subconjunto* no es necesario representarla mediante un símbolo especial "$\subseteq$", pues se le puede definir como sigue:

$$x \subseteq y \equiv_{\text{def}} \forall z\ (z \in x \rightarrow z \in y)$$

de modo que la expresión "$x \subseteq y$" siempre se puede reemplazar por la expresión a la derecha, que sí forma parte del lenguaje. Así, "$x \subseteq y$" no es sino una abreviatura de una fórmula del lenguaje y siempre se le puede eliminar en favor de esta última, un tanto más compleja en su escritura. De la misma manera se pueden introducir símbolos para la unión, la intersección o la diferencia de dos conjuntos, o para el conjunto potencia, los cuales son en cierto sentido superfluos, pues siempre se pueden reemplazar por fórmulas en las que las únicas relaciones que figuran son la pertenencia "$\in$" y la igualdad "=" que, por cierto, también se puede definir como sigue:

$$x = y \equiv_{\text{def}} \forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

(dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos).[13] Podemos ahora escribir los axiomas de Zermelo en este lenguaje como sigue:

1. (Axioma de extensionalidad) $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y)$

2. (Axiomas de los conjuntos elementales)
a. $\forall x \neg (x \in \varnothing)$ (conjunto vacío)
b. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z = x)$ (conjunto cuyo único elemento es x)
c. $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$ (conjunto cuyos únicos elementos son x e y)

[13] Si bien el símbolo "=" se puede introducir como un símbolo definido, se le suele incluir entre los símbolos primitivos en virtud de que, en general, la relación de igualdad se considera básica o inicial.

3. (Axioma de separación) $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge P(z))$
donde $P(z)$ es una fórmula de L (es decir, hay un axioma para cada fórmula P)

4. (Axioma del conjunto potencia) $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in x))$

5. (Axioma de la unión) $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(z \in w \wedge w \in x))$

Para escribir en forma legible el axioma de elección es necesario introducir algunos símbolos especiales, es decir, algunas abreviaturas.

Denotamos con $\cup a$ al conjunto unión de a (cuya existencia está asegurada por el axioma 5), de modo que $b \in \cup a \equiv_{def} \exists x(x \in a \wedge b \in x)$; asimismo, denotamos con $a \cap b$ al conjunto intersección de a con b, de modo que $c \in (a \cap b) \equiv_{def} (c \in a \wedge c \in b)$. La existencia de este último conjunto está asegurada por los axiomas **2.c**, **5** y **3** tomando a $(z \in a \wedge z \in b)$ como la fórmula $P(z)$.

6. (Axioma de elección)
$\forall x((\neg(x = \varnothing) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \neg(y = \varnothing)) \wedge$
$\forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x \wedge \neg(y = z)) \rightarrow y \cap z = \varnothing)) \rightarrow$
$(\exists z(z \subseteq \cup x \wedge \forall w(w \in x \rightarrow \neg(z \cap w = \varnothing) \wedge$
$\forall u \forall v(u \in (z \cap w) \wedge v \in (z \cap w) \rightarrow u = v))))).$

Aunque complicada, esta fórmula expresa exactamente la propiedad enunciada por el axioma de elección. Los dos primero renglones establecen las condiciones generales: x es un conjunto no vacío cuyos elementos son conjuntos no vacíos y ajenos entre sí; el tercer renglón asienta que la unión $\cup x$ incluye al menos un subconjunto z que tiene un único elemento en común con cada elemento de x, mientras que el cuarto renglón señala que dicho elemento es único.

Para escribir en forma inteligible el axioma del conjunto infinito es necesario introducir un símbolo especial para el conjunto cuyo único elemento es x (cuya existencia está asegurada por el axioma **2.b**); denotemos con $\{x\}$ a este conjunto.

7. (Axioma del conjunto infinito) $\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \{y\} \in x)$.

Este axioma garantiza la existencia de un conjunto con una infinidad de elementos, pues el conjunto cuya existencia se afirma contiene a la sucesión (infinita) de conjuntos disjuntos

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots$$

Esta teoria axiomática se representa con las siglas **ZE** o **ZC** por "Zermelo con el axioma de elección".[14]

En 1922 Skolem y Fraenkel sugirieron sendos axiomas que permitian probar que ciertas colecciones de conjuntos como, por ejemplo, $\{\omega, \wp(\omega), \wp(\wp(\omega)), ..., \wp^n(\omega), ...\}$,[15] eran a su vez conjuntos, cosa que no se podía lograr en **ZC**. En 1928 von Neumann presentó una versión modificada de estos axiomas, conocida como *axioma del reemplazo*, la cual dice escuetamente que si a cada elemento de un subconjunto de un conjunto dado se encuentra asociado un conjunto, entonces la colección de los conjuntos asociados es ella misma un conjunto. Volviendo a nuestro ejemplo, si tomamos como conjunto inicial a ω, el conjunto de los ordinales finitos, y como conjunto asociado a cada $n \in \omega$ al conjunto $\wp^n(\omega)$, entonces la colección $\omega_1 = \{\omega, \wp(\omega), \wp(\wp(\omega)), ..., \wp^n(\omega), ...\}$ es un conjunto.

8. (Axioma del reemplazo)
$\forall x \forall y \forall z(x \in a \wedge R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge R(x, y))$

La hipótesis del axioma pide que la relación R sea una función (es decir, que con cada elemento de a esté asociado a lo más un conjunto). El nombre del axioma obedece a la siguiente idea que se encuentra detrás de él: si se tiene una fórmula $R(x, y)$ con la propiedad de que para cada x en un conjunto a hay a lo más una y tal que $R(x, y)$, entonces podemos decir que tales "y" forman un conjunto b y "reemplazar" a a con b. Este axioma es más poderoso que el axioma de separación (axioma **3**), que se sigue de él.

La teoría axiomática constituida por los axiomas **1-8** se conoce como *teoría de los conjuntos de Zermelo-Fraenkel con axioma de elección*, y se suele denotar con las siglas **ZFE** o **ZFC**. Si se omite el axioma **6** (axioma de elección), la teoría resultante se denomina *teoría axiomática de conjunto de Zermelo-Fraenkel*, y se escribe **ZF**.

Comentario final. Hemos apenas señalado algunos aspectos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel que, junto con los axiomas de Peano para la aritmética elemental, constituye una de las teorías axiomáticas más favorecidas de la matemática moderna. A pesar de su brevedad, esperamos que esta presentación sea de utilidad, sobre todo tomando en cuenta las siguientes observaciones.

1) La doble exposición de la teoría axiomática permite contrastar lo que es una presentación informal, a la manera de la geometría de Hilbert, de una presentación rigurosa, que incluye

14 **ZC** se debe a que en inglés el axioma de elección se conoce como "axiom of choice". Dado el uso frecuente de estas siglas para referirse a la teoría, a menudo nos referiremos a ella siguiendo esta costumbre.
15 $\wp^n(\omega)$ significa $\wp(\wp(... \wp(\omega)...))$ donde la operación de tomar el conjunto potencia se reitera n veces.

la introducción de un lenguaje formal definido con todo rigor. Este es un paso importante en el proyecto de Hilbert para fundamentar la matemática y un elemento clave en la demostración de los teoremas de Gödel, como se puede ver en el capítulo 3.

i2) Como ya lo hemos señalado, **ZFC** es suficientemente poderosa como para reconstruir en ella el edificio entero de la matemática clásica. En particular, es posible desarrollar en su interior la aritmética recursiva, que podemos distinguir como parte de la aritmética constructiva y en cuyo interior Gödel construye sus argumentos. Esto hace que el sistema **ZF** esté sujeto a las salvedades que imponen los teoremas limitativos de Gödel.

3) Más adelante ofreceremos una demostración informal de los teoremas de Gödel que comprenderá un sistema axiomático formal **AP** un tanto más débil que **ZF**. No obstante, dado que todo teorema demostrable en **AP** se puede *traducir* en una fórmula demostrable en **ZF**, las limitaciones impuestas al primero también son imputables al segundo.

Como veremos, para lograr la prueba de Gödel es necesario contar con una descripción más precisa el sistema axiomático, especificando las reglas de inferencia y los principios (axiomas) lógicos que se aceptan como válidos en la teoría. Este paso, que no dimos en la presentación que acabamos de hacer de **ZF**, es irrelevante cuando se trabaja en el contexto de la matemática ordinaria.[16] De hecho, ningún matemático activo desarrolla su trabajo teórico de esa manera, y si lo hace es porque su interés se centra en la teoría misma, no en los objetos que trata de conocer a través de ella. En este sentido, la única razón para proceder con extremo rigor es porque el objeto de estudio son los recursos demostrativos de la teoría. Por ejemplo, un estudio de tal naturaleza en el campo de la aritmética no tendría como propósito conocer las propiedades de los números, sino los procesos mediante los cuales se demuestran los teoremas que enuncian la propiedades de los números, algo que cae dentro del campo de la lógica, no de la aritmética (o, por lo menos, eso es lo que uno tendería a pensar antes de estudiar a Gödel). Algo semejante podemos decir de la óptica oftálmica, que no se ocupa de los objetos que podemos conocer mediante la vista, sino del proceso de visión en el ojo.

---

[16] La presentación de la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel como sistema formal la damos en el apéndice 16, después de introducir el concepto de *sistema formal* en el apéndice 13.

Apéndice 9
Las antinomias y la matemática

En cierto sentido, el problema suscitado por las antinomias se puede remitir al manejo que le dieron a la noción de conjunto matemáticos como Cantor, Dedekind y Russell, un tanto distinto al que hasta entonces se le había conferido. Antes, cuando los matemáticos hablaban de conjuntos siempre lo hacían en relación a objetos *matemáticos*, especialmente objetos como números, figuras, funciones, etc., situación que cambió con la idea de considerar como conjunto "cualquier reunión en un todo de objetos definidos y distintos de nuestra intuición o nuestro pensamiento" según reza la definición de Cantor. De hecho, fue esta "definición", vacia e inútil para el trabajo matemático efectivo, la que abrió la posibilidad de pensar como elementos de un conjunto no sólo objetos matemáticos, sino todo tipo de entidades como, por ejemplo, conceptos, ideas, ilusiones, adjetivos, espíritus celestiales, sirenas, etc., que no surgen de ninguna necesidad matemática específica. Finalmente, algunos decidieron razonar en torno a estos "conjuntos" dejándose llevar por su peculiar intuición acerca de ellos, del mismo modo en que los matemáticos del siglo diecisiete lo hicieron en torno a los infinitesimales. En tal extremo encontramos a Burali-Forti y Russell, que, sacando la noción de contexto, construyeron monstruos como el *conjunto de todos los números ordinales*, o el *conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos.*

Esto marcó una diferencia en torno a la noción de conjunto, que para muchos no era más que un concepto matemático que sólo cobraba vida al interior de las teorías matemáticas, y para otros un concepto que tenía vida propia. Nosotros inscribiríamos en la primera tendencia a Hilbert, Zermelo y Fraenkel y en la segunda a Cantor, Dedekind y Russell.

Frente al problema que representaba dicho manejo "ilegítimo" de la noción de conjunto, Hilbert y Zermelo decidieron que la mejor forma de evitar la paradojas, y con ello las fútiles controversias sobre la lógica y los conjuntos, era restituyendo el carácter de objetos matemáticos de estos últimos, definiéndolos por medio de axiomas, tal como Hilbert lo había hecho con los objetos geométricos. Como ya hemos visto (Cf. la sección **2.6** y el apéndice **8**) fue Zermelo quien tomo este proyecto en sus manos y enunció en forma de axiomas las propiedades que considero básicas para la actividad matemática.

La axiomatización vista desde la matemática contemporánea

Entre los axiomas que había que establecer, el más importante de todos era uno que permitiera introducir conjuntos en los argumentos matemáticos mediante una propiedad; un

equivalente axiomático del *principio de comprensión*, ya mencionado en la sección 3.1. Como hemos visto, el problema con este principio era que, dada su generalidad, permitía introducir conjuntos monstruosos como el de Burali-Forti o el de Russell. Para poderlo incorporar en una teoría axiomática, había que resolver al menos dos problemas.[1]

Para evitar tales dificultades, Zermelo impuso una restricción al formular su axioma de comprensión: no aceptar la existencia de un conjunto formado con base en una propiedad P a menos que tales objetos ya sean miembros de un conjunto previamente definido.[2]

Aunque el problema no quedó completamente resuelto con ello, ya se estaba en la pista que los matemáticos en general aceptarían como la correcta. No obstante, la propuesta de Zermelo tenía el problema de que el concepto de *propiedad* que utiliza no era del todo claro, es decir, que en la formulación del axioma no se da ninguna indicación de lo que debemos entender por una "propiedad". En su momento Zermelo se limitó a decir que una aserción C (que serían el medio a través del cual se expresarían las propiedades) es *definida* cuando es posible decidir, para cada objeto considerado, si ésta se satisface o no acudiendo a los axiomas y las leyes válidas de la lógica.[3] Obviamente, lo que Zermelo tenía en mente era el tipo de propiedades consideradas por los matemáticos hasta entonces. Sin embargo, la paradoja de Berry mostró que esto no era suficiente, ya que en ella sólo se consideraban un número finito de números enteros y propiedades como la de ser el mínimo de un conjunto no vacío de enteros, es decir, nada inusual para un matemático. Se requería algo más, y ese "algo más" era precisar el lenguaje en que se formularían tales propiedades, lo cuál, por cierto, debió aguardar algunos años.[4]

El resultado fue que se formularon ciertas limitaciones que, sin faltar al uso y las costumbres de los matemáticos, evitaban tales "propiedades" parásitas. Una de ellas fue eliminar el lenguaje ordinario y reemplazarlo por un lenguaje formal, como ya se vio en el apéndice 8. Un indicio de que esto fue una solución correcta es que a la fecha nadie ha formulado en un lenguaje de tal naturaleza una propiedad que resulte en una paradoja como la de Berry.

A fin de cuentas, lo que sucedió después de las paradojas es que la teoría de conjuntos se formuló axiomáticamente, y la mayoría de los matemáticos comenzaron a hacer uso del

---

[1] Como sabemos, el principio de comprensión afirma que *cualquier propiedad* P *define un conjunto cuyo elementos son precisamente todos los objetos que tienen la propiedad* P. Este precepto se había utilizado desde la época clásica (¿qué es una figura geométrica sino un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad?) y fue formulado explícitamente por Frege bajo el nombre con que se le conoce.

[2] Véase el axioma III (Axioma de separación) en el apéndice 8.

[3] Véase la cita de Zermelo que se hace en el apéndice 8.

[4] Véase el apéndice 8, sobre todo en el comentario (7).

sistema axiomático (nos referimos a ZFC) sin siquiera mencionarlo, o incluso sin saberlo. Es más, en la práctica cotidiana nadie hace uso del lenguaje formal como tal. Una de las razones es que los argumentos expresados en él serían prohibitivamente largos; en su lugar, los matemáticos utilizan un lenguaje *naif* muy cercano al de Cantor, una escritura que es una mezcla de lenguaje natural y lenguaje formal, en el convencimiento de que cualquier texto así escrito se puede traducir al lenguaje formal, considerándose un deber introducir la precisión necesaria para convencer a los colegas de tal posibilidad.

En cuanto al presente, priva la opinión, no del todo infundada, de que todas las ramas de la matemática se pueden transcribir a la teoría de conjuntos —y por tanto, al sistema ZFC en última instancia—, aunque en realidad casi nadie se ocupa de esta empresa.

De lo que sí estamos seguros es de que calificar lo sucedido a principios del siglo veinte como una "crisis" es engañoso, sobre todo si se le compara con la tensión desencadenada en la física por la relatividad y la mecánica cuántica, teorías que forzaron a los físicos a cambiar su concepción de los fenómenos naturales. Ciertamente, hubo problemas que obligaron a revisar los fundamentos de la matemática, más ello no significó el abandono de ninguna de sus partes, salvo por los intuicionistas y los constructivistas que no son ni con mucho la mayoría. De hecho, el período de esta supuesta crisis fue de una enorme productividad, y en la actualidad los matemáticos siguen desarrollando su ciencia de la misma manera como lo hicieran Hilbert y sus contemporáneos, aunque con algunas ganancias (de las que no todos están al corriente), pues ahora se tiene conciencia de las limitaciones del método que se ha elegido para edificar esta ciencia, y se conocen mejor los mecanismos formales que intervienen en las demostraciones, con la consiguiente expansión de la matemática en esa dirección: demostración automática de teoremas, máquinas de Turing y computación, teoría de los algoritmos, teoría de modelos, lenguajes formales y de programación, etc., ramas que nacieron en torno a la investigación del problema de los fundamentos o muy cerca de él.[5]

[5] En cuanto a las paradojas, si bien la discusión perdió casi toda su fuerza después de los años veinte, esto de ninguna manera significa que el tema se haya agotado, sino que los filósofos y matemáticos encuentran difícil decir algo nuevo. Un ejemplo de que el tema sigue siendo de interés es el trabajo sobre la paradoja de Burali-Forti publicado en 1940 por el lógico norteamericano Willard van Orman Quine.

Apéndice 10

Un argumento en contra del principio del tercero excluido

Veamos un argumento intuicionista en contra de la universalidad del principio del tercero excluido. Se trata de un caso propuesto por Heyting en 1956.

Para presentar el ejemplo es necesaria cierta familiaridad con la *conjetura de los primos gemelos*. Como sabemos, el único número primo par es el 2, siendo impares los restantes números primos (3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43, etc.), de modo que entre dos primos consecutivos la diferencia es al menos de dos unidades, salvo en el caso de los números 2 y 3 (ambos primos) cuya diferencia es 1. A los números primos cuya diferencia es igual a 2 se les denomina *primos gemelos*, y se conocen muchas parejas de ellos, como, por ejemplo, (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (137, 139) o (209201, 209203). La *conjetura de los primos gemelos* es la siguiente:

Para todo número natural x, hay un número $p > x$ tal que los números p y $p + 2$ son primos gemelos.

La conjetura equivale a decir que hay una infinidad de parejas de primos gemelos. En la actualidad la cuestión no está resuelta, es decir, la conjetura no se ha podido probar ni refutar, y Heyting se apoya en dicho estado de irresolución del problema para mostrar un caso en el que el principio del tercero excluido no es válido desde su punto de vista. El argumento es el siguiente:

> Comparemos la definición de dos números naturales k y l.
> I. k es el mayor número primo tal que $k - 1$ también es un número primo, ó $k = 1$ si tal número no existe.
> II. l es el mayor número primo tal que $l - 2$ también es un número primo, ó $l = 1$ si tal número primo no existe.
> La matemática clásica ignora por completo la obvia diferencia en el carácter de esta definiciones. Mientras que el número k se puede calcular ($k = 3$), no tenemos ningún método para calcular el número l, pues no sabemos si la sucesión de parejas de número primos (p, $p + 2$) es finita o no. Por lo tanto, el intuicionismo rechaza II como la definición de un número entero, pues consideran que un entero está bien definido sólo cuando se suministra un método para calcularlo. Esta línea de razonamiento conduce al rechazo del principio del tercero excluido, pues si la sucesión de primos gemelos fuese finita o no finita, II definiría un número entero.[1]

[1] Heyting, 1956. La cita fue tomada de Benacerraf, 1964, p. 56.

En efecto, con base en el principio del tercero excluido se puede probar que **II** define un número entero. Sea P la proposición «existe un número primo p tal que $p - 2$ es un número primo y para todo número primo q mayor que p, $q - 2$ no es un número primo». Si P es verdadera, entonces hay un número primo n con dicha propiedad y $l = n$. Por el contrario, si P es falsa, entonces no hay tal número n y $k = 1$. Ahora, por el principio del tercero excluido, tenemos que $P \vee \neg P$, y en ambos casos l es un numero entero. Por tanto, **II** define un número entero, independientemente del valor de verdad de P.

Nótese que esta forma de admitir la existencia de un número l a través de una definición como la **II** va en contra de los principios intuicionistas enumerados al principio de la sección **3.3** (específicamente, en contra del cuarto de ellos), pues la "demostración" clásica recién expuesta no indica un método de construcción del número l.[2]

[2] El principio en cuestión es el siguiente: *la existencia de los objetos matemáticos está definida por la posibilidad de construcción de los objetos mismos; por tanto, «existen» sólo aquellos seres matemáticos que se pueden construir.* Al respecto, en la demostración clásica de la existencia del número l no hay ninguna indicación sobre cómo construirlo.

Apéndice 11

La inducción matemática y las definiciones por recursión

Una de las ideas más importantes en el dominio de la lógica matemática es la de *definición por recurrencia*, la cual se halla presente en las investigaciones en torno al fundamento de las matemáticas, la teoría de la calculabilidad y el problema de la decisión. Si bien esta idea ya se encuentra en algunos trabajos de Dedekind, el primero en valorarla y desarrollarla plenamente fue Skolem en un trabajo publicado en 1923 bajo título «Fundamentos de la aritmética elemental por medio del método recursivo de pensamiento, sin uso de variables aparentes sobre dominios infinitos». Dicho escrito marcó el inicio de una disciplina fundamental, comparable en importancia con el álgebra o la geometría, y que hoy en día conocemos como *teoría de las funciones recursivas*.

Por «método recursivo de pensamiento» Skolem entiende una forma de razonamiento iterativo que marcha en paralelo con la inducción matemática, y sobre cuya base pretende reconstruir la aritmética elemental. Esta idea le sobrevino tras la lectura de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, como una reacción a la teoría de tipos y la teoría de la cuantificación. Su intención era abordar el problema del infinito en matemáticas desde una perspectiva constructiva, valiéndose de métodos tan seguros que nadie podría dudar de sus conclusiones, y evitando de paso el problema planteado por las paradojas de la teoría de conjuntos.

Skolem procedió de manera informal, sin recurrir al método axiomático y evitando a toda costa la teoría de la cuantificación (es decir, el uso de variables aparentes sobre dominios infinitos, como reza el título). Supone como entendidas las siguientes nociones: *número natural*, *sucesor de x*, *sustitución de iguales por iguales* y *modo recursivo de pensamiento*. De estas nociones sólo la última requiere explicación. Se trata de las pruebas por inducción matemática y las definiciones por recursión, que podemos aclarar con un ejemplo. Supongamos que queremos definir la operación *suma de números naturales*. Esto lo podemos hacer definiendo una función f de dos argumentos mediante el siguiente esquema:

1) $f(x, 0) = x$ (es decir, $x + 0 = x$)

2) $f(x, sy) = sf(x, y)$ (es decir, $x + sy = s(x + y)$)

donde las dos ecuaciones a la derecha son las mismas que las de la izquierda, escritas en la notación usual.[1] Este esquema los debemos entender como un sistema de reglas que nos dicen cómo calcular la suma de dos números cualesquiera. Por ejemplo, para calcular la suma de 4 y 3 procedemos como sigue (recordando que 4 = *ssss*0 y 3 = *sss*0, donde «*sx*» simboliza al sucesor de *x*):

	regla utilizada	escritura abreviada
$ssss0 + sss0 =$		$4 + 3 =$
$s(ssss0 + ss0) =$	(2)	$s(4 + 2) =$
$ss(ssss0 + s0) =$	(2)	$ss(4 + 1) =$
$sss(ssss0 + 0) =$	(2)	$sss(4 + 0) =$
$sss(ssss0) =$	(1)	$sss(4) =$
$sssssss0$	substitución de iguales	7

Una vez definida la suma, con su ayuda podemos definir recursivamente el *producto* de dos números naturales como sigue:

$$x \cdot 0 = 0; \qquad x \cdot sy = x \cdot y + x$$

A su vez, con esta última función podemos definir la *función exponencial*:

$$x^0 = 1; \qquad x^{sy} = x^y \cdot x$$

Nótese que la posibilidad de iterar el procedimiento queda abierta en todo momento, de modo que las funciones ya definidas sirven como base para general nuevas funciones. Una característica de estas funciones es que sólo se definen explícitamente para el primer número natural, proveyéndose para los demás números una regla que permite calcular el valor $f(sx)$ en términos de $f(x)$. De ahí el nombre de *recursivas* (es decir, *recurrentes, que vuelven atrás*).

Funciones recursivas. La importancia de las funciones recursivas deriva también de su relación con las nociones de *algoritmo* y *procedimiento efectivo*.[2] De hecho, la noción de *función recursiva* nació del intento por hacer de la noción intuitiva de *función calculable* algo más preciso.

En un sentido estricto, la *clase de la funciones recursivas* se determina de la siguiente manera: primero, ciertas funciones iniciales, consideradas como calculables de inmediato, son llamadas *recursivas*; segundo, se especifica un conjunto de reglas para generar nuevas

[1] En este caso, hemos incluido al número 0 entre los números naturales, como es usual. Esto no significa ningún contratiempo en relación a la aritmética finitista, pudiéndose considerar que el símbolo «0» denota un numeral vacío (carente de trazos). Es más, si su presencia es causa de dificultades, las definiciones por recursión se pueden replantear iniciando el procedimiento en el número 1.

[2] Si bien los algoritmos se habían utilizado desde la antigüedad (piénsese, por ejemplo, en el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números), no fue sino hasta el siglo XX que se intentó una definición de este concepto, y la aritmética recursiva resultó el instrumento adecuado.

funciones recursivas a partir de las ya obtenidas. Las siguientes funciones se suelen tomar como iniciales:

i) $C(x) = 0$ para toda x (función constante cero)

ii) $s(x) = x + 1$ (función sucesor)

iii) $I_{i,n}(x_1, ..., x_n) = x_i$ (funciones identidad, con $i \leq n$)

A su vez, las reglas para generar nuevas funciones son las siguientes:

iv) $f(x_1, ..., x_n) = h(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_m(x_1, ..., x_n))$ (sustitución)

v) $f(x_1, ..., x_n, 0) = g(x_1, ..., x_n)$

$f(x_1, ..., x_n, y + 1) = h(x_1, ..., x_n, y, f(x_1, ..., x_n, y))$ (recursión)

vi) Si g es una función de grado $n + 1$ tal que para todos los números $x_1, ..., x_n$ hay al menos un número y tal que $g(x_1, ..., x_n, y) = 0$, y la expresión «$\mu y[(g(x_1, ..., x_n, y) = 0]$» denota al menor número y que es un cero de la función, entonces la ecuación

$$f(x_1, ..., x_n) = \mu y[g(x_1, ..., x_n, y) = 0]$$

define una función de grado n (minimalización).

Una definición estricta establece que una función aritmética es *recursiva* si y sólo si se puede obtener a partir de las funciones iniciales mediante un número finito de aplicaciones de las reglas (iv), (v) y (vi). Además, si en el proceso de definición sólo se utilizan las reglas (iv) y (v), se dice que la función es *recursiva primitiva (RP)*.[3]

Para concluir diremos cuatro cosas: primero, que no es necesaria una teoría de las relaciones recursivas paralela a la teoría de las funciones recursivas, pues una relación aritmética $R \subseteq N^n$ es *recursiva* cuando su función característica lo es;[4] segundo, que la teoría de la división, la del máximo común divisor y la de la descomposición en factores primos se mueve enteramente en el espacio de la aritmética recursiva; tercero, que todos los procedimientos de definición de funciones calculables que se han intentado conducen a los mismos resultados, no conociéndose a la fecha ninguna función calculable que no sea recursiva; y cuarto, que todas funciones recursivas primitivas son parte de la aritmética finitista.

[3] No todas las funciones calculables son *RP*. Por ejemplo, se puede probar que si a partir de la suma generamos una sucesión de funciones iterando repetidamente la última función que se ha formado, de modo que a la suma le sigue el producto, a éste la exponenciación, y así sucesivamente, entonces la función $f(i, x, y)$ cuyo valor en (i, x, y) es el valor de la i-ésima función de la sucesión en (x, y), no es *RP* (el ejemplo se debe a Roza Péter).

[4] La función característica de R es la función C_R: $N^n \rightarrow \{1, 0\}$ tal que $C_R(X) = 0$ si y sólo si $X \in R$.

La inducción matemática. La inducción matemática es un procedimiento de prueba matemática que no se debe confundir con la inducción empírica de la ciencias naturales. En ésta, se procede de una serie particular de observaciones de un fenómeno natural para establecer una proposición general que debe regir todas las posibilidades del fenómeno, como cuando decimos «la aceleración que produce la fuerza de gravedad sobre un objeto que cae libremente en la superficie terrestre es de 9.8 metros por segundo», o «todos los metales son más pesados que el agua». En tales casos el grado de certeza de la proposición depende del número de observaciones que la confirman y de que no halla ejemplos contrarios. Los razonamientos de esta clase suelen ser muy convincente, y es por ello que nos atrevemos a decir que, de seguro, el Sol saldrá mañana por el Oriente.

La inducción matemática es algo completamente diferente a lo anterior. Para empezar, no incluye la posibilidad de excepciones, y una vez realizada la prueba, se tiene la certeza absoluta de que la propiedad se cumple en todos los casos. Este método de razonamiento se utiliza comúnmente para demostrar teoremas de la forma $A(x)$, en cuyo enunciado figura como parámetro un número natural x indeterminado. El método se basa en la idea de que los números naturales forman una sucesión infinita 0, 1, 2, 3, ... que cuenta con un primer elemento 0 y que tiene la propiedad de que todo número de la sucesión se puede alcanzar aplicando un número finito de veces la función sucesor s a partir del 0. *Grosso modo*, el procedimiento de prueba es el siguiente:

a) se prueba que el número 0 (o bien el número 1) tiene la propiedad A, es decir, se prueba $A(0)$, y

b) se prueba que si un número cualquiera x tiene la propiedad, entonces el siguiente número $x + 1 = sx$ de la sucesión también tiene la propiedad, es decir, se prueba que $A(x) \Rightarrow A(sx)$.

La conclusión a la que se llega es que $A(x)$ es válido para todos los números naturales x. Esto último se debe a que el paso (b) comprende una infinidad de proposiciones condicionales: $A(0) \Rightarrow A(1)$, $A(1) \Rightarrow A(2)$, $A(2) \Rightarrow A(3)$, $A(3) \Rightarrow A(4)$, etc., y como por el paso (a) se sabe que $A(0)$, de ahí resulta $A(1)$, y de ahí que $A(2)$, etc. hasta alcanzar cualquier número (ninguno escapa a la conclusión). Esto lo expresa Poincaré diciendo lo siguiente: «el carácter esencial del razonamiento por recurrencia es que contiene, condensados, por así decirlo, en una fórmula única, una infinidad de silogismos.»,[5] y nos presenta la siguiente lista de silogismos hipotéticos:

El teorema es cierto para el número 1.

[5] Poincaré, 1902. Cita tomada de la traducción al español, p. 226.

Luego, si es cierto para 1, es cierto para 2.
Entonces es cierto para 2.
Luego si es cierto para 2, es cierto para 3.
Entonces es cierto para 3, y así sucesivamente (observando que la conclusión de cada silogismo es la premisa para el siguiente).

El nombre de *inducción matemática* se debe a que el procedimiento permite inferir una infinidad de casos considerando sólo dos: el caso para $n = 0$ y un caso de carácter general o *paso inductivo*: $A(x) \Rightarrow A(sx)$.

Según Poincaré, si la matemática es fecunda y sus formas de razonamiento no son reducibles a la lógica, es a causa de esta forma de razonamiento, característica del pensamiento matemático. Es más, juzga que esta regla, inaccesible a la demostración analítica y a la experiencia, es el verdadero tipo de juicio sintético *a priori* que hace que la matemática no sea una inmensa tautología.

Por último queremos señalar que no toda prueba por inducción matemática cae en la esfera de la aritmética finitista, pues en la prueba se puede recurrir a la reducción al absurdo o a métodos no constructivos que le son inaceptables.

Apéndice 12

El método de los elementos ideales

Para aclarar el carácter ideal de nociones como la de infinito actual y el uso que se les da, Hilbert establece cierta analogía con algunas nociones que históricamente se incorporaron a la matemática sin tener un significado preciso. De éstas, las más exitosas fueron sin lugar a dudas las de *número imaginario* y *puntos al infinito*. Hilbert se refiere a su incorporación como *método de los elementos ideales*.

El método de los elementos ideales. En el apéndice **6** nos hemos referido a los números complejos. Si bien la representación geométrica de los mismos los coloca en el mismo rango de *existencia* que los números reales, en un principio se les concibió al margen de cualquier representación, como algo puramente imaginario que sólo tenía existencia en el pensamiento.[1] Según Hilbert, su incorporación quedó plenamente justificada por el éxito obtenido en el álgebra, donde cada ecuación polinomial $p(x) = 0$ de grado n tenía ahora n raíces y se podía descomponer como un producto de la forma $p(x) = a(x - r_1) \ldots (x - r_n)$ (donde $r_1, \ldots, r_n$ son las raíces complejas del polinomio), con lo cual ya no había excepciones, ni ecuaciones de este tipo que fueran irresolubles. Algunas vez Leibniz se refirió a este tipo de objetos carentes de toda representación (en su caso a los números infinitesimales) como *ficciones útiles*, siendo precisamente su utilidad lo que justificaba su ingreso a la teoría. En este sentido, lo único que Hilbert considera forzoso es que la adición de este tipo de nociones no altere los resultados ya obtenidos, ni lleve a conclusiones incorrectas en aquellas partes de la teoría que son susceptibles de una comprobación directa como, por ejemplo, las igualdades numéricas.

Algo similar sucedió en la geometría con la adición de puntos al infinito y la recta al infinito, entidades que no correspondían a nada en la intuición espacial. De su aceptación se sigue que dos rectas cualesquiera se intersectan en un sólo punto, y no sólo aquellas que no son paralelas, haciendo de ésto una proposición universal.[2] «Los elementos ideales "al infinito" poseen la ventaja de simplificar considerablemente el sistema de leyes de conexión, permitiendo al mismo tiempo una visión global del mismo. Por otra parte, es bien sabido que la simetría entre punto y recta hace posible obtener en la geometría un principio tan útil

[1] Este es precisamente el sentido que le damos al adjetivo *ideal* en este contexto: el de una idea que no corresponde a nada real porque sólo pertenece a la representación o la pensamiento.

[2] Un *punto al infinito* sería el punto de intersección de dos rectas paralelas, y la *recta al infinito* sería aquella formada por todos los puntos al infinito. Podemos imaginar un punto al infinito como sigue: es el punto que se encuentra al recorrer dos rectas paralelas (digamos horizontales) hacia la izquierda o hacia la derecha hasta alcanzar el infinito, llegándose en ambos casos a un mismo lugar.

y fructífero como el de dualidad.».[3] En casos como éste las nociones ideales se introducen con el propósito de dar uniformidad a la teoría, evitando la existencia de casos especiales en los que ciertas propiedades no se cumplen.

En cuanto al infinito actual, se trata de una noción que no sólo se ha hecho presente en la consideración de totalidad infinitas, sino en la adopción de principios lógicos como el del tercero excluido que presupone la facultad de agotar todas las posibilidades en un dominio infinito al decir, por ejemplo, que en un dominio infinito *D* una propiedad se cumple para *todos* los elementos de *D*, o *existe* un objeto en *D* para el que no se cumple, aunque no contemos con los medios para inclinarnos por uno de los términos de esta alternativa. En tales casos, como ya vimos, los principios lógicos hacen las veces de *enunciados ideales* que, aunque no son susceptibles de una verificación directa, complementan el aparato demostrativo a fin de preserva las sencillas leyes de la lógica aristotélica.

[3] Hilbert, 125. Cita tomada de la traducción al español, p. 89.

Apéndice 13
El concepto de *sistema formal*

El concepto de *sistema formal* es muy general y abarca un amplio espectro de sistemas sintácticos, todos ellos caracterizados por el hecho de que su manejo y construcción tienen como base un conjunto de signos desprovistos de todo significado. En un sistema formal incluso las leyes que rigen la derivación (lo que antes llamábamos inferencia *lógica*) se utilizan sin necesidad de explicar su significado (i.e., son tratadas en pie de igualdad con los términos primitivos) y se tiene libertad absoluta para escoger las leyes deductivas que habrían de regir las demostraciones.[1] Un sistema formal consiste de:

1. Un conjunto S de símbolos llamado *alfabeto*. A los elementos de S se les llama *letras* o *símbolos primitivos*, y a las sucesiones finitas de símbolos primitivos, *expresiones*.
2. Un conjunto F de expresiones llamadas *fórmulas* que se construyen aplicando un conjunto finito de *reglas de formación* a los símbolos primitivos. Estas reglas indican cómo se combinan los símbolos primitivos sin tomar en cuenta su significado. Al conjunto de reglas de formación se le llama *gramática* del sistema.
3. Un conjunto A de fórmulas llamadas *axiomas*. Los axiomas son las fórmulas que sirven como punto de partida para la demostración.
4. Un conjunto finito R de *reglas de inferencia*, cada una de las cuales indica cómo una fórmula llamada *conclusión* se obtiene a partir de otras llamadas *hipótesis*. Los *teoremas* del sistema son los axiomas y todas las fórmulas que se pueden derivar de ellos aplicando las reglas de inferencia un número finito de veces.

Una práctica generalizada consiste en representar las reglas de inferencia mediante *esquemas de derivación*, que indican las fórmulas de las que se parte (las hipótesis) y, debajo de una línea horizontal, la fórmula que se obtiene a partir de ellas (la conclusión). El empleo de tales esquemas permite dar una definición cómoda del concepto de *prueba* o *derivación*: una *prueba* es una

$$\frac{H_1, H_2, \ldots, H_n}{C}$$

[1] En esto, sucedió con la lógica lo que algunos decenios antes había sucedido con la geometría: así como ésta dejó de ser única por la aparición de las geometrías no euclidianas, también la lógica se pluralizó. Se pasó de la lógica a las lógicas, abandonando de este modo la idea de una legislación lógica única y absoluta como la cuestionada por Brouwer.

sucesión finita de fórmulas cada una de las cuales es un axioma o la conclusión de una regla de inferencia cuyas hipótesis figuran antes que ella en la sucesión. Una fórmula es un *teorema* si hay una derivación de la que es la última componente.

Como se ve, todo sistema formal se compone de dos partes: una *morfología* que describe sus componentes y una *axiomática* que define sus teoremas. La primera está constituida por el alfabeto y las reglas de formación, mientras que la segunda consta de los axiomas y las reglas de inferencia. Al igual que los axiomas, en un sistema formal las reglas de inferencia se admiten sólo por razones de procedimiento y no pueden decirse correctas o incorrectas. Son, por así decirlo, el vínculo entre los axiomas y los teoremas. Su carácter formal tiene como fin liberar a la deducción de toda consideración subjetiva, de todo gesto interno de quien se enfrenta con ella. De este modo, la inferencia se convierte en un procedimiento objetivo sujeto a reglas claramente estipuladas.[2]

En cuanto a los sistemas formales que son relevantes para el programa de Hilbert, estos comparten algunas características. La primera de ellas es que todos tienen como base el cálculo de predicados de primer orden. Esto significa, entre otras cosas, que su lenguaje incluye un símbolo $\neg$ para la negación, las conectivas $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\rightarrow$ (implica) y $\leftrightarrow$ (si y sólo si), los cuantificadores $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe), un conjunto numerable de variables $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ y, por lo general, un símbolo $=$ para la igualdad.[3] Una segunda característica es que, básicamente, todos estos sistemas incluyen como regla de inferencia al *modus ponens*: de A, y $A \rightarrow B$ se infiere B.[4]

Con estos elementos a la mano, tenemos que las nociones de *modelo, consistencia, independencia*, *completud* y *categoricidad* que vimos en la sección **1.3.3** son básicamente las mismas en relación a esta clase de sistemas. No obstante, su definición es más rigurosa. Por ejemplo, una teoría formal es *consistente* cuando no es posible derivar en ella una fórmula A y su negación $\neg A$. Esta definición es de corte finitista, pues sólo atañe a combinaciones de fórmulas que se pueden producir en el ámbito de la percepción.

---

[2] A manera de ejemplo, en seguida expondremos en detalle un sistema formal que no proviene de la práctica matemática. La idea es mostrar el grado de arbitrariedad que puede haber al momento de definir un sistema sintáctico de esta índole, y mostrar el manejo puramente formal del sistema, al margen de lo que sus símbolos puedan significar (eso queda claro en el ejemplo en virtud de que ni siquiera se tiene un indicio de los que pueden significar sus fórmulas). A fin de entender el grado de conocimiento tan exacto que podemos lograr de esta clase de sistemas, llevamos a cabo un estudio de algunas de sus propiedades sintácticas, con especial énfasis en el problema de la decisión.

[3] Los símbolos pueden variar de un autor a otro, así como los conectivos y cuantificadores seleccionados, pues entre ellos unos se pueden definir en función de otros. Nosotros no iremos a través de tantos detalles.

[4] En el apéndice 17 mostramos un sistema formal para la aritmética de Peano, junto con algunos ejemplos de derivaciones formales. De igual forma, el sistema *ZFC* del apéndice 16 se convierte en un sistema formal si se la adjunta el cálculo de predicados con sus reglas de inferencia. Al respecto, el lector podrá consultar los capítulos 3 y 4 de [Mendelson, 1979].

Un ejemplo de sistema formal: el sistema *AB*

Ilustramos el concepto de sistema formal con un ejemplo que no corresponde a ninguna teoría matemática. El sistema lo llamamos *AB* por obvias razones:

Alfabeto: $S = \{a, b\}$

Fórmulas: Cualquier expresión es fórmula.

Axiomas: $A = \{a, ab\}$

Reglas de inferencia: Las definidas por los siguientes esquemas:

$$(C)\ \frac{\alpha,\ \beta}{\alpha\beta} \qquad\qquad (I)\ \frac{s_1 s_2 \cdots s_n}{s_n \cdots s_2 s_1}$$

En la definición α y β representan fórmulas cualesquiera de *AB* y $s_1,\ldots,s_n$ (n > 1) símbolos primitivos de *AB*. (C) es la regla de *concatenación* e (I) es la regla de *inversión*. La primera consiste en escribir la expresión β inmediatamente a la derecha de α (construyéndose de este modo una nueva expresión); la segunda consiste en invertir el orden de los símbolos de la hipótesis.

Teoremas. Para indicar que una fórmula es un teorema se usa el símbolo '⊢' seguido de la fórmula en cuestión (v.g. '⊢*ab*' indica que la fórmula '*ab*' es un teorema). Como ejemplo exhibimos tres derivaciones correspondientes a las fórmulas '*abba*', '*baba*' y '*baab*':

⊢*abba*		⊢*baba*		⊢*baab*	
1. *ab*	axioma	1. *ab*	axioma	1. *ab*	axioma
2. *ba*	(I), 1	2. *ba*	(I), 1	2. *ba*	(I), 1
3. *abba*	(C), 1, 2	3. *baba*	(C), 2, 2	3. *baab*	(C), 2, 1

En cada derivación la sucesión de fórmulas aparece numerada, y en la columna a su derecha se hace un análisis de la prueba, señalando si la fórmula correspondiente a ese renglón es una axioma o se infiere de anteriores. La notación '(I), *n*' se usa para indicar que la fórmula se infirió aplicando la regla (I) a la fórmula en el renglón *n* (*n*-ésima fórmula de la sucesión). Así mismo, la notación '(C), *h*, *k*' se usa para indicar que la fórmula se infirió aplicando la regla (C) a las fórmulas en los renglones *h* y *k* en el orden en que se les menciona, pudiéndose dar el caso en que *h* y *k* sean iguales.

Ahora consideremos la siguiente cuestión: la fórmula *aabb* ¿es un teorema ? No podemos afirmar que no lo es por el hecho de no dar con prueba de ella. No obstante, mediante un análisis de las pruebas de *AB* podemos demostrar —por fuera del sistema— que esta fórmula no es derivable. Comenzamos por definir algunas nociones útiles.

D1 La *expresión vacía* ◊ es la expresión que no contiene letras.

D2 La *longitud de una prueba P* es el número de fórmulas de que consta *P*.

D3 La *longitud de una fórmula* α es el número de letras de que consta α.

D4 Si α es una expresión entonces $a(\alpha)$ = número de presencias de la letra *'a'* en α y $b(\alpha)$ = número de presencias de la letra *'b'* en α.[5]

D5 Si α es la expresión '$s_1 ... s_n$', α^{-1} denota a la expresión '$s_n ... s_1$' que se obtiene al invertir el orden de los símbolos primitivos de α.[6]

D6 Si *s* es una letra, s^n denota a la expresión *'ss...s'* que consiste de *n* repeticiones de la letra *s*.

Cuatro proposiciones (metateoremas) relativas a las fórmulas de *AB* que enunciamos sin demostración son las siguientes:

MT1. Si α es un axioma entonces $a(\alpha) > b(\alpha)$.

MT2. Para toda fórmula α, $a(\alpha) = a(\alpha^{-1})$ y $b(\alpha) = b(\alpha^{-1})$.

MT3. Para todas las fórmulas α y β, $a(\alpha\beta) = a(\alpha) + a(\beta)$ y $b(\alpha\beta) = b(\alpha) + b(\beta)$.

MT4. Para toda fórmula α, si α es un teorema, entonces $a(\alpha) > 1$.

Podemos ahora demostrar dos cosas: que ningún teorema de ***AB*** tiene más bes que aes, y que ningún teorema de ***AB*** comienza o termina con dos bes o tiene tres bes consecutivas.

MT5. Para toda fórmula α, si α es un teorema entonces $a(\alpha) \geq b(\alpha)$.

MT6. Si α es un teorema, entonces α no es de la forma $bb\gamma$, γbb o $\gamma bbb\delta$ (donde γ y δ son expresiones cualesquiera)

Demostración de MT6. En los axiomas, cada presencia de la letra *'b'* es adyacente a una letra *'a'*. Tal adyacencia no se pierde al aplicar las reglas de inferencia, no importa cuantas veces se haga esto. En consecuencia, en un teorema no puede haber una presencia de la letra *'b'* que no esté acompañada por la letra *'a'*, y ningún teorema puede tener alguna de las formas $\underline{b}b\gamma$, $\gamma b\underline{b}$ o $\gamma b\underline{b}b\delta$ ya que, como es evidente, en cada una de ellas hay al menos una presencia de la letra *'b'* (la subrayada) que no es adyacente a ninguna letra *'a'*.[7] ■

---

[5] Por ejemplo, a(aabaab) = 4, b(aabaab) = 2; a(bb) = 0 y b(bb) = 2.

[6] Por ejemplo, $aaaba^{-1}$ = abaaa y $abab^{-1}$ = baba. Con esta notación la regla (I) se expresa así: de α se infiere α^{-1}.

[7] Esta demostración se hace casi con los ojos. Se le puede hacer más rigurosa procediendo por inducción sobre la longitud de las pruebas de *AB*. No obstante, nuestro argumento nos parece suficientemente claro y convincente como para no tener que proceder con mayor rigor. En este nivel la deducción lógica sigue siendo material, de contenido, y el

Como se ve, ni '*aabb*' ni '*bbaa*' son teoremas de *AB*. Si bien podemos examinar otros casos de fórmulas que no son teorema, estamos en una situación que nos permite demostrar cosas más generales y de mayor alcance.[8]

Problema de la decisión. Una cuestión primordial relacionada con los sistemas formales consiste en caracterizar de un modo efectivo sus teoremas, es decir, encontrar una propiedad estructural claramente reconocible que sólo es tenida por sus teoremas. A éste se le conoce en la lógica como el *problema de la decisión*, mismo que ha sido objeto de múltiples investigaciones en relación con otros sistemas. En el caso del formalismo ***AB*** el problema se resuelve favorablemente. La solución tiene como base las siguientes peculiaridades del sistema:

- Cada '*b*' que figura en un teorema se introduce a través del axioma '*ab*'.
- Ninguna regla de inferencia hace aparecer o desaparecer letras.
- Ninguna regla de inferencia separa letras.

Lo anterior nos permite precisar una característica distintiva de los teoremas de ***AB*** que llamaremos propiedad ***B***. Consideremos el alfabeto $S_1 = \{a, b, x, z\}$ y el siguiente procedimiento de transformación *T*:

> *T*: Al inspeccionar una expresión α de izquierda a derecha, cada vez que se encuentre la combinación '*ab*' sustitúyase la misma por '*x*' y cada vez que se encuentre la combinación '*ba*' sustitúyase la misma por '*z*'.[9]

T convierte fórmulas de ***AB*** en expresiones de S_1. Para cada fórmula α, *T*(α) denota la expresión que resulta de aplicarle el procedimiento *T*.

Ahora definimos la propiedad ***B*** como sigue:

Propiedad *B*: $\alpha \in B$ si y sólo si en *T*(α) no hay presencias de la letra '*b*'.[10]

---

papel de la demostración sigue siendo el de persuadir a un interlocutor (real o figurado) de que lo que se dice es verdad.

[8] El lector habrá observado la presencia de dos niveles lingüísticos, uno correspondiente al sistema formal y otro correspondiente al estudio y análisis del sistema formal. En general, para distinguirlos se habla de una *teoria* y una *metateoria*. En nuestro caso la teoria formal es el sistema *AB* cuya definición y análisis se lleva a cabo en el ámbito de la matematica intuitiva (¡y de contenidos!), recurriendo nuevamente a la lógica informal. Es así como hemos realizado demostraciones relativas al sistema *AB*, es decir, hemos demostrado que ni '*aabb*' ni '*bbaa*' son teoremas en él con base en la lógica tradicional. Como es evidente, esta demostración forma parte de la metateoría. En forma análoga, la proposición **MT5** se puede demostrar por inducción sobre la longitud de las pruebas de *AB* (demostración que nosotros omitimos), lo cual nos muestra que al examinar el sistema *AB* procedemos dentro del campo de la intuición sensible y la matemática informal.

[9] v.g. T(abbbba) = xbbz, T(aaaba) = aaxa, T(abbbaba) = xbzz y T(ababbba) = xxbz.

[10] A los subconjuntos de un conjunto *X* se les llama propiedades sobre *X*. De acuerdo a esta definición, **B** es una propiedad de fórmulas. En este sentido las expresiones '$x \in$ **B**' y '*x tiene la propiedad* **B**' significan lo mismo.

Vamos a demostrar que el conjunto B coincide con el conjunto de teoremas de AB. Para ello es necesario demostrar tres proposiciones relativas a B.

MT7. *Sea α un teorema. Si $\alpha \in B$ entonces $\alpha^{-1} \in B$.*

MT8. *Sea $b\gamma$ un teorema. Si $b\gamma \in B$, entonces $\gamma \in B$.*

MT9. *Sean α y γ teoremas. Si $\alpha \in B$ y $\gamma \in B$, entonces $\alpha\gamma \in B$.*

Demostración de MT7. Supóngase, en contra de lo que se quiere demostrar, que hay un teorema α con la propiedad de que $\alpha \in B$ y $\alpha^{-1} \notin$ B. Se sigue que hay una presencia de la letra b en α^{-1} que no se aparea con ninguna letra a cuando se aplica el procedimiento T. Reconstruyamos las fórmulas α y α^{-1} a partir de este hecho. Para rehacerlas tomemos una presencia de la letra b en α^{-1} que no tenga pareja bajo T. Subrayemos dicha inscripción dada su importancia:

$$\alpha^{-1}: \ldots\underline{b}\ldots$$

Supongamos que b no es ni la primera ni la última letra de α. A la derecha de b hay por fuerza otra b (si tal letra fuese una a, b se aparearía con ella). Como no puede haber tres bes consecutivas en un teorema, deducimos que la letra que precede a b es una a:

$$\alpha^{-1}: \ldots a\underline{b}b\ldots \qquad\qquad \alpha: \ldots b\underline{b}a\ldots$$

a la izquierda de la primera a que se observa en α^{-1} hay por fuerza una b (de lo contrario el apareo en α^{-1} sería ...$(ab)(ba)$... lo que no es el caso). Ahora tenemos:

$$\alpha^{-1}: \ldots(ba)\underline{b}b\ldots. \qquad\qquad \alpha: \ldots b(\underline{b}a)b\ldots$$

como $\alpha \in$ B, hay otras dos aes en α. éstas forman pareja con las bes que se observan en los extremos derecho e izquierdo del fragmento que está a la vista. Estas aes también las presentamos con sus parejas en α^{-1}:

$$\alpha: \ldots(ab)(\underline{b}a)(ba)\ldots \qquad\qquad \alpha^{-1}: \ldots a(ba)\underline{b}(ba)\ldots$$

a la izquierda de la primera a que se observa en α^{-1} hay por fuerza una b (de lo contrario el apareo en α^{-1} sería ...$(ab)(ab)(ba)$... lo que no es el caso). Ahora tenemos:

$$\alpha^{-1}: \ldots(ba)(ba)\underline{b}(ba)\ldots \qquad\qquad \alpha: \ldots(ab)(\underline{b}a)(ba)b\ldots$$

Como se ve, por fuerza de repetir nuestro argumento una y otra vez podemos concluir que a la izquierda de b en α^{-1} hay tantas parejas (ba) como se quiera. No obstante, siendo α^{-1} una sucesión finita de letras, esto no puede suceder. De manera semejante se puede demostrar que b no puede ser la primera letra de α^{-1} y que si fuese la última letra de α^{-1}, la fórmula tendría una longitud arbitrariamente grande.

Dado que la suposición de que $\alpha^{-1} \notin B$ nos lleva a una contradicción, concluimos que es imposible que α^{-1} no tenga la propiedad *B* y, por consiguiente, que $\alpha^{-1} \in B$. ■

MT10. *Para toda fórmula α, si* $\vdash \alpha$ *entonces* $\alpha \in B$.[11]

MT11. *Para toda fórmula α, si* $\alpha \in B$ *entonces* $\vdash \alpha$.

Demostración de MT10. Inducción sobre la longitud de la prueba de α.

H.I.: Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ es una prueba y $k < n$ entonces $\alpha_k \in B$:

P.D.: Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es una prueba entonces $\alpha_n \in B$. Hay tres posibilidades:

1) α_n es un axioma. En este caso es obvio que $\alpha_n \in B$.

2) α_n se infiere de α_h y α_k por medio de la regla (C). Como $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son pruebas y *h*, *k* son menores que *n*, por *H.I.* $\alpha_h \in B$ y $\alpha_k \in B$. De esto se sigue, por MT9, que $\alpha_h\alpha_k \in B$, es decir, que $\alpha_n \in B$.

3) α_n se infiere de α_k por medio de la regla (I). Como $k < n$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ es una prueba, por *H.I.* $\alpha_k \in B$. De esto se sigue, por MT8, que $\alpha_k^{-1} \in$ B, es decir, que $\alpha_n \in B$. ■

Demostración de MT11. Inducción sobre el número de letras de α.

H.I.: para toda fórmula α con menos de *n* letras, si $\alpha \in B$ entonces $\vdash \alpha$.

P.D.: para toda fórmula α con *n* letras, si $\alpha \in B$ entonces $\vdash \alpha$.

Sea α una fórmula de *B* con *n* letras. Hay dos posibilidades:

1) $\alpha = a^n$. En este caso es obvio que α es un teorema de *AB*.

2) α contiene al menos una *b*. Como $\alpha \in$ B, dicha *b* es adyacente a alguna *a* con la que se elimina al aplicar el procedimiento *T*. Se sigue de lo anterior que hay fórmulas γ y δ, quizá vacías, tales que $\alpha = \gamma a\beta\delta$ o $\alpha = \gamma\beta a\delta$. En cualquier caso $T(\alpha) = T(\gamma)sT(\delta)$ con $s = x$ o $s = z$ según sea el caso. Como en *T(a)* no hay presencias de la letra *b* deducimos que $\gamma \in B$ y $\delta \in B$; y como ninguna de las fórmulas γ o δ tiene más de *n* letras concluimos, por *H.I.*, que $\vdash \gamma$ y $\vdash \delta$. Ahora construimos pruebas de $\gamma ab\delta$ y $\gamma ba\delta$ (una de las cuales es α) como sigue:



Derivación de $\gamma ab\delta$ Derivación de $\gamma ba\delta$. ■

[11] Es decir, en los teoremas de **AB**, cada letra '*b*' está acompañada por una letra '*a*'.

Con base en MT10 y MT11 inferimos que *B* coincide con el conjunto de teoremas de *AB*, y como siempre se puede decidir si una fórmula es o no un elemento de *B*, disponemos de un procedimiento efectivo para determinar si una fórmula arbitraria es o no un teorema. Sean, por ejemplo, α = *abbababaabbaaaabbaaabbaba* y β = *bababbababbaaababababa*, ¿son α y β teoremas de *AB*? Para mayor claridad, antes de aplicar el procedimiento *T* a estas fórmulas pongamos paréntesis a las parejas *'ab'* y *'ba'* de izquierda a derecha conforme las vayamos encontrando (de izquierda a derecha):

α: *(ab)(ba)(ba)(ba)(ab)(ba)aa(ab)(ba)a(ab)(ba)(ba)*

β: *(ba)(ba)b(ba)(ba)b(ba)a(ab)(ab)(ab)a*

Al aplicar el procedimiento *T* a α y β tenemos:

T(α) = *xzxzaxzaxz* y T(β) = *zbzbzaxa*.

En vista de que $\alpha \in B$ y $\beta \notin B$ concluimos, por MT11 y MT10 respectivamente, que α es un teorema de *AB* y β no. Dos hechos llaman nuestra atención:

- Para saber que una fórmula no es teorema basta con examinar su estructura (i.e. tomar en cuenta sólo sus propiedades formales, dejando de lado lo que pueda significar).
- Para saber que una fórmula es teorema, no es necesario exhibir una derivación de ella. En este sentido MT11 es un teorema existencial, una proposición metateórica que proclama la existencia de una prueba para cada fórmula $\alpha \in B$.

Si bien MT11 no nos dice cómo podemos construir una derivación para cada $\alpha \in B$, a partir de T(α) es posible hacerlo mecánicamente. *Grosso modo*, el procedimiento es el siguiente: Si $T(\alpha) = s_1 s_2 \ldots s_n$, definimos la derivación $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ como sigue:

$\alpha_0 = a$
$\alpha_1 = ab$

Los demás términos de la sucesión son los siguientes:

$\alpha_2 = a$ si $s_1 = a$
$\alpha_2 = ab$ si $s_1 = x$
$a_2 = ba$ si $s_1 = z$

y para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$:

$\alpha_{i+1} = \alpha_i a$ si $s_1 = a$.
$\alpha_{i+1} = \alpha_i ab$ si $s_1 = x$
$\alpha_{i+1} = ba$ si $s_1 = z$.

La sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ así formada es una prueba de α.

Concluimos el estudio del sistema formal ***AB*** con el enunciado de tres proposiciones que se demuestran a partir de este procedimiento.

MT12. Todo teorema de ***AB*** se puede probar sin recurrir a la regla (I) o haciendo uso de ella una sola vez para inferir *'ba'* del axioma *'ab'*.

MT13. Sea ***BA*** el sistema formal que resulta de suprimir la regla de inferencia (I) y añadir la fórmula *'ba'* a los axiomas. Los sistemas ***BA*** y ***AB*** tienen los mismos teoremas.

Aunque en general no es posible prefijar un límite a las longitudes de las pruebas de un sistema formal, con el sistema ***AB*** esto sí se puede hacer.

MT14. Para toda fórmula α, si $\vdash \alpha$ entonces hay una prueba de α de longitud menor o igual al número de símbolos de esta fórmula.

Como se asienta en MT14, para saber que una fórmula es teorema basta con examinar aquellas pruebas cuya longitud no excede un número que sólo depende de la fórmula.

Con esto finalizamos el estudio del sistema ***AB***, en el que destacan algunos aspectos que están presentes en el estudio de prácticamente todos los sistemas formales: consideración directa de sus símbolos, análisis estructural de sus propiedades y el uso de la intuición sensible como fuente del conocimiento, no de algo trascendente, sino de las propiedades concretas de un sistema sintáctico. Como complemento, en el apéndice **15** exponemos los axiomas del cálculo de predicados que utilizaremos en este trabajo, en el apéndice **16** mostramos un sistema formal para la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y en el apéndice **17** exponemos una formalización de la aritmética de Peano.

Apéndice 14
Lenguaje y metalenguaje

Como hemos visto, en los sistemas formales toda referencia al significado de los términos de su lenguaje se elimina, pero aun se requiere del lenguaje natural para describir su estructura. Esta consideración nos lleva a distinguir muy cuidadosamente entre lo que se investiga (los sistemas formales) y la matemática con que se investiga, entre las derivaciones formales y las demostraciones informales que proceden por medio de inferencias intuitivas; a distinguir, en fin, entre dos planos lingüísticos diferentes.

Lenguaje y metalenguaje. La experiencia de dos niveles lingüísticos es familiar a todo aquel que ha estudiado una lengua extranjera. En tal caso se usa una lengua para hablar de otra. Por ejemplo, se puede usar el español para hablar de la gramática japonesa. En tales circunstancias se llama *metalenguaje* al español y *lenguaje objeto* al japonés: el español se usa para hablar del japonés y el japonés es de lo que se habla en español. Al hacerlo, en realidad las expresiones japonesas no se *usan* en el metalenguaje; tan sólo se habla de ellas (sólo se les *menciona*).

En forma análoga, cuando se estudia español en japonés, el japonés es el metalenguaje y el español el lenguaje objeto. Por otra parte, no se excluye la posibilidad de que el lenguaje objeto y el metalenguaje se tiaslapen, como cuando la gramática del idioma español se describe en idioma español. Veamos, a manera de ejemplo, un pasaje tomado de un curso intensivo de japonés para hispanohablantes en el que se explica el uso de la partícula *wa* en japonés:

> La función de la partícula *wa* es señalar aquello sobre lo que se va a hablar. La partícula *wa* hace del elemento que la antecede el tema de la oración. Podría traducirse al español como '*en cuanto a ...*', 'p*or lo que respecta a...*'
>
> Ej. *watashi wa mekishiko jin des.* — En cuanto a mí, soy mexicano. (Yo soy mexicano.)
> ↑
> tema de la oración

En este caso expresiones como '*watashi*', '*wa*' etc. son nombres que se dan en el metalenguaje a ciertas expresiones japonesas. Cuando se dice *'La función de la partícula wa es señalar aquello de lo que se va a hablar'* la partícula *wa*, que no forma parte del idioma español, es de lo que se habla y la expresión utilizada *'wa'* es un nombre para esta componente del idioma japonés. Es obvio que dicha partícula no se está usando en la lengua castellana para señalar aquello de lo que se va a hablar (como en el lenguaje objeto).

Podemos resumir esta distinción como sigue: en el lenguaje objeto las expresiones se *usan* mas no se *mencionan*. Por el contrario, en el metalenguaje los símbolos, las expresiones, las oraciones, etc. se usan para mencionar a las expresiones del lenguaje objeto, pero las expresiones del lenguaje objeto no se usan. Esto nos muestra de paso la necesidad de disponer en el metalenguaje de suficientes nombres para designar a las expresiones del lenguaje objeto.

Una convención muy extendida entre los lógicos es la siguiente: para construir un nombre para una expresión, ésta se coloca entre comillas simples. Por ejemplo, 'México' es el nombre del nombre de un país, mientras que "México" es el nombre del nombre del nombre de un país. Según esto, los siguientes enunciados son verdaderos:

México está en el norte de América.

'México' tiene seis letras.

y los siguientes enunciados son falsos:

'México' está en el norte de América.

México tiene seis letras.

La distinción entre lenguaje y metalenguaje es sutil y por lo general poco importante fuera de la lógica y la filosofía. Sin embargo, para poder hablar de las propiedades de los sistemas formales es necesario realizarla con toda claridad. Un sistema formal se presenta como una ordenanza simbólica que permite formar expresiones y encadenarlas según reglas precisas. Cuando se le considera como un objeto cuyas propiedades se estudian, el lenguaje usual (junto con algunos símbolos especiales para designar sus elementos) se torna en su metalenguaje. Tal fue el método que se utilizó al estudiar las propiedades del sistema ***AB*** en el apéndice **13**. Al describir sus características se recurrió al idioma español junto con ciertas expresiones para designar las componentes del sistema: símbolos 'α', 'β', 'γ' etc. para indicar fórmulas cualesquiera, símbolos 's_1', 's_2', 's_3', etc. para indicar letras del alfabeto, la expresión 'α^{-1}' para indicar la inversa de una fórmula α, etc. El sistema de expresiones así constituido es un metalenguaje para el sistema ***AB***.

Se puede hacer una distinción semejante en otras áreas. Por ejemplo, tenemos la lógica y la metalógica, la matemática y la metamatemática, etc. Un problema metageométrico es el de demostrar que el quinto postulado de Euclides es independiente de los otros cuatro. Este problema no es acerca de líneas, puntos, triángulos, etc. (como en el lenguaje objeto) sino acerca de la relación lógica que guarda el quinto postulado con los otros cuatro.

Teoremas y metateoremas. Tenemos la noción de derivación formal dentro del lenguaje objeto y la noción de deducción dentro del metalenguaje. La primera no es otra cosa que el proceso formal de prueba dado por una definición precisa, mientras que la segunda no es sino la noción intuitiva de demostración de la matemática ordinaria. Puesto que la derivación formal es una operación matemática definida con precisión, es posible estudiar sus propiedades del mismo modo en que los matemáticos estudia las propiedades de los números enteros. Podemos, pues, demostrar teoremas acerca de las pruebas formales del lenguaje objeto. Estos teoremas relativos al sistema formal son llamados *metateoremas*. Los metateoremas expresan en lenguaje ordinario el resultado de las investigaciones en torno al sistema, enunciando por lo general resultados de conjunto, válidos para clases enteras de expresiones e incluso para la totalidad del sistema. Así, por ejemplo, en el estudio del sistema ***AB*** los metateoremas MT5 y MT10 exponen propiedades que pertenecen a todos los teoremas del sistema; el metateorema MT11 determina una clase de fórmulas cuyos elementos son todos teoremas; el metateorema MT12 concierne a propiedades del sistema en su conjunto, mientras que el metateorema MT13 fija la relación del sistema con otros sistemas. Todos ellos forman parte del metalenguaje. Son, en este sentido, aserciones que buscan ser comprendidas, cuyas demostraciones han de comportar convicción. Con los teoremas pasa lo contrario: son fórmulas que figuran al final de alguna prueba y que nada significan. Para saber que algo es teorema ni siquiera es necesario saber de qué trata; basta con saber que tiene una prueba. Esto significa que, a diferencia de la matemática informal, en los sistemas formales la noción de prueba no se somete a elementos subjetivos: se es una prueba por definición, no por que se cuente con la aceptación o el consentimiento de nadie.

Apéndice 15
Un cálculo deductivo para la lógica de primer orden (cálculo de predicados)

En la base de todos los sistemas formales relevantes para el programa de Hilbert (y de prácticamente todos los formalismos matemáticos) se halla la teoría de la cuantificación. Esta teoría contiene un conjunto completo de conectivas proposicionales, y los dispositivos simbólicos adecuados para el funcionamiento de la cuantificación existencial y universal —«existe», «para todo»— sobre uno o más universos de individuos.[1]

La teoría de la cuantificación tiene distintas presentaciones axiomáticas, conocidas bajo el nombre genérico de *cálculo de predicados*. Las distintas presentaciones de este cálculo se diferencian entre sí en dos aspectos: por una parte, en el léxico que utilizan; por la otra, en los axiomas y las reglas de inferencia. No obstante, todos ellos producen los mismos resultados: formalizan la noción de *consecuencia lógica*. Esto significa que todos tienen la siguiente propiedad: una fórmula A de su lenguaje es derivable a partir de un conjunto Γ de enunciados (pertenecientes al mismo lenguaje), si y sólo si A es *consecuencia lógica* de Γ, es decir, A es verdadera dondequiera que todos los elementos de Γ son verdaderos.

Veamos con detenimiento estos puntos.

Cada sistema para la teoría de la cuantificación se desarrolla en el contexto de un lenguaje simbólico específico, el cual depende del tipo de sistema que se quiere desarrollar. Por ejemplo, para la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel sólo es necesario un símbolo de relación binario «$\in$», una constante «$\varnothing$» y ningún símbolo de función, pues todas las operaciones relevantes con conjuntos se pueden definir con base en estos dos símbolos.[2] En cambio, para la aritmética de Peano se requiere de una constante «0», de dos símbolos de función binarios «+» y «·» para las operaciones de suma y producto, y de un símbolo de operación de un sólo argumento «s» para la operación sucesor (pasar al sucesor de un número). En este caso no se requiere de ningún otro símbolo de relación que el símbolo «=» para la igualdad.[3]

Podemos decir entonces que cada sistema puede contener o no símbolos de función (para representar funciones y/o operaciones), símbolos de relación (para representar relaciones entre individuos, incluyendo la relación de igualdad), y símbolos para constante (para representar individuos específicos).

---

[1] Las conectivas proposiciones mejor conocidas son cinco: «no», «y», «o», «si .. entonces ...», «si y sólo si», unas de la cuales se pueden definir en función de las otras, según enseña la lógica de proposiciones.

[2] V. gr., $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

[3] Por ejemplo, en este caso la relación de orden «$x \leq y$» se puede definir como sigue: $x \leq y \equiv_{def} \exists z\, (x + z = y)$.

Con los axiomas y las reglas de inferencia sucede algo parecido: estos varían de un autor a otro, aunque todos los sistemas coinciden en que no contienen ni axiomas ni reglas que no sean lógicos.[4]

Cuando una teoría se formaliza, lo que en realidad se hace es optar por un lenguaje específico para expresar las nociones que le son propias, y elegir un conjunto específico de hipótesis Γ que harán las veces de conjunto de axiomas para la teoría en cuestión. Estos axiomas no lógicos se añaden al conjunto de axiomas del cálculo de predicados, que aquí denotaremos con la letra Λ, para obtener un *sistema aplicado* o *teoría formal* específica. Por ejemplo, Γ puede ser el conjunto de axiomas de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos, o el conjunto de axiomas de Peano para la aritmética.

La teoría de la cuantificación, en la que sólo se consideran los axiomas lógicos, se conoce también como *lógica de primer orden*, pues en ella el uso de los cuantificadores se limita a individuos, no permitiéndose la cuantificación de funciones, propiedades, conjuntos de individuos, etc., es decir, la cuantificación de objetos de segundo orden o mayor, como cuando se dice "*todos los conjuntos* de números naturales tales que ...". Esta teoría tiene la propiedad de que en ella el conjunto de fórmulas derivables coincide con el de las *fórmulas válidas* de su lenguaje, es decir, con el conjunto de fórmulas que son verdaderas en *todas* las interpretaciones del lenguaje (i. e., en todos los universos posibles).

A continuación presentamos un conjunto de axiomas Λ para el cálculo de predicados de primer orden en el contexto de un lenguaje de carácter general, el cual incluye una infinidad de símbolos de función, símbolos de relación y símbolos de constante que pueden estar ausentes total o parcialmente en el caso de una teoría específica, a condición de que haya, al menos, un símbolo de relación.

La presentación es informal y tiene como propósito precisar un sistema de axiomas lógicos y reglas de inferencia completo para la teoría de la cuantificación.

Denotemos con L el lenguaje correspondiente. Los detalles sobre este lenguaje los podrá encontrar el lector en [Kleene, 1967, §16-§20]. El conjunto de axiomas Λ está constituido por todas las fórmulas de L con alguna de la siguientes formas:[5]

λ_1) $(A \to (B \to A)$

λ_2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

---

[4] Es decir, todos los axiomas son fórmulas válidas, y las reglas de inferencia preservan la validez de las fórmulas.

[5] Para un comentario más extenso sobre un sistema axiomas equivalente, véase el apéndice 18, en el que se explican con cierto detenimiento la nociones de validez y la completud del cálculo de predicados.

λ_3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

λ_4) $A \to (B \to (A \wedge B))$

λ_5) **a.** $(A \wedge B) \to A$; **b.** $(A \wedge B) \to B$

λ_6) **a.** $A \to (A \vee B)$; **b.** $B \to (A \vee B)$

λ_7) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

λ_8) $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$

λ_9) **a.** $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$; **b.** $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$

λ_{10}) $\forall x A(x) \to A(t)$ donde A es cualquier fórmula y t un término libre para x en A.[6]

λ_{11}) $A(t) \to \exists x A(x)$ donde A es cualquier fórmula y t un término libre para x en A.

λ_{12}) $\forall x(x = x)$

λ_{13}) $\forall x \forall y(x = y \to (A[x, x] \to A[x, y]))$[7]

Las reglas de inferencia son tres: el *modus ponens* y dos reglas para la introducción de cuantificadores:

$$MP: \frac{A, A \to B}{B} \quad I_\forall: \frac{K \to A(x)}{K \to \forall x A(x)} \quad I_\exists: \frac{A(x) \to K}{\exists x A(x) \to K} \quad \begin{pmatrix}\text{en ambos casos la variable} \\ x \text{ no figura libre en } K\end{pmatrix}$$

Se puede verificar que los axiomas son fórmulas válidas y que las reglas de inferencia conservan la validez, de donde se sigue que *todas las fórmulas derivables en este sistema son válidas*. La recíproca de esta propiedad es el teorema de completud semántica de Gödel, demostrado en 1930: *toda fórmula válida de L es derivable en este sistema.*[8]

Si utilizamos el símbolo $\vdash$ para la deducción formal y el símbolo $\models$ para la consecuencia lógica, entonces los resultados anteriores los podemos expresar en forma condensada como sigue. Sean A una fórmula y Γ un conjunto de fórmulas de la lógica de predicados:

• $\models A$ si y sólo si $\vdash A$ (Gödel, 1930).

---

[6] Es decir, si t es un término, al sustituir t en vez de x en la fórmula A ninguna de su variables queda dentro del alcance de un cuantificador que la afecte. Por ejemplo, z es libre para x en $\exists y F(y, x)$, pero no en $\forall z G(x, z)$.

[7] $A[x, y]$ denota alguna de las fórmulas que resultan al sustituir en $A[x, x]$ cero o más presencias libres (no cuantificadas) de x por y. Por ejemplo, si $A[x, x]$ es la fórmula $p(x) \to \exists z q(x, y)$, entonces $A[x, y]$ representa a cualquiera de las siguientes fórmulas: $p(x) \to \exists z q(x, z)$, $p(y) \to \exists z q(x, z)$, $p(x) \to \exists z q(y, z)$ ó $p(y) \to \exists z q(y, z)$. Se trata del *axioma de Leibniz*: dos cosas iguales tiene las mismas propiedades.

[8] Una generalización de este resultado es el teorema que mencionamos al principio de este apéndice, según el cual *una fórmula es consecuencia lógica de un conjunto de enunciados si y sólo si es derivable a partir de él en el cálculo de predicados* fue demostrado en 1949 por Leon Henkin. El lector que deseé mayor información sobre este tema podrá consultar el apéndice **18**, en el que hacemos una breve reseña del desarrollo de la lógica matemática en el siglo veinte.

• $\Gamma \models A$ si y sólo si $\Gamma \vdash A$ (Henkin, 1949)[9]

En conjunto lo que estos resultados expresan es que la noción de "deducción formal en el cálculo de predicados" es el equivalente sintáctico de la noción semántica de "consecuencia lógica". Nótese que en ambos casos se tiene un teorema existencial. Por ejemplo, la implicación «si $\models A$ entonces $\vdash A$» afirma que en caso de que la fórmula A sea válida, *existe* una prueba o derivación de A en el cálculo de predicados.

Otro enunciado existencial, éste de carácter constructivo, fue demostrado por Jacques Herbrand en 1930. Se trata del *teorema de la deducción.* Sean Γ un conjunto de fórmulas y A y B dos fórmulas cualesquiera, con B sin variables libres:

• *Si* Γ, A $\vdash$ B, *entonces* $\Gamma \vdash$ A $\rightarrow$ B.[10]

En la demostración de este teorema se indica cómo construir una derivación de $A \rightarrow B$ a partir de Γ toda vez que se conoce una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. Este resultado es una herramienta muy importante en el trabajo efectivo con el cálculo de predicados, pues habitualmente es más fácil construir una derivación de B teniendo como hipótesis adicional a la fórmula A, que derivar la fórmula $A \rightarrow B$ teniendo como hipótesis solamente a Γ. Con base en este resultado se puede probar el siguiente teorema:

• $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$ *si y sólo si* $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \ ... \wedge A_n) \rightarrow B$.[11]

Esto último nos muestra la relación existente entre la deducción a partir de hipótesis y la validez universal, pues al cambiar el símbolo de deducción formal $\vdash$ por el símbolo $\models$ para la validez resulta que $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$ si y sólo si $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ ... \wedge A_n) \rightarrow B$.

El lector encontrará una exposición completa del cálculo de predicados en los siguientes textos: [Mendelson, 1976]; [Kleene, 1952], [Kleene, 1967] y [Enderton, 1972].

---

[9] Recordemos cómo se leen estos símbolos. «$\vdash A$» significa "A es un teorema del cálculo de predicados", «$\Gamma \vdash A$» significa "A es derivable a partir del conjunto de enunciados Γ en el cálculo de predicados", «$\models A$» significa "A es una fórmula válida" y «$\Gamma \models A$» significa "A es una consecuencia lógica del conjunto Γ de enunciados".

[10] La notación Γ, A $\vdash$ B se utiliza para indicar que del conjunto $\Gamma \cup \{A\}$ se deriva la fórmula B en el cálculo de predicados (es decir, que *existe* una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$).

[11] Se utiliza la notación $A_1, A_2, ..., A_n \vdash$ B en vez de $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vdash$ B.

Apéndice 16
La teoría de Zermelo-Fraenkel como sistema formal

Veamos a manera de ejemplo cómo se construye un sistema formal para la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Al respecto, la exposición hecha al final del apéndice 8 de la teoría axiomática *ZFC* es el paso inicial para exponerla como un sistema formal. Sólo faltan dos cosas: primero, indicar en sus totalidad las reglas de construcción del lenguaje (cosa que haremos a continuación); segundo, indicar los axiomas lógicos y las reglas de inferencia, cosa que acabamos de hacer en el contexto del cálculo de predicados.

El lenguaje para la teoría de formal de conjuntos es el siguiente:

Símbolos. Los símbolos se clasifican en varias categorías, según su función.

Variables: $x_0, y_0, z_0, \ldots; x_1, y_1, z_1, \ldots; \ldots; x_n, y_n, z_n, \ldots; \ldots$

Símbolos de relación: $=$ (igualdad), $\in$ (pertenencia).[1]

Fórmulas. La fórmulas se construyen con las siguientes reglas:

Fórmulas atómicas. Si a y b son variables, entonces $a \in b$ y $a = b$ son *fórmulas atómicas.*

Fórmulas. Si ϕ y ψ son fórmulas y x es una variable, entonces son fórmulas (*compuestas*, o *moleculares*).

$$\neg\phi,\ (\phi \wedge \psi),\ (\phi \vee \psi),\ (\phi \rightarrow \psi),\ (\phi \leftrightarrow \psi),\ \forall x\phi \text{ y } \exists x\phi$$

Como sabemos, la noción de *subconjunto* no requiere de un símbolo especial "$\subseteq$", al igual que el conjunto vacío, pues éstos se puede definir como sigue:

$$x \subseteq y \equiv_{\text{def}} \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y)$$

$$\forall x(x = \varnothing \leftrightarrow \forall y\, \neg(y \in x))$$

de modo que la expresión "$x \subseteq y$" siempre se puede reemplazar por la expresión a su derecha, y el símbolo "$\varnothing$" por la fórmula "$\forall y\, \neg(y \in x)$" que sí forma parte del lenguaje. De la misma manera se pueden introducir los símbolos $\cup$, $\cap$ e $-$, para la unión, la intersección y la diferencia entre dos conjuntos, y un símbolo $\wp(x)$ para el conjunto potencia de un

---

[1] El símbolo de igualdad $=$ no es un símbolo primitivo, pues se puede definir con base en el símbolo «$\in$» para la pertenencia como sigue: $x = y \equiv_{\text{def}} \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. En cuanto a los símbolos lógicos y los símbolos de puntuación, éstos son los del cálculo de predicados, por lo que no los incluimos en la lista. A su vez, en la lista de símbolos no figura ningún símbolo de función en virtud de que todos ellos son innecesarios. No deja de ser sorprendente que todos los enunciados de la matemática clásica se puedan traducir a un lenguaje tan simple, aunque en la práctica nadie se atrevería a utilizarlo en virtud de la complejidad de las fórmulas involucradas. En este sentido, la "traducibilidad" sólo tiene un valor teórico, no práctico.

conjunto x, los cuales siempre se pueden reemplazar por expresiones en las que el único símbolo de relación que figura es la pertenencia "$\in$" y sin símbolos de función.

El conjunto de axiomas de esta teoría lo denotamos con ZFC y es el siguiente (la presentación difiere en algunos detalles de la del apéndice **8**):

ZFC_1. $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ (extensionalidad)

ZFC_2. $\forall x \neg(x \in \varnothing)$ (conjunto vacío)

ZFC_3. $\forall x \forall y \exists z \forall w(w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$ (par)

ZFC_4. $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(z \in w \wedge w \in x))$ (unión)

ZFC_5. $\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall z(z \in x \rightarrow \{z\} \in x)$ (conjunto infinito)

ZFC_6. $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge A(z))$[2] (separación)

ZFC_7. $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in x))$ (conjunto potencia)

ZFC_8. $\forall x((\neg(x = \varnothing) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \neg(y = \varnothing)) \wedge$
$\forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x \wedge \neg(y = z)) \rightarrow y \cap z = \varnothing)) \rightarrow$
$(\exists z(z \subseteq \cup x \wedge \forall w(w \in x \rightarrow \neg(z \cap w = \varnothing) \wedge$
$\forall u \forall v(u \in (z \cap w) \wedge v \in (z \cap w) \rightarrow u = v)))))$ (elección)[3]

ZFC_9. $\forall x(\neg(x = \varnothing) \rightarrow \exists y(y \in x\ \forall z \neg(z \in x \wedge z \in y)))$ (regularidad)

En la escritura de ZFC_5 hemos utilizado la siguiente abreviatura: $\{z\}$ denota al conjunto cuyo único elemento es z, cuya existencia se prueba con base en el axioma ZFC_3 tomando $x = y$. Para un comentario más extenso en torno a este conjunto de axiomas, consúltese la parte final del apéndice **8**.

Ahora presentamos una lista de teoremas que se pueden derivar en esta teoría.

T1. $ZFC \vdash (x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow x = z$

T2. $ZFC \vdash \forall x(x \subseteq x)$

T3. $ZFC \vdash (x \subseteq y \wedge y \subseteq z) \rightarrow x \subseteq z$

T4. $ZFC \vdash \forall x(\varnothing \subseteq x)$

T5. $ZFC \vdash x \in \{x, y\}$

T6. $ZFC \vdash x \in \{x\}$

T7. $ZFC \vdash \forall x \forall y(y \in \{x\} \leftrightarrow y = x)$

T8. $ZFC \vdash \forall x \forall y(\{x\} \in y \leftrightarrow x \in y)$

T9. $ZFC \vdash (\{x, y\} \subseteq z \rightarrow (x \in z \wedge y \in z))$

T10. $ZFC \vdash \neg \exists z(z \in x \wedge z \in \{x\})$

T11. $ZFC \vdash \forall x \neg(x \in x)$

[2] donde $A(z)$ es una fórmula de L (es decir, se tiene un axioma para cada fórmula A).

[3] Este axioma se podría escribir de manera breve si tuviéramos a la mano una símbolo de función «e» de un argumento. En tal caso, podríamos escribir simplemente $\forall x(\neg(x = \varnothing) \rightarrow ex \in x))$ (para cada conjunto no vacío, la función elige un elemento de él).

Demostremos, por ejemplo, T1 con base en el teorema de la deducción.

1. $x \subseteq y \wedge y \subseteq x$ Hip.
2. $(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow x \subseteq y$ Ax. λ_5,a del CP (ver apéndice 15)
3. $x \subseteq y$ MP 1, 2
4. $(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow y \subseteq x$ Ax. λ_5,b
5. $y \subseteq x$ MP 1, 4
6. $\forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y)$ quitando la abreviatura en 3
7. $\forall z\,(z \in y \rightarrow z \in x)$ quitando la abreviatura en 5
8. $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow (z \in x \rightarrow z \in y)$ Ax. λ_{10}
9. $z \in x \rightarrow z \in y$ MP 6, 8
10. $\forall z\,(z \in y \rightarrow z \in x) \rightarrow (z \in y \rightarrow z \in x)$ Ax. λ_{10}
11. $z \in y \rightarrow z \in x$ MP 7, 10
12. $(z \in y \rightarrow z \in x) \rightarrow ((z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow (z \in x \leftrightarrow z \in y))$ Ax λ_8
13. $(z \in x \rightarrow z \in y) \rightarrow (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ MP 11, 12
14. $(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ MP 11, 13
15. $\forall x(x = x)$ Ax. λ_{12}
16. $(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (\forall x(x = x) \rightarrow (z \in x \leftrightarrow z \in y))$ Ax. λ_1
17. $\forall x(x = x) \rightarrow (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ MP 14, 16
18. $\forall x(x = x) \rightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ $I_\forall$, 17
19. $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ MP 15, 19.
20. $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ Ax. ZFC_1
21. $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \rightarrow \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ Ax. λ_{10}
22. $\forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ MP 20, 21
23. $\forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \rightarrow (\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ Ax. λ_{10}
24. $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$ MP 22, 23
25. $x = y$ MP 19, 24.

Por tanto,

$$ZFC,\ x \subseteq y \wedge y \subseteq x \vdash x = z$$

y por el teorema de la deducción tenemos que

$$ZFC \vdash (x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \rightarrow x = z.$$

Apéndice 17
Un sistema formal para la aritmética de Peano

El sistema *AP* para la aritmética de los números naturales. El lenguaje L_{AP} es muy reducido: sólo tiene un símbolo de relación para la igualdad «=», una constante «*0*» y tres símbolos de operación: «*s*» (sucesor), «+» (suma) y «·» (producto). Por comodidad, en vez de escribir la suma en la forma $+(x, y)$ escribiremos, como es usual, $x + y$, pudiéndose decir lo mismo para el producto (notación infija). El sistema de axiomas *AP* es el siguiente:

Axiomas para la igualdad

$x = x$	(Identidad)
$x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$	(Axioma de Leibniz)

Axiomas aritméticos

$\neg(sx = 0)$	(axiomas para el sucesor)
$sx = sy \rightarrow x = y$	
$x + 0 = x$	(axiomas para la suma)
$x + sy = s(x + y)$	
$x \cdot 0 = 0$	(axiomas para el producto)
$x \cdot sy = x \cdot y + x$	
$(A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(sx)) \rightarrow A(x)$	(axiomas de inducción)

A partir de estos axiomas se derivan, en el cálculo de predicados, los teoremas aritméticos de la aritmética de primer orden. Dada la inexistencia de un símbolo especial para cada número natural, dichos números se representan mediante las expresiones *s0*, *ss0*, *sss0*, etc. que por comodidad escribimos $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, etc.; asimismo, aunque el lenguaje no tiene signos especiales para relaciones como la desigualdad o la divisibilidad, éstas se pueden definir mediante predicados aritméticos «$x < y$» y «$x \mid y$» como sigue:

$x \leq y \equiv_{\text{def}} \exists z(x + z = y)$	x es menor o igual que y.
$x < y \equiv_{\text{def}} \exists z(\neg(z = 0) \wedge x + z = y)$	x es estrictamente menor que y.
$x \mid y \equiv_{\text{def}} \exists z(x \cdot z = y)$	x es un divisor de y.

Asimismo, la propiedad de ser un número primo se puede definir de la siguiente manera:

$prim(x) \equiv_{\text{def}} x > \overline{1} \wedge \forall z(z \mid x \rightarrow (z = \overline{1} \vee z = x))$ x es un número primo.

Apéndice 18
La lógica matemática en el siglo XX

El siguiente es el texto casi íntegro de una artículo que publiqué en la revista *Miscelánea Matemática* de la Sociedad Matemática Mexicana bajo el mismo título. Considero de interés su reproducción en este lugar a fin de ofrecer un resumen de algunos resultados de suma importancia para la lógica en el siglo veinte, muchos de los cuales tiene que ver con los temas que nos ocupan. El lector encontrará que algunos pasajes se traslapan con lo dicho en el texto principal de esta tesis y en otros apéndices, más esto no se puede evitar: las ideas fluyeron de un trabajo al otro, y considero que no tiene mucho sentido rehacer este escrito a fin de evitar las repeticiones, pues con ello romperíamos la visión de conjunto que ofrece. Valgan, pues, las redundancias.

* * *

La lógica formal tiene una larga historia que se remonta a la Grecia antigua. Objeto de largos períodos de olvido, todo parecía indicar, como lo dijera Kant en un célebre pasaje de la *Crítica de la razón pura*, que tras la intervención de Aristóteles poco o nada quedaba por hacer en ella.[1] Nada más alejado de la verdad. Como prueba, el siglo XX nos reveló un mundo en el que en vez de la fría silogística encontramos una diversidad de nuevas teorías jamás imaginadas por Kant y sus contemporáneos. Sin lugar a dudas, una de las causas de tal florecimiento fue la incorporación de la lógica a las matemáticas, con la consiguiente adopción de sus métodos y procedimientos: una fuerte simbolización, el uso de conceptos mediante definiciones, novedosos métodos de prueba y el recurso al método axiomático. La lógica se matematizó, sobre todo en los trabajos de Russell, Löwenheim y Hilbert, y con ello ambas disciplinas se enriquecieron.

Y si bien en un principio el interés de esta naciente disciplina se centró esencialmente en el problema de los fundamentos de la matemática, en donde logró sorprendentes resultados, hoy en día desborda con mucho esa esfera, y se desarrolla básicamente en cuatro direcciones: la *teoría de la demostración*, la *teoría de modelos*, la *aritmética recursiva* y la *teoría de conjuntos*, con todas las reservas que un intento clasificatorio de esta naturaleza merece.

En este trabajo me propongo reseñar algunos resultados significativos que darán una idea de lo acontecido en esta disciplina en el siglo XX. Obviamente, por razones de

[1] «Que la lógica ha tomado este camino seguro desde los tiempos más antiguos es algo que puede inferirse del hecho de que no ha necesitado dar un paso atrás desde Aristóteles [...]. Lo curioso de la lógica es que tampoco haya sido capaz, hasta hoy, de avanzar un solo paso. Según todas las apariencias se halla, pues, definitivamente concluida.» Kant, CPR, BVIII.

espacio me he limitado a aquellos logros que considero de mayor relevancia, sin que ello signifique que veo con desdén muchos otros que merecidamente deberían figurar en un trabajo de mayor extensión. Mi propósito es tan sólo ofrecer un panorama de un vasto territorio que no puedo describir en su totalidad en un espacio tan reducido. Muchos temas se omitieron por completo, como por ejemplo las lógicas no clásicas, la lógica intuicionista, el análisis constructivo y las pruebas de consistencia para fragmentos de la matemática clásica. Incluso en las áreas que menciono no tengo la pretensión de decir todo lo que fue importante. Más bien la selección estuvo influenciada por mis preferencias y por la elegancia o simplicidad de los temas escogidos. Un caso aparte lo constituyen la teoría de conjuntos y todo lo relativo a las ciencias de la computación, temas de los que no hablaré en virtud de que, en el primer caso, ya hay una sección dedicada a este tema en el texto principal, y en el segundo el tema es un tanto irrelevante para nuestros propósitos.

Como punto de partida, en los apartados §1 y §2 expongo las nociones y resultados básicos de la lógica y el cálculo de predicados, sustrato común a todos los desarrollos subsiguientes.

§1 Lógica de proposiciones y lógica de predicados

Aunque desde el siglo XIX ya se contaba con el álgebra de la lógica de George Boole y la teoría de la cuantificación de Gottlob Frege, una de las primeras tareas de la lógica en el siglo XX fue elaborar un cálculo adecuado para la deducción lógica. Para ello, fue necesario precisar un lenguaje de fácil manejo y abordar las cuestiones de consistencia, completud e independencia de los sistemas axiomáticos.

Un rasgo de la lógica matemática en el siglo XX es el uso de letras y combinaciones de letras para representar proposiciones. Estas letras, que hacen las veces de variables proposicionales, son su verdadero objeto de estudio, y no las proposiciones reales que supuestamente representan.

En la lógica de proposiciones una proposición se define como una variable p, q, r, ... (con o sin subíndices) o alguna de las combinaciones «no P», «P y Q», «P o Q», «si P entonces Q» y «P si y sólo si Q», donde P y Q representan proposiciones.

Si bien en el siglo XX se adoptaron distintas notaciones para los *conectivos lógicos* «no», «y», «o», «implica» y «si y sólo si», todas ellas comparten la cualidad de seguir un orden lineal (a diferencia de Frege, que utilizaba esquemas bidimensionales). En la siguiente tabla presentamos los símbolos más frecuentes.

Equivalente en español	Russell y Whitehead	Hilbert y Ackermann	Notación polaca	Escuela de Münster	Otras notaciones
p y q	$p \cdot q$	$p \,\&\, q$	Kpq	$p \wedge q$	pq
p o q	$p \vee q$	$p \vee q$	Apq	$p \vee q$	$p + q$
Si p entonces q	$p \supset q$	$p \rightarrow q$	Cpq	$p \rightarrow q$	$p \Rightarrow q$
no p	$\sim p$	$\bar{p}$	Np	$\bar{p}$	p', $-p$, $\neg p$
p si y sólo si q	$p \equiv q$	$p \sim q$	Epq	$p \leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$

Lógica proposicional.- Estrictamente hablando, la *lógica proposicional* es aquella parte de la lógica que trata con argumentos cuya validez sólo depende del modo en que las proposiciones se combinan mediante los conectivos, no de su estructura interna. Por ejemplo, el argumento

$$\frac{p \vee q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow s}{r \vee s}$$

es válido independientemente de la estructura interna de las proposiciones p, q, r y s. La teoría semántica de la lógica proposicional exige que cada proposición sea verdadera o falsa. Por tanto, las variables proposicionales sólo pueden adoptar dos valores, que por comodidad denotamos con 1 y 0 y denominamos *valores de verdad*. Dada un proposición compuesta, el valor de ésta lo podemos determinar a partir del valor de las variables que la integran, conforme a las siguientes tablas para los conectivos, conocidas como *tablas de verdad*:[2]

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

¿Cómo se determinaron las tablas? En general, analizando el uso de los conectivos en el lenguaje ordinario, con la excepción de la implicación «→», para la que el uso común no era suficiente. En efecto, éste nos dice que una proposición verdadera no implica nada falso (lo cual da cuenta de los dos primeros renglones de la tabla), pero no indica qué

[2] Quizá el lector está familiarizado con este método, desarrollado por Emile Post y Ludwig Wittgenstein, y con nociones tales como las de *tautología* y *contradicción*. Véase, Mendelson, 1979, cap. 1.

ocurre cuando el antecedente es falso. La elección de la tabla se hizo con base en la idea de que de una proposición falsa se sigue cualquier cosa, falsa o verdadera.[3]

La tabla de una proposición formada con dos variables distintas tiene 4 renglones. Dado que en cada renglón la casilla correspondiente la podemos llenar con uno de dos valores posibles, es claro que hay $2^4 = 16$ funciones de verdad de dos variables. Generalizando este resultado tenemos que para una proposición compuesta por n variables distintas hay 2^n combinaciones de valores de verdad para sus componentes (verdadera = 1, falsa = 0), y que por lo tanto hay 2^{2^n} funciones de verdad de n argumentos. Este hecho posibilita el análisis exhaustivo de las fórmulas proposicionales mediante las tablas de verdad, y es un rasgo distintivo de esta lógica. En resumen, si denotamos con V al conjunto $\{1, 0\}$, veremos que toda proposición con n variables proposicionales distintas se identifica con una *función de verdad* de V^n en V.

Entre las funciones de verdad, dos clases llaman la atención: la de las *tautologías*, cuyo valor es siempre 1, y la de las *contradicciones*, cuyo valor es siempre 0. A la primera pertenecen todas aquellas proposiciones que son verdaderas en virtud de su estructura, independientemente de lo que pudieran significar, y son de especial interés para la lógica. A la segunda pertenecen aquellas proposiciones que son falsas al margen de toda circunstancia.

En general el comportamiento de las funciones de verdad corresponde al de un álgebra de Boole y han sido utilizadas con éxito en el diseño de circuitos eléctricos, donde cada letra representa un interruptor eléctrico, y los valores 1 y 0 indican simplemente si el interruptor se encuentra cerrado (pasa corriente) o abierto (no pasa corriente). Esto último nos deja ver que los valores 1 y 0 asignados a las letras p, q, r, etc. son objetos abstractos y no "la verdad" y "la falsedad".

Cálculo proposicional de Hilbert y Ackermann. Pasemos de la teoría semántica a la teoría sintáctica de la lógica proposicional. En este dominio uno de los primeros objetivos fue desarrollar un *cálculo* deductivo para probar tautologías. Para ello fue necesaria una definición sintáctica de lo que es una proposición, seleccionar ciertas proposiciones como axiomas y establecer reglas de inferencia también sintácticas conforme a las cuales procede la deducción lógica.

[3] En el lenguaje coloquial hay un uso que respalda esta elección. Por ejemplo, cuando queremos ridiculizar las hipótesis en que se basa un argumento, calificándolas como "falsas", decimos "Sí, claro, si mi abuelita tuviera ruedas, sería bicicleta", dando a entender que de algo falso se sigue cualquier cosa.

Aunque desde Frege se conocía un cuadro de axiomas consistente y completo para las tautologías, en esta ocasión hemos seleccionado, con leves modificaciones, el sistema axiomático *HA* de Hilbert y Ackermann para la lógica de proposiciones (1928).[4]

Denotemos con L_{HA} el lenguaje indicado al comienzo de §1, con la salvedad de que sólo se consideran los conectivos $\neg$ y $\vee$ (los otros se puede definir con base en ellos).[5]

Los axiomas del sistema son todas las fórmulas con alguna de la siguientes formas:

1) $(A \vee A) \rightarrow A$ 2) $A \rightarrow (A \vee B)$

3) $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$ 4) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C))$.

La única regla de inferencia es *modus ponens*: de A y $A \rightarrow B$ se infiere B.[6]

En este contexto una *prueba* es una sucesión finita de fórmulas cada una de la cuales es un axioma, o se infiere por *modus ponens* de fórmulas anteriores a ella en la sucesión.

Consistencia y completud. Con el método de las tablas de verdad no es difícil comprobar que todos los axiomas son tautologías, y que si A y $A \rightarrow B$ son tautologías, entonces B también lo es, de donde se sigue que *todas las proposiciones demostrables en HA son tautologías.*

Esto significa, por ejemplo, que $p \wedge \neg p$ no es derivable en *HA*, pues no es una tautología. Es más, dado que la negación de una tautología es una contradicción, resulta que si una proposición A es derivable en *HA*, su negación $\neg A$ no es derivable, por lo que el sistema axiomático se dice que es *consistente* (es imposible derivar en él una fórmula y su negación).

Aun más notable es el hecho de que el recíproco del enunciado anterior también es cierto: *todas las tautologías son demostrables en HA*, es decir, *HA* es *completo* respecto a las tablas de verdad. Esto lo demostró Emile Post en 1921 para el sistema de Russell y Whitehead de *Principia Mathematica*, el cual resulta equivalente.

Otra propiedad interesante del sistema *HA*, conocida como *teorema de la deducción*, fue demostrada por Jacques Herbrand en 1930: *si al añadir una proposición* A *a los axiomas de* HA *se puede inferir una proposición* B, *entonces la proposición* A $\rightarrow$ B *es derivable en* HA.

---

[4] *V.* Hilbert y Ackermann, 1928, §10.

[5] En este sistema los conectivos $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ se pueden definir con base en el conjunto $\{\neg, \vee\}$ como sigue:

$$A \rightarrow B \equiv_{def} \neg A \vee B;\ A \wedge B \equiv_{def} \neg(\neg A \vee B) \text{ y } A \leftrightarrow B \equiv_{def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

[6] Como el lector notará, las conectivas básicas no son las misma que las ofrecidas en el apéndice 15, y los axiomas (1)-(4) no corresponden a los axiomas λ_1-λ_3. No obstante, los sistemas resultantes son equivalentes, en el sentido de que prueban la misma clase de teoremas (en este caso, tautologías).

<u>Métodos de decisión</u>. Las tablas de verdad proporcionan un procedimiento mecánico para decidir si una proposición es una tautología o no. Dado que las proposiciones derivables en *HA* coinciden con las tautologías, se sigue que las tablas de verdad constituyen un *procedimiento de decisión* para la demostrabilidad en *HA*, lo cual se expresa diciendo que *HA* es *decidible*. Como veremos, esta propiedad no la comparten otros sistemas axiomáticos más complejos que éste. De hecho, el problema de la decisión se convirtió en un tema de intensa investigación en el siglo XX, y lo podemos resumir así: *dado un conjunto de axiomas y reglas de inferencia, determinar un procedimiento mecánico para decidir si una fórmula de su lenguaje es deducible o no de los axiomas.*

Lógica de predicados. La *lógica de predicados* es aquella parte de la lógica que trata con argumentos cuya validez no sólo depende del modo en que las proposiciones se combinan mediante los conectivos, sino de su estructura interna, y es una extensión de la lógica de proposiciones. Por ejemplo, el siguiente argumento no se puede justificar con base en la tablas de verdad:[7]

$$\frac{\text{Todos los hombres son mortales, Sócrates es un hombre}}{\text{Sócrates es mortal}}$$

Para expresar la estructura interna de las proposiciones, en el siglo XX se introdujeron, además de variables y constantes para individuos, los cuantificadores *existencial* y *universal*. En la siguiente tabla presentamos los símbolos más frecuentes para estos operadores:

Equivalente en español	Russell y Whitehead	Hilbert y Ackermann	Kleene	Otras notaciones
Para todo x, $p(x)$	$(x)p(x)$	$(x)p(x)$	$\forall xp(x)$	$\wedge_x p(x)$, $\Pi_x p(x)$
Existe un x tal que $p(x)$	$(\exists x)p(x)$	$(\mathrm{E}x)p(x)$	$\exists xp(x)$	$\vee_x p(x)$, $\Sigma_x p(x)$

Con esta notación el silogismo anterior lo podemos expresar así:

$$\frac{\forall x(h(x) \rightarrow m(x)),\ h(s)}{m(s)}$$

La semántica de la lógica de predicados es muchos más compleja y menos satisfactoria que la de la lógica de proposiciones. Como su nombre lo indica, en ella las proposiciones se analizan en sujeto y predicado, donde el término *predicado* lo utilizamos en un sentido general hasta abarcar no sólo propiedades de individuos, sino propiedades de conjuntos

[7] La representación de este argumento en la lógica proposicional es demasiado simple para dar cuenta de él: $\frac{p,\ q}{r}$

finitos y ordenados de individuos, como cuando se dice «6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3».

Para representar predicados la nueva lógica se valió de la notación funcional $f(x)$, $g(x, y)$, $h(x, y, z)$, etc. para funciones de uno o más argumentos. Esta notación, tomada del análisis por Frege, se extendió rápidamente a principios del siglo XX y desde entonces se utiliza para denotar funciones proposicionales, es decir, funciones que tiene como dominio un conjunto de individuos y como imágenes proposiciones acerca de dichos individuos. Por ejemplo, la relación «x es el mínimo común múltiplo de y y z» la podemos representar con una función $m(x, y, z)$ de tres argumentos, de modo que la proposición «6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3» se escribe $m(6, 2, 3)$.[8] Esta notación trajo consigo un cambio significativo, y pronto mostró su eficacia en el análisis de la estructura lógica de las teorías matemáticas.

En la teoría semántica de la lógica de predicados se supone dado un conjunto U de individuos, denominado *dominio* de interpretación. Dado un predicado $P(x_1, ..., x_n)$ de n argumentos, una *interpretación* I de P es una asignación P^I de valores de verdad a todos los individuos de U^n. La idea es que un conjunto de individuos $(a_1, ..., a_n)$ de U^n está en la "relación" P^I si y sólo $P^I(a_1, ..., a_n) = 1$. La reglas que determinan el valor de verdad para las fórmulas construidas con los conectivos y los cuantificadores son obvias. En este contexto decimos que una fórmula es *satisfacible* sobre un dominio si hay una interpretación que la hace verdadera para algunos individuos.

Un problema que se presenta en este punto es que cuando el dominio U es infinito, no podemos generar todas las interpretaciones posibles de un predicado P, de modo que el concepto de la *totalidad de interpretaciones* permanece como algo impreciso. De hecho, en muchos casos al establecer una interpretación resulta imposible indicar para un predicado el valor de verdad correspondiente a cada conjunto de argumentos.

Lo anterior se debe a que, además de los conectivos, la lógica de predicados incluye los operadores $\forall$ y $\exists$ para expresar la universalidad y la existencia. Cuando el dominio de interpretación es finito, digamos $D = \{d_1, ..., d_n\}$, el uso de los cuantificadores es en cierto sentido superficial. Por ejemplo, podemos añadir al lenguaje constantes individuales $a_1, ..., a_n$ para representar a los elementos de D, de modo que $\forall x P(x)$ será verdadera bajo una interpretación I si y sólo si la fórmula $P(a_1) \wedge ... \wedge P(a_n)$ también lo es bajo I. En cambio, cuando el dominio U es infinito esto último no lo podemos hacer, y cabe la posibilidad de

[8] En la lógica moderna la notación funcional se utiliza también para representar funciones en el sentido usual de la palabra, es decir, operaciones con individuos (suma, producto, etc.). Por ejemplo, la suma de dos números naturales a y b la podemos representar con $f(a, b)$, $+(a, b)$, o incluso $a + b$, como es usual.

que no podamos decidir si la propiedad P^I es válida o no para todos los individuos, o si lo es para alguno de ellos, es decir, no podamos decidir si $\forall xP(x)$ y $\exists xP(x)$ son verdaderas o no. No obstante, la teoría semántica de la lógica de predicados pasa por alto tales dificultades, y pretende que todas las fórmulas cerradas (sin variables libres) tienen sentido incluso cuando no hay manera de verificarlas.

El concepto de modelo. La noción semántica más importante de la lógica de predicados es la noción de *modelo*. De hecho, una rama de la lógica matemática, la *teoría de modelos*, se ocupa de ella con sorprendentes resultados. Introducimos el concepto en relación al lenguaje de Hilbert y Ackermann, que denotamos por L_{HAP}.

El lenguaje L_{HAP} es muy simple. Consiste de un conjunto infinito de variables individuales $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$; un conjunto infinito de predicados $F, G, H, F_1, G_1, H_1, \ldots$ cada uno de los cuales tiene asociado un número natural llamado *orden* o *grado* del predicado (número de argumentos), los conectivos $\neg$ y $\vee$, los cuantificadores $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe) y los símbolos de puntuación) y (.

Adicionalmente, el lenguaje puede contar con un conjunto de constantes individuales tomadas del conjunto $a, b, c, a_1, b_1, c_1, \ldots$ y el símbolo $=$ para la igualdad (de grado 2).

Sea I una interpretación de todos los predicados del L_{HAP}. Con base en la tablas de verdad y la idea de que una fórmula $\forall xA$ [$\exists xA$] es verdadera en caso de que A lo sea para todos [algunos] elementos de U, I determina un valor de verdad para todas las fórmulas cerradas (fórmulas sin variables libres, o *enunciados*) de L_{HAP}. En particular, si todas las fórmulas de un conjunto de enunciados Γ son verdaderas bajo I, decimos que I es un *modelo* de Γ.

A su vez, de una fórmula A decimos que es *válida* cuando es verdadera bajo todas las interpretaciones de L_{HAP}, en cuyo caso escribimos $\models A$. Las fórmulas válidas son verdaderas en virtud de su estructura lógica, no por lo que pudieran significar.

Con base en estos conceptos la noción de *consecuencia lógica* se definió así: una fórmula A es *consecuencia lógica* de un conjunto de fórmulas Γ, si A es verdadera en todos los modelos de Γ (es decir, si A es verdadera siempre que todos los elementos de Γ lo son), en cuyo caso se escribe $\Gamma \models A$.[9]

---

[9] En relación a la noción de consecuencia lógica, las fórmulas válidas son consecuencia lógica de cualquier conjunto de hipótesis Γ, incluyendo al conjunto vacío $\varnothing$. Es por ello que se dice que su verdad es incondicionada. Por ejemplo, las siguiente fórmulas son válidas: $\exists x\forall yH(x, y) \rightarrow \forall y\exists xH(x, y)$ y $\forall xF(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg F(x)$; en cambio, la recíproca de la primera de ellas no lo es: $\forall y\exists xH(x, y) \rightarrow \exists x\forall yH(x, y)$; piénsese en el siguiente ejemplo: si bien todos los individuos tienen un padre, no hay un individuo que sea el padre de todos los demás.

Las nociones de *verdad* y *validez* son altamente no constructivas, ya que en general no podemos decir si un enunciado es verdadero en un dominio infinito, y la noción de "todos los dominios" no tiene un sentido muy preciso. Esta fue una de las razones para desarrollar una teoría sintáctica para la lógica de predicados, en la que la prueba formal adoptó el mismo carácter constructivo que en el cálculo proposicional. De hecho, una de las conquistas más grandes de la lógica en el siglo XX fue el establecimiento de un vínculo preciso entre la noción de *prueba* en una teoría formal, y la noción de *consecuencia lógica*. Esto se logró a través de la construcción de un cálculo deductivo que es consistente y completo respecto a la clase de la fórmulas válidas, hecho que demostró Gödel en 1930.[10] En el siguiente apartado mostramos, con leves modificaciones, un sistema axiomático para la lógica (restringida) de predicados debido a Hilbert y Ackermann.

Cálculo restringido de predicados de Hilbert y Ackermann (1928). La formalización de la lógica de predicados es análoga a la de la lógica de proposiciones: se seleccionan ciertas fórmulas como axiomas y establecen reglas de inferencia.

Consideremos el lenguaje L_{HAP} de la sección anterior. Los axiomas del sistema *HAP* son los del cálculo proposicional más todas las fórmulas con alguna de la siguientes formas:

5) $\forall v A(v) \rightarrow A(t)$ donde A es cualquier fórmula y t un término libre para v en A.[11]

6) $A(t) \rightarrow \exists v A(v)$ donde A es cualquier fórmula y t un término libre para v en A.

Las reglas de inferencia son el *modus ponens* y las siguientes reglas para la introducción de cuantificadores:

$$I_\forall: \frac{K \rightarrow A(v)}{K \rightarrow \forall v A(v)} \qquad I_\exists: \frac{A(v) \rightarrow K}{\exists v A(v) \rightarrow K} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{en ambos casos la variable} \\ v \text{ no figura libre en } K\end{array}\right).$$

No es difícil verificar que los axiomas son fórmulas válidas y que las reglas de inferencia conservan la validez, de donde se sigue que *todas las fórmulas demostrables en HAP son válidas*.

---

[10] La *sintaxis* trata con la estructura formal de los lenguajes, y comprende nociones tales como las de *deducibilidad formal* y *consistencia*. La semántica, por el contrario, se refiere a la interpretación o significado de los símbolos y comprende nociones tales como las de *satisfacción*, *verdad* y *validez*. Aquí, por conjunto de fórmulas *consistente* se entiende un conjunto de fórmulas Γ del que no es posible deducir fórmulas contradictorias, es decir, para el que no hay una fórmula A tal que $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$.

[11] Es decir, si t es una variable, al sustituir t en vez de v en la fórmula A ninguna de las presencias sustituidas está dentro del alcance de un cuantificador en t. Por ejemplo, z es libre para x en $\exists y F(x)$, pero no en $\forall z G(x, z)$.

De lo anterior se sigue, por ejemplo, que $\forall y\exists xH(x, y) \rightarrow \exists x\forall yH(x, y)$ no es derivable en *HAP*, pues no es válida. Dado que la negación de una fórmula válida no lo es, resulta que si un enunciado *A* es derivable en *HAP*, su negación $\neg A$ no es derivable, por lo que el sistema axiomático es *consistente*.

El *teorema de la deducción* también se cumple para el sistema *HAP*, aunque con algunas restricciones: *si al añadir una proposición* A *a los axiomas de* HAP *podemos inferir una proposición* B, *entonces la proposición* A → B *es derivable en* HAP *siempre que en la derivación no hayamos aplicado ninguna de las reglas* $I_\forall$ *o* $I_\exists$ *respecto a una variable que figure libre en* A.

Finalmente, para obtener el cálculo restringido de predicados con igualdad debemos añadir a los axiomas anteriores ciertas fórmulas cuya presentación diferimos hasta exponer una teoría formal para la aritmética.

Otras propiedades del sistema *HAP* serán expuestas en la siguiente sección.

§2 Teoría de modelos/1

El primer teorema importante en la teoría de modelos fue demostrado por Leopold Löwenheim en 1915; en él establece la posibilidad de satisfacer en el dominio de los números naturales cualquier enunciado que sea satisfacible en un dominio infinito: *si un enunciado tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo numerable.*[12]

En 1920 Toralf Skolem generalizó este resultado. Por el *cardinal* del un lenguaje *L* entendemos la cardinalidad del conjunto de símbolos de *L*. Como los lenguajes para la lógica de predicados siempre cuenta con un conjunto numerable de variables, su cardinalidad es al menos $\aleph_0$ (son al menos numerables). Skolem demostró el siguiente teorema: *si un conjunto de enunciados pertenecientes a un lenguaje* L *(de cardinalidad* λ*) tiene un modelo infinito de cardinalidad* α, *también tiene un modelo de cardinalidad* β *para todo número transfinito* β que satisfaga $\lambda \leq \beta \leq \alpha$ (*teorema de Löwenheim-Skolem*).

Dado que la demostración de este teorema dependía del polémico axioma de elección, en 1922 Skolem ofreció una prueba de un caso especial sin recurrir a dicho principio: *si un conjunto de enunciados numerable tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo numerable* (es decir, un modelo de cardinalidad $\aleph_0$).

---

[12] La infinitud se refiere a la cardinalidad del dominio *D* de interpretación.

Una consecuencia de lo anterior es la llamada *paradoja de Skolem*. Con base en un lenguaje numerable podemos formalizar un fragmento T de la teoría de conjuntos y demostrar ahí el enunciado p que afirma que el sistema $\Re$ de los números reales no es numerable (es decir, que *card* $\Re > \aleph_0$). Ahora bien, en caso de que T tenga un modelo (para lo cual, como veremos, basta con que sea consistente) por el teorema de Skolem sabemos de la existencia de un modelo numerable, digamos M. ¡En M, el enunciado p es verdadero, a pesar de que todo lo que hay en M es numerable! Obviamente, se trata de un resultado adverso a nuestras expectativas, no de una contradicción. No hay inconsistencia por lo siguiente: la proposición que afirma que $\Re$ es no numerable se formaliza diciendo que «no existe una función $f: \Re \rightarrow N$ que sea uno a uno». Como sabemos, en M hay un objeto del dominio D que representa a los números reales (digamos $\Re'$), otro que representa a los números naturales (digamos N'), y muchos otros objetos que representan funciones. En este contexto decir que los reales no son un conjunto numerable significa simplemente que no hay en M un objeto que satisface la condición de «ser una función uno a uno de $\Re'$ en N'», aunque fuera de M podamos ver que sí existe tal función. La moraleja es la siguiente: el teorema de Löwenheim-Skolem nos muestra que ningún conjunto de enunciados en un lenguaje de primer orden que tenga un modelo infinito es capaz de determinar el cardinal de sus modelos: una limitación del método axiomático y del poder expresivo de esta clase de lenguajes.[13]

En 1935 Alfred Tarski demostró una forma ascendente del teorema de Löwenheim-Skolem: *si un conjunto de enunciados pertenecientes a un lenguaje* L *(de cardinalidad* $\lambda \geq \aleph_0$*) tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo de cardinalidad* α *para cada* $\alpha \geq \lambda$.

Las dos formas del teorema de *Teorema de Löwenheim-Skolem* (ascendente y descendente) tienen notables consecuencias. La primera nos muestra que una teoría puede tener modelos inesperadamente grandes, y la segunda que puede tener modelos inesperadamente pequeños. Como un ejemplo de lo primero consideremos los axiomas de Peano para la aritmética de los números naturales N. Conforme a la forma ascendente del teorema de Löwenheim-Skolem, dicha teoría tiene modelos no numerables. Tales modelos son conocidos como *modelos no estándar para la aritmética*. Un ejemplo de lo segundo es el modelo numerable para la teoría de conjuntos recién mencionado.

El teorema de completud extendida. Hacia 1930 las investigaciones en torno a la sintaxis y la semántica de los lenguajes de primer orden habían avanzado lo suficiente

[13] Un lenguaje de primer orden es aquel en el que la cuantificación se limita a individuos, no permitiéndose cuantificar conjuntos de individuos, relaciones o funciones.

como para precisar el vínculo entre la consistencia y derivabilidad formal por una parte, y la consecuencia lógica y los modelos, por la otra. Ese año Gödel demostró el que quizá sea el resultado más importante de la lógica matemática en el siglo XX. Nos referimos al *teorema de completud extendida*, según el cual *todo conjunto de enunciados consistente es satisfacible en el dominio de los números naturales* (asumiendo que el lenguaje es numerable).[14]

Lo sorprendente de este resultado es que establece un vínculo entre una noción sintáctica (la consistencia) y una noción semántica (la satisfacibilidad), mostrando que entre ellas reina una perfecta armonía. Y si bien su demostración no es constructiva (no indica cómo se construye el modelo), de él se siguen importantes consecuencias, como las siguientes:

1) *Un enunciado* A *es válido si y sólo si es válido en el dominio de los números naturales* (es decir, verdadero bajo todas las interpretaciones sobre *N*).
2) *Si un enunciado* A *no es derivable en* HAP, *entonces* ¬A *es satisfacible en el dominio de los números naturales* (esto se debe a que en tal caso *A* es consistente con los axiomas de *HAP*).
3) *Si un enunciado* ¬A *es inconsistente con los axiomas de* HAP, *entonces* A *es derivable en* HAP.

En efecto, al añadir $\neg A$ como axioma se obtiene un sistema inconsistente en el que toda fórmula es demostrable, incluyendo a A. Por tanto, por el teorema de la deducción, $\neg A \rightarrow A$ es derivable en *HAP* y por ende A (pues $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ es una tautología). En breve:

4) *Toda fórmula válida de* L_{HAP} *es derivable en* HAP, es decir, HAP es *completo* respecto a las fórmulas válidas (teorema de completud semántica).

Además de estos teoremas, Gödel demostró una extensión del teorema anterior en que vincula las nociones de *consecuencia lógica* y *deducibilidad a partir de hipótesis*:

5) *Una fórmula* A *de* L_{HAP} *es deducible en* HAP *a partir de un conjunto* Γ *de hipótesis si y sólo si* A *es consecuencia lógica de* Γ.

De este modo, en la lógica de predicados las nociones de «consecuencia lógica» y «deducibilidad formal» coinciden plenamente. Los lógicos se refieren a la parte «si $\Gamma \models_{HAP} A$, entonces $\Gamma \vdash A$» como *correctud*, y a la parte «si $\Gamma \models_{HAP} A$, entonces $\Gamma \vdash A$» como *completud* (semántica). Otra consecuencia notable del teorema de completud es el *teorema de finitud* o *compacidad*:

[14] No se debe confundir este resultado con los *teoremas de incompletud* demostrados por Gödel en 1931 y que más adelante veremos, quizá los más celebrados en la historia de la lógica.

5) *Un conjunto Γ de enunciados tiene un modelo si y solo si todo subconjunto finito Γ_0 de Γ tiene un modelo.*

El primer matemático en demostrar este teorema para lenguajes no numerables fue Anatoli Maltzev en 1941. Se trata de un resultado con importantes consecuencias, como, por ejemplo, la existencia de una extensión del sistema de los números reales en la que se incluyen números infinitesimales, o la imposibilidad de caracterizar la noción de orden «$x < y$» entre números reales mediante un conjunto de axiomas.[15] De algunas de estas cuestiones nos ocuparemos más adelante.

§3 La aritmética recursiva

Tras pasar lista a los substratos fundamentales de la lógica en el siglo XX, consideremos una de las ideas más importantes que se hicieron presentes en este dominio. Nos referimos a la *definición por recurrencia*, noción que se halla presente en las investigaciones en torno a los sistemas formales, el fundamento de las matemáticas, la teoría de la calculabilidad, el problema de la decisión y las ciencias de la computación. Si bien esta idea ya se encuentra en algunos trabajos de Dedekind, el primero en valorarla y desarrollarla plenamente fue Skolem en un trabajo publicado en 1923 bajo título «Fundamentos de la aritmética elemental por medio del método recursivo de pensamiento, sin uso de variables aparentes sobre dominios infinitos». Dicho escrito marcó el inicio de una disciplina fundamental, comparable en importancia con el álgebra o la geometría, y que hoy en día conocemos como *teoría de las funciones recursivas*.

Por «método recursivo de pensamiento» Skolem entiende una forma de razonamiento iterativo que marcha en paralelo con la inducción matemática, y sobre cuya base pretende reconstruir la aritmética elemental. Esta idea le sobrevino tras la lectura de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, como una reacción a la teoría de tipos y la teoría de la cuantificación. Su intención era abordar el problema del infinito en matemáticas desde una perspectiva constructiva, valiéndose de métodos tan seguros que nadie podría dudar de sus conclusiones, y evitando de paso el problema planteado por las paradojas de la teoría de conjuntos.

Skolem procedió de manera informal, sin recurrir al método axiomático y evitando a toda costa la teoría de la cuantificación (es decir, el uso de variables aparentes sobre dominios infinitos, como reza el título). Supone como entendidas las siguientes nociones:

[15] La imposibilidad de caracterizar el predicado «$x < y$» para los números naturales se puede demostrar con el teorema de finitud para lenguajes numerables.

relación aritmética $R \subseteq N^n$ es *recursiva* cuando su función característica lo es;[18] segundo, que la teoría de la división, la del máximo común divisor y la de la descomposición en factores primos se mueve enteramente en el espacio de la aritmética recursiva; y tercero, que todos los procedimientos de definición de funciones calculables que se han intentado conducen a los mismos resultados, no conociéndose a la fecha ninguna función calculable que no sea recursiva.

§4 La aritmética de Peano

Si bien la noción de número natural es tan antigua como la matemática, el estudio crítico de la misma no tuvo lugar sino hasta el último cuarto del siglo XIX en manos de matemáticos como Richard Dedekind y Frege, quienes intentaron una definición lógica de los números naturales y una prueba de la validez del principio de inducción. Casi al mismo tiempo, Giuseppe Peano, siguiendo una línea de pensamiento más cercana a la matemática, construyó un sistema axiomático para el sistema de los números naturales, que dio a conocer en 1889. A diferencia de Frege y Dedekind, Peano no intentó definir los números naturales ni probar la validez del principio de inducción, sino que los postuló, estableciendo de esta manera sus propiedades básicas. En el siglo XX sus axiomas fueron la base de prácticamente todas las investigaciones formales en torno a la noción de número natural. En lo que sigue exponemos un conjunto de axiomas *AP* para los números naturales que se convirtió en un estándar en el siglo XX, sobre todo a partir de los trabajos de Hilbert en los años veinte. Obviamente, el sistema se inspira directamente en el de Peano, aunque con algunas modificaciones.

El sistema *AP* para la aritmética de los números naturales. El lenguaje L_{AP} es muy reducido, sin símbolos de relación, sólo una constante «*0*» y tres símbolos de operación: «*s*» (sucesor), «+» (suma) y «·» (producto). Por comodidad, en vez de escribir $+(x, y)$ para la suma, escribiremos como es usual $x + y$, pudiéndose decir lo mismo para el producto (notación infija). El sistema de axiomas *AP* es el siguiente:

Axiomas para la igualdad

$x = x$ (Identidad)

$x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$ (Axioma de Leibniz)

Axiomas aritméticos

$\neg(sx = 0)$ (axiomas para el sucesor)

$sx = sy \rightarrow x = y$

[18] La función característica de R es la función C_R: $N^n \rightarrow \{1, 0\}$ tal que $C_R(X) = 0$ si y sólo si $X \in R$.

Funciones recursivas. La importancia de las funciones recursivas deriva también de su relación con las nociones de *algoritmo* y *procedimiento efectivo*.[16] De hecho, la noción de *función recursiva* nació del intento por hacer de la noción intuitiva de *función calculable* algo más preciso.

En un sentido estricto, la *clase de la funciones recursivas* se determina de la siguiente manera: primero, ciertas funciones iniciales, consideradas como calculables de inmediato, son llamadas *recursivas*; segundo, se especifica un conjunto de reglas para generar nuevas funciones recursivas a partir de las ya obtenidas. Las siguientes funciones se suelen tomar como iniciales:

i) $C(x) = 0$ para toda x (función constante cero)

ii) $s(x) = x + 1$ (función sucesor)

iii) $I_{i,n}(x_1, ..., x_n) = x_i$ (funciones identidad, con $i \leq n$)

A su vez, las reglas para generar nuevas funciones son las siguientes:

iv) $f(x_1, ..., x_n) = h(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_m(x_1, ..., x_n))$ (sustitución)

v) $f(x_1, ..., x_n, 0) = g(x_1, ..., x_n)$

$f(x_1, ..., x_n, y + 1) = h(x_1, ..., x_n, y, f(x_1, ..., x_n, y))$ (recursión)

vi) Si g es una función de grado $n + 1$ tal que para todos los números $x_1, ..., x_n$ hay al menos un número y tal que $g(x_1, ..., x_n, y) = 0$, y la expresión «$\mu y[(g(x_1, ..., x_n, y) = 0]$» denota al menor número y que es un cero de la función, entonces la ecuación

$$f(x_1, ..., x_n) = \mu y[g(x_1, ..., x_n, y) = 0]$$

define una función de grado n (minimalización).

Una definición estricta establece que una función aritmética es *recursiva* si y sólo si se puede obtener a partir de las funciones iniciales mediante un número finito de aplicaciones de las reglas (iv), (v) y (vi). Además, si en el proceso de definición sólo se utilizan las reglas (iv) y (v), se dice que la función es *recursiva primitiva (RP)*.[17]

Para concluir con esta sección diremos tres cosas: primero, que no es necesaria una teoría de las relaciones recursivas paralela a la teoría de las funciones recursivas, pues una

---

[16] Si bien los algoritmos se habían utilizado desde la antigüedad (piénsese, por ejemplo, en el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números), no fue sino hasta el siglo XX que se intentó una definición de este concepto, y la aritmética recursiva resultó el instrumento adecuado.

[17] No todas las funciones calculables son *RP*. Por ejemplo, se puede probar que si a partir de la suma generamos una sucesión de funciones iterando repetidamente la última función que se ha formado, de modo que a la suma le sigue el producto, a éste la exponenciación, y así sucesivamente, entonces la función $f(i, x, y)$ cuyo valor en (i, x, y) es el valor de la i-ésima función de la sucesión en (x, y), no es *RP* (el ejemplo se debe a Roza Péter).

relación aritmética $R \subseteq N^n$ es *recursiva* cuando su función característica lo es;[18] segundo, que la teoría de la división, la del máximo común divisor y la de la descomposición en factores primos se mueve enteramente en el espacio de la aritmética recursiva; y tercero, que todos los procedimientos de definición de funciones calculables que se han intentado conducen a los mismos resultados, no conociéndose a la fecha ninguna función calculable que no sea recursiva.

§4 La aritmética de Peano

Si bien la noción de número natural es tan antigua como la matemática, el estudio crítico de la misma no tuvo lugar sino hasta el último cuarto del siglo XIX en manos de matemáticos como Richard Dedekind y Frege, quienes intentaron una definición lógica de los números naturales y una prueba de la validez del principio de inducción. Casi al mismo tiempo, Giuseppe Peano, siguiendo una línea de pensamiento más cercana a la matemática, construyó un sistema axiomático para el sistema de los números naturales, que dio a conocer en 1889. A diferencia de Frege y Dedekind, Peano no intentó definir los números naturales ni probar la validez del principio de inducción, sino que los postuló, estableciendo de esta manera sus propiedades básicas. En el siglo XX sus axiomas fueron la base de prácticamente todas las investigaciones formales en torno a la noción de número natural. En lo que sigue exponemos un conjunto de axiomas *AP* para los números naturales que se convirtió en un estándar en el siglo XX, sobre todo a partir de los trabajos de Hilbert en los años veinte. Obviamente, el sistema se inspira directamente en el de Peano, aunque con algunas modificaciones.

El sistema *AP* para la aritmética de los números naturales. El lenguaje L_{AP} es muy reducido, sin símbolos de relación, sólo una constante «0» y tres símbolos de operación: «s» (sucesor), «$+$» (suma) y «$\cdot$» (producto). Por comodidad, en vez de escribir $+(x, y)$ para la suma, escribiremos como es usual $x + y$, pudiéndose decir lo mismo para el producto (notación infija). El sistema de axiomas *AP* es el siguiente:

Axiomas para la igualdad

$x = x$ (Identidad)

$x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$ (Axioma de Leibniz)

Axiomas aritméticos

$\neg(sx = 0)$ (axiomas para el sucesor)

$sx = sy \rightarrow x = y$

[18] La función característica de R es la función $C_R: N^n \rightarrow \{1, 0\}$ tal que $C_R(X) = 0$ si y sólo si $X \in R$.

$x + 0 = x$ (axiomas para la suma)
$x + sy = s(x + y)$
$x \cdot 0 = 0$ (axiomas para el producto)
$x \cdot sy = x \cdot y + x$
$(A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(sx)) \rightarrow A(x)$ (axiomas de inducción)

Estos axiomas se utilizan como hipótesis en el cálculo de predicados para deducir los teoremas aritméticos. Aunque en L_{AP} no hay símbolos individuales para los números naturales, éstos se representan mediante las expresiones *s0*, *ss0*, *sss0*, etc. que por comodidad escribimos $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, etc.; asimismo, aunque el lenguaje no tiene un signo para la desigualdad, el predicado «$x < y$» se puede definir como sigue:

$$x < y \equiv_{\text{def}} \exists z(\neg(z = 0) \wedge x + z = y)$$

Pese a lo reducido de su lenguaje, el poder expresivo de *AP* es enorme, pudiéndose traducir y probar en él una multitud de proposiciones relativas a los números naturales, como, por ejemplo, el teorema de Euclides sobre la existencia de una infinidad de números primos o el algoritmo de la división.[19] No obstante, y a pesar de lo satisfactorio que resulta el sistema, por el teorema de *Löwenheim-Skolem* sabemos de la existencia de una infinidad de modelos no estándar para *AP*.

Representabilidad. Si bien el lenguaje de *AP* carece notoriamente de signos de función, esta deficiencia no es una seria amenaza para su poder expresivo. En este sentido, en 1931 Gödel demostró un resultado (conocido como *lema de la correspondencia*) que pone en evidencia la relación existente entre el sistema *AP* y la aritmética recursiva: *todos los predicados y todas las funciones recursivas son representables en AP*.

Entre otras cosas, lo anterior significa que para toda relación recursiva $R(x_1, ..., x_n)$ existe en L_{AP} una fórmula $r(x_1, ..., x_n)$ con n variables libres tal que

si $R(k_1, ..., k_n)$, entonces $AP \vdash r(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n)$, y

si no_$R(k_1, ..., k_n)$, entonces $AP \vdash \neg r(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n)$

de modo que en *AP* tenemos una representación exacta de las relaciones numéricas que se dan en el ámbito de la aritmética recursiva; en particular, la relación $y = f(x_1, ..., x_n)$ es representable cuando la función f es recursiva.[20] Este resultado es fundamental para la demostración de los teoremas de incompletud de Gödel que pronto veremos, y se puede parafrasear así: *el sistema* AP *contiene una formalización de la aritmética recursiva.*

---

[19] Del poder expresivo de *AP* hablaremos más tarde, cuando nos ocupemos de los teoremas de Gödel, que ponen un límite al poder de representación de este sistema y similares.
[20] La demostración de Gödel sólo comprende relaciones recursivas primitivas, mas es fácilmente extensible a todas las demás.

inalcanzable y algo más: que las pruebas de consistencia suponen un creciente grado de complejidad.

Estas conclusiones negativas representaron un enorme progreso tanto en la matemática como en la ciencia en general. Por decir lo menos, estos resultados significaron para la lógica un hallazgo tan importante como el de las geometrías no euclidianas para la ciencia del espacio.

Gödel dio a conocer sus teoremas en 1931, en un trabajo titulado «*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines I*»,[25] en el que puso en evidencia las enormes dificultades que habría que remontar para llevar a cabo la empresa hilbertiana, si es que esto era acaso posible. De entre las conclusiones que alcanza las más relevantes son las siguientes:

1) *Si escogemos un sistema bien definido de axiomas y reglas de inferencia en el que sólo sean derivables fórmulas aritméticas verdaderas, siempre habrá enunciados aritméticos de tipo elemental que son indecidibles para el sistema (es decir, fórmulas aritméticas* A *tales que ni* A *ni* ¬A *son deducibles de los axiomas).*[26]

2) *No es posible demostrar la consistencia de los axiomas dentro del sistema mismo.*

En otras palabras, dado un sistema de axiomas matemáticos que contenga a la aritmética, siempre habrá enunciados que el sistema no puede *decidir*, es decir, enunciados cuya verdad o falsedad no se puede demostrar con base en los axiomas, siendo uno de ellos el que afirma la consistencia del sistema. La demostración que ofrece Gödel de estos hechos es constructiva, en el sentido de que en ella indica cómo obtener tales enunciados. La alternativa a esta situación es que el sistema sea inconsistente, en cuyo caso ya nada importa.

Los descubrimientos de Gödel significaron un duro revés a las pretensiones de Hilbert: por una parte, la idea de un sistema que incluyera toda la matemática no pasaba de ser una quimera, y por la otra, la posibilidad de una prueba elemental de consistencia parecía desvanecerse.

Veamos, con algunos cambios en la notación, la prueba heurística que ofrece Gödel del primer teorema sin ninguna pretensión de exactitud. El primer paso es asignar números a

---

[25] *Principia Mathematica* es el título de un libro de Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead, publicado entre 1910 y 1913 en dos tomos, en el que presentan un sistema axiomático para la matemática clásica con base en la teoría de tipos.

[26] Por «enunciados aritméticos de tipo elemental» entendemos fórmulas en las que sólo se hace referencia a las operaciones aritméticas de suma, producto y sucesor, y en las que la cuantificación sólo se realiza sobre variables numéricas.

los símbolos, a las fórmulas y a las pruebas formales del sistema dado, digamos *AP*. Tras la asignación, las nociones y proposiciones metamatemáticas se convierten en conceptos y enunciados aritméticos acerca de números y sucesiones de números naturales, mismos que podemos expresar en el sistema. La existencia de proposiciones indecidibles se prueba mediante una aplicación del método diagonal de Cantor como sigue.

Enumérense las fórmulas con una variable libre (por ejemplo, respecto sus números de Gödel), formando una sucesión $A_1(x)$, $A_2(x)$, ... $A_n(x)$, ... y sea $G(m)$ el enunciado metamatemático que afirma que $A_m(\overline{m})$ no es derivable en *AP*. Podemos probar (de facto, gran parte del trabajo de Gödel consiste en demostrar este hecho) que una de las fórmulas $A_n(x)$ define en el lenguaje de *AP* esta propiedad, digamos la fórmula $A_k(x)$ (donde k es un número entero que podemos calcular). Nótese que al sustituir $\overline{k}$ en vez de x la fórmula resultante $A_k(\overline{k})$ afirma, bajo su significado intuitivo, lo mismo que $G(k)$, es decir, que la fórmula $A_k(\overline{k})$ no es derivable en *AP*. En otras palabras, $A_k(\overline{k})$ *afirma* su propia inderivabilidad en *AP*. Si $A_k(\overline{k})$ fuera derivable en *AP*, entonces bajo su significado intuitivo sería verdadera y $A_k(\overline{k})$ no sería derivable en *AP*, lo cual sería absurdo, de donde resulta que $A_k(\overline{k})$ no es derivable en *AP*; mas de este último hecho se sigue que la fórmula en cuestión es verdadera, pues eso es precisamente lo que ella afirma.

A su vez, si $\neg A_k(\overline{k})$ fuera derivable en *AP*, entonces $A_k(\overline{k})$ sería falsa bajo su significado intuitivo y por tanto derivable en el sistema, por lo que éste no cumpliría la condición de sólo probar enunciados verdaderos. Como por hipótesis esto último no sucede, la fórmula $\neg A_k(\overline{k})$ tampoco es derivable en *AP*. La conclusión es que ninguna de la fórmulas $A_k(\overline{k})$ y $\neg A_k(\overline{k})$ es derivable en el sistema.

Este razonamiento muestra una interesante analogía con las paradojas de Richard y del mentiroso. La aplicación del método diagonal de Cantor salta a la vista en la construcción de la fórmula $A_k(\overline{k})$, donde el argumento toma como valor el índice de la fórmula.

La numeración de Gödel. El método de asignación de números ideado por Gödel tiene suficiente importancia como para dedicarle algunas líneas. Tras su introducción, éste fue utilizado con éxito en muchas otras investigaciones lógicas, sobre todo en aquellas tendientes a fijar el alcance y poder expresivo de las teorías matemáticas.

Aunque la idea de codificar las "cosas" en los números ya se conocía desde la introducción del método de las coordenadas en el siglo XVII, fue Gödel quien introdujo esta práctica en la lógica matemática. El resultado fue que el discurso metamatemático acerca del sistema se transformó en un discurso aritmético, pudiéndose llevar de este

modo al interior del sistema axiomático. Con su proceder pareciera suscribir la regla de que las respuestas a los grandes problemas suelen resultar de ideas muy simples.

En el caso del sistema AP la codificación comienza cuando a cada símbolo le asignamos un número. Una manera de hacerlo es la siguiente:[27]

0	$=$	s	$+$	$\cdot$	$\neg$	$\vee$	$\forall$	$\exists$	(	)	x	y	z	x_1	y_1	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	...

Llamemos h a esta correspondencia. Con ella, a cada fórmula corresponde una sucesión de enteros. Por ejemplo:

$$\overbrace{\neg(sx = 0)}^{\text{fórmula}} \mapsto \overbrace{11,\ 19,\ 5,\ 23,\ 3,\ 1,\ 21}^{\text{sucesión correspondiente}}$$

Ahora bien, para todo fin práctico, a cada sucesión de símbolos conviene asignarle, en vez de una sucesiones de números, un único número entero. Esto se puede hacer como sigue. Si $E = s_1 s_2 \ldots s_m$ es una sucesión finita de símbolos de L_{AP}, el *número de Gödel* de E es el número

$$g(E) = 2^{h(s_1)}\, 3^{h(s_2)} \ldots\, p_m{}^{h(s_m)}$$

donde 2, 3, ..., p_m son los primeros m números primos dispuestos en orden creciente. Conforme al teorema fundamental de la aritmética (según el cual cada número natural se puede descomponer en forma única como un producto de números primos si ignoramos el orden), la función g asigna a cada expresión de L_{AP} un número distinto. Además, dado el número $g(E)$, es fácil reconstruir la expresión E a partir de él.

Repitiendo el procedimiento anterior podemos asignar a cada sucesión finita de fórmulas (en general, de expresiones) $S = E_1, E_2, \ldots, E_n$ de L_{AP} un único *número de secuencia* $\gamma(S)$. Si $g_1, \ldots, g_n$ son los números de Gödel de las expresiones $E_1, \ldots, E_n$, entonces el número de secuencia de S es

$$\gamma(S) = 2^{g_1}\, 3^{g_2} \ldots\, p_n{}^{g_n}$$

Este modo de proceder es aplicable a un amplia gama de lenguajes, no sólo a aquellos relacionados con la lógica, y ha sido utilizado ampliamente en otros dominios, como, por ejemplo, las investigaciones en torno a las máquinas de Turing y la teoría de algoritmos.

---

[27] Recordemos que el lenguaje L_{AP} para la aritmética de Peano consiste de los siguientes símbolos: variables $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$; conectivos $\neg$ y $\vee$; cuantificadores $\forall$ y $\exists$; igualdad $=$; una constante 0, símbolos para función s (de grado 1), $+$ y $\cdot$ (de grado 2) y paréntesis) y (.

La prueba de Gödel. En el caso del sistema *AP* el método recién descrito permite asignar a cada fórmula y a cada prueba un único número natural de modo que las reglas sintácticas que describen la estructura del sistema (v. gr., aquellas que especifican cuáles expresiones son fórmulas y axiomas, cómo se lleva cabo la inferencia lógica, qué es una prueba, etc.) se convierten en operaciones y relaciones aritméticas entre números naturales.[28] ¿Se pueden expresar estas propiedades en *AP*? Gödel dedicó gran parte de su trabajo a mostrar que sí, valiéndose para ello de la aritmética recursiva. Metódicamente, investigó una sucesión de 45 funciones y relaciones recursivas primitivas, hasta probar que la relación «x es el número de secuencia de una prueba y z es el número de Gödel de la fórmula que se prueba con x»[29] es recursiva, y por tanto representable en *AR* (*v*. §4).

Con esto Gödel dispuso de los medios suficientes para demostrar el primero de sus teoremas. Para ello definió un predicado $P(x, y)$ con la siguiente propiedad: dados dos números h y k, $P(h, k)$ es verdadero si y sólo si k es el número de Gödel de una fórmula $A(x)$ (cuya única variable libre es x) y h es el número de secuencia de una prueba de $A(\bar{k})$. Gödel demostró que este predicado es recursivo primitivo y por tanto representable en *AP* mediante una fórmula $p(x, z)$.

Consideremos la fórmula $\neg\exists xp(x, z)$ con número de Gödel g, y sustituyamos $\bar{g}$ en vez de la variable libre z, para obtener el *enunciado de Gödel* $G \equiv_{def} \neg\exists xp(x, \bar{g})$.[30] El primer teorema de incompletud de Gödel establece lo siguiente:

1) Si *AP* es consistente, entonces G no es un teorema de *AP*.

2) Si *AP* es ω-consistente, entonces $\neg G$ no es un teorema de *AP*.[31]

La demostración procede por contraposición en un caso y por reducción al absurdo en el otro, y tiene como base la representabilidad de la aritmética recursiva en *AP*. En efecto, supongamos que *AP* es consistente y que G sí es derivable. En tal caso hay una prueba de la fórmula g, digamos con número de secuencia h. Por tanto, $P(h, g)$ es verdadero y la fórmula $p(\bar{h}, \bar{g})$ es derivable en *AP*. Mas de lo anterior se sigue que $\neg G \equiv \exists xp(x, \bar{g})$ es un teorema de *AP*, por lo que el sistema es inconsistente.

---

[28] Debido a ello, al método se le conoce como *aritmetización de la sintaxis*. Por ejemplo, la propiedad «el símbolo v es una variable» la podemos expresar, conforme a la correspondencia h, diciendo que «v es un número de la forma $2n + 1$, con $n \geq 11$», y esta última propiedad sólo alude a nociones numéricas.

[29] Esta relación la denotamos con $PR(x, y)$ y nos habremos de referir a ella más adelante.

[30] Un cuidadoso examen de G nos hará ver que se trata de un enunciado autorreferente, en el sentido de que en su lectura metamatemática afirma ser inderivable en *AP*, al "decir": *en* AP *no hay una prueba de la fórmula que resulta al sustituir en la fórmula g el numeral* $\bar{g}$ *en vez de la variable libre* z. Al realizar las operaciones indicadas en G, resulta que la fórmula en cuestión es ella misma.

[31] La ω-consistencia es una condición más poderosa que la consistencia simple y se puede definir así: el sistema *AP* es ω-consistente si no hay una fórmula $A(x)$ tal que $\neg A(\bar{m})$ es derivable para todo $m \in N$ y $\exists xA(x)$ también.

Por tanto si el sistema es consistente, el enunciado G no es derivable en AP. En tal caso los enunciados aritméticos no_$P(0, g)$, no_$P(1, g)$, no_$P(2, g)$, etc. son todos verdaderos, pues ningún número natural es el número de secuencia de una prueba de la fórmula G. De esto último se sigue que todas las fórmulas $\neg p(\overline{0}, \overline{g})$, $\neg p(\overline{1}, \overline{g})$, $\neg p(\overline{2}, \overline{g})$, etc. son derivables en AP. Obligado por la forma del argumento, Gödel debió asumir en este punto la ω-consistencia del sistema: si $\neg G \equiv \exists x p(x, \overline{g})$ fuera un teorema de AP, el sistema sería ω-inconsistente.[32]

En el mismo artículo Gödel reveló un sorprendente resultado que, curiosamente, jamás demostró. Sea $pr(x, y)$ la fórmula de L_{AP} que representa al predicado de prueba $PR(x, y)$, y sea $form(x)$ la fórmula correspondiente a la propiedad «x es el número de Gödel de una fórmula». En su lectura metamatemática, el enunciado $\exists y[form(y) \wedge \forall x \neg pr(x, y)]$ afirma la existencia de una fórmula que no es derivable en AP, lo cual equivale a decir que AP es consistente (en una teoría inconsistente todas las fórmulas son derivables). Si escribimos $cons_{AP}$ como una abreviatura de este enunciado, el segundo teorema de incompletud de Gödel establece lo siguiente: *el enunciado* cons_{AP} *no es derivable en* AP.

De lo anterior se sigue que en caso de que AP sea consistente, ninguna prueba de su consistencia se puede formalizar en él, pues ello equivaldría a demostrar el enunciado $cons_{AP}$. En particular, este resultado hace prácticamente imposible una prueba de consistencia finitista para la matemática clásica como la soñada por Hilbert, y echa por tierra su programa.

Gödel completó su artículo mostrando que las limitaciones señaladas se cumplen para todo sistema que satisfaga un mínimo de condiciones, como son: i) que el conjunto de axiomas y reglas de inferencia sea definible recursivamente, ii) que toda relación recursiva sea definible en el sistema, y iii) que el sistema sea ω-consistente (condición que ahora podemos cambiar en favor de la consistencia simple).

Consecuencias para el programa. Los teoremas de Gödel señalaron el fin de la euforia formalista, que había dominado a la lógica el decenio anterior con el programa de Hilbert. Esta corriente sólo admitía el proceder axiomático como modo de reconstrucción de las teorías matemáticas. Al respecto, sostenía que toda teoría se debía exponer con base en sistemas de símbolos carentes de contenido, con apego a estrictas reglas sintácticas de construcción y evitando a toda costa nociones semánticas como las de «verdad» y «satisfacción», consideradas como carentes de significado. De hecho, para los seguidores

[32] Al respecto, en 1936 Barkley Rosser expuso un teorema similar al de Gödel en el que sólo supone la consistencia del sistema, evitando con ello la más poderosa hipótesis de ω-consistencia.

de esta tendencia la noción de prueba formal era el sustituto constructivista de la noción de verdad, la cual quedaba relegada a un segundo plano. Tal como el mismo Gödel lo dijera, una de sus motivaciones al explorar los alcances de las teorías axiomáticas fue enfrentar esta tradición, que con tanta vehemencia se oponía a su punto de vista realista.[33]

En cuanto a la consistencia, éste siguió como un problema abierto para las distintas teorías matemáticas (teoría de los números, análisis matemático) y sus fragmentos. Al respecto, la actividad fue muy intensa, y sirvió como un estímulo para el desarrollo de la teoría de la demostración. En cuanto a la consistencia de *AP*, en 1936 Gerhard Gentzen ofreció una prueba de la misma con base en un argumento inductivo que penetra en la segunda clase de los números ordinales de Cantor, en el que quizá sea el caso más sonado en esta área.[34]

A fin de cuentas, el legado de Gödel en este dominio comprende dos aspectos: por una parte, una nueva visión de la matemática en la que ésta aparece como una ciencia por siempre inconclusa e incapaz de asegurar su propio funcionamiento consistente; por la otra, una riqueza de métodos de investigación muy sugerentes, que pronto fueron puesto en práctica en conexión con otros problemas. La importancia de su obra se puede entonces valorar de dos maneras: por su significación y por el caudal de resultados inspirados en ella.

Indefinibilidad del concepto de verdad. Si bien en su primer teorema de incompletud Gödel no alude a la noción de verdad (eso lo hace en la prueba heurística), éste se encuentra directamente relacionado con ella y con algo más: con la imposibilidad de definir la noción de verdad en una teoría para la aritmética.[35] De este modo el problema de la verdad volvió al escenario de la investigación lógica y abrió la puerta al estudio de las propiedades semánticas de la teorías matemáticas. Este retorno a la semántica resultó

[33] Es decir, al punto de vista según el cual hay una realidad conceptual objetiva que es la que determina la verdad de los enunciados matemáticos, siendo la demostración un procedimiento mediante el cual se reproducen los vínculos entre tales conceptos en el plano simbólico.

[34] Respecto al problema de la consistencia, el lector encontrará un artículo dedicado al tema en el número 29 de *Miscelánea Matemática*, por lo que aquí no lo tocaremos más. *V.*, [Torres, 1999b].

[35] De hecho, Gödel descubrió el teorema al investigar si la noción de verdad se podía identificar con la de demostrabilidad. No obstante, en la prueba del teorema evitó de propósito la noción de verdad, al parecer intimidado por el espíritu de su tiempo, y la sustituyó con la noción sintáctica de consistencia, a fin de evitar de este modo toda reacción adversa (algo que marcha acorde con su habitual cautela). En un párrafo tachado de una carta que jamás envió a un joven estudiante de nombre Yossef Balas, escrita en 1970, Gödel dice a propósito de sus teoremas de completud e incompletud: «A consecuencia de los prejuicios filosóficos de nuestro tiempo [...] el concepto de verdad matemática como contrapuesto al de demostrabilidad era visto con gran recelo y ampliamente rechazado como carente de sentido.». Enfrentar tal tradición fue algo que Gödel decidió no hacer, al menos de manera frontal.

sumamente exitoso, al grado de que en la segunda mitad del siglo XX el desarrollo de la teoría de modelos fue uno de lo hechos más destacados de la lógica matemática.[36]

El primero en abordar abiertamente el problema de la verdad en relación a los lenguajes formalizados fue Tarski en 1933. Recordemos la definición de *satisfacción* para fórmulas de un lenguaje de primer orden que vimos en la parte correspondiente a la lógica de predicados en el apartado §1. Si bien ésta se expuso en el lenguaje de la teoría intuitiva de conjuntos, la definición es expresable en un lenguaje L suficientemente rico por medio de la aritmetización. Lo que Tarski demostró es que si el concepto de «fórmula verdadera de L» es expresable en L, entonces en L podemos derivar contradicciones análogas a las denominadas paradojas semánticas. Para ser más precisos, Tarski demostró lo siguiente: *si L es un lenguaje en el que todas las relaciones y funciones recursivas son expresables, entonces el conjunto* V = {x | x *es el número de Gödel de un enunciado aritmético verdadero*} *no es definible en* L.

Consideremos el caso específico del lenguaje L_{AP}. Conforme al teorema de Tarski, no hay en este lenguaje ningún predicado $v(x)$ con la propiedad de que $v(\bar{k})$ es verdadero en N si y sólo si k es el número de Gödel de un enunciado verdadero en N. Al igual que el primer teorema de incompletud de Gödel, la demostración de este hecho hace uso de la codificación del lenguaje L_{AP} en la aritmética recursiva, y de la representación de ésta en L_{AP}.

El resultado se obtiene al suponer que existe una expresión $v(x)$ en L_{AP} con el significado «x es verdadero». En tal caso se puede construir una fórmula $w(x)$ que define la siguiente propiedad: «la fórmula $A_m(\bar{m})$ no es verdadera», donde $A_1(x)$, $A_2(x)$, ... $A_n(x)$, ... es una enumeración de las fórmulas con una variable libre de L_{AP} (digamos, respecto a sus números de Gödel). Intuitivamente, $w(x)$ significa: «la fórmula que resulta de sustituir en $A_m(x)$ el numeral $\bar{m}$ en vez de x, es falsa». Dado que esta última fórmula tiene una sola variable libre, debe figurar en la lista, digamos en el lugar h (es decir, $w(x)$ es $A_h(x)$). En tal caso la fórmula $w(\bar{h})$ significa «yo no soy verdadera». De hecho, este enunciado es verdadero si y sólo si es falso, lo cual prueba su inexistencia. Por tanto, el predicado «x es el número de Gödel de una fórmula de L_{AP} verdadera en N» no es expresable en L_{AP}.

Este argumento se relaciona directamente con una antinomia conocida en la antigüedad bajo el nombre de *paradoja del embustero* que citara Cicerón (106-43 a. C): «Si tú dices

[36] Otra consecuencia de la crisis desencadena por Gödel fue que la axiomatización debió ser revalorada como lo que es, un instrumento eficaz al momento de sistematizar las teorías deductivas, y no el ser absoluto de las matemáticas: la matemática no es la ciencia de los métodos formales.

que mientes, o dices la verdad y entonces mientes, o mientes y entonces dices la verdad», la cual falta al principio de no contradicción (el enunciado es verdadero y falso a la vez).

Como se ve, frente a la idea de que las paradojas semánticas son meras curiosidades carentes de interés real, Tarski descubrió que hay cosas muy importantes que debemos aprender de ellas, y con su ayuda demostró que no podemos tener una noción de verdad para los enunciados de un sistema lógico sin tener que salir de él, de modo que esta noción sólo es posible definirla en un metalenguaje que lo tenga como su objeto de estudio.[37]

§7 Algoritmos y máquinas de Turing

La noción de algoritmo y la tesis de Church. La década de los años treinta se distinguió por un viraje en la investigaciones lógicas. Los matemáticos, convencidos del poder de los métodos recursivos utilizados por Gödel, dirigieron su atención hacia las nociones de *calculabilidad* y de *procedimiento efectivo* o *algoritmo*.[38] Como resultado, varias caracterizaciones fueron propuestas, entre las que podemos mencionar: los sistemas canónicos de Post, el cálculo ecuacional de Gödel y Herbrand, el cálculo de conversión λ de Church, las cadenas de Markov, las funciones Turing-calculables y, por supuesto, las funciones recursivas. En este trabajo sólo trataremos con las dos últimas.

Hacia 1936 Stephen C. Kleene descubrió un hecho sorprendente: que todas la definiciones propuestas de la noción de *función calculable* eran equivalentes entre sí, en el sentido de que si una función pertenecía a una de tales categorías, también pertenecía a las otras. Por ejemplo, demostró que toda función recursiva es λ-definible (es decir, definible en el cálculo de la conversión λ de Church), y viceversa. El hecho de que éstas y otras ideas igualmente plausibles de la calculabilidad conducían a la misma clase de funciones llevó a Alonso Church a proponer en 1936 la tesis que ahora lleva su nombre, según la cual una función es *efectivamente calculable* (en el sentido intuitivo del término) si y sólo si es recursiva. Como ya lo hemos dicho, se trata de una aseveración que no es susceptible de prueba, pues en ella se equipara una noción intuitiva (la de función calculable) con una noción formal (la de función recursiva). Sin embargo, y a pesar de lo anterior, la tesis goza de una amplia aceptación, en parte porque todas las funciones calculables conocidas a la

---

[37] Por ejemplo, el hecho de que el correcto uso de la lengua española nos lleva a flagrantes contradicciones es una prueba de que los lenguajes naturales no pueden expresar su semántica completamente.

[38] Con el advenimiento de las máquinas computadoras la noción de algoritmo se ha convertido en algo común. En general, por *algoritmo* se entiende un procedimiento de cómputo que toma un *valor* (o conjunto de valores) como *datos de entrada* y produce un *valor* (o conjunto de valores) como *resultado*. Una condición *sine qua non* es que el algoritmo no requiera en su ejecución de ningún pensamiento creativo, y que en principio sea posible construir un programa por medio del cual una computadora digital sea capaz de realizar las operaciones por él indicadas.

fecha son recursivas, y en parte porque todos los estudios realizados en torno a la noción de *calculabilidad efectiva* han llevado a lo mismo. Al respecto, Post se refirió a la tesis de Church como algo que no es ni definición ni axioma, sino una ley, un descubrimiento fundamental relativo al poder matematizante del *Homo Sapiens* en necesidad de una continua verificación.

Máquinas de Turing. Íntimamente relacionada con la noción de calculabilidad se encuentra la noción de *algoritmo*, pues se considera que todo los que es calculable lo es a través de un algoritmo. Al respecto, una cuestión fundamental es la siguiente: ¿qué podemos y qué no podemos resolver por medio de algoritmos?

A fin de responder a esta pregunta, en 1936 Alan M. Turing propuso entender por *algoritmo* algo que una *máquina* puede ejecutar, es decir, algo que pueden realizar hipotéticos mecanismos muy simples conocidos como *máquinas de Turing* o *máquinas de cómputo automáticas*. Desde este punto de vista, especificar un algoritmo es lo mismo que describir un proceso de modo que éste puede ser seguido o imitado por una máquina, y una función se considera *efectivamente calculable* si en principio es posible construir una máquina que la calcule en todas sus instancias. Con tal propuesta, Turing tendió un puente entre ciertos problemas de lógica y el estudio teórico de los algoritmos y las máquinas de cómputo automáticas.[39]

Descripción general de las máquinas de Turing. Imaginemos un dispositivo al que se puede alimentar con una cinta infinita. La cinta se divide en celdas, cada una de las cuales o tiene impreso el símbolo | (trazo vertical) o se encuentra en blanco (lo cual a veces se expresa diciendo que tiene *impreso* el símbolo vacío, que denotamos con □). En cada momento de operación una y sólo una celda se encuentra en inspección por una cabeza lectora/escritora que se comunica con un mecanismo de control. Dicho mecanismo contiene una lista de instrucciones (o estados) q_0, q_1, q_2, ..., q_n cada uno de los cuales prescribe dos cursos de acción, uno sobre lo que se ha de hacer si en la celda bajo inspección se encuentra impreso el símbolo □ y otro similar para el símbolo |. En todos los casos la acción prescrita se limita a las siguientes operaciones:

1) escribir en la celda alguno de los símbolos | o □, borrando primero lo que ahí hubiera.

2) desplazar la cinta una celda hacia la derecha (D), una celda hacia la izquierda (I) o detener el funcionamiento de la máquina (P).

---

39 Se puede considerar que las computadoras electrónicas son máquinas de Turing. Si acaso, la única diferencia entre unas y otras es que a las máquinas de Turing se les otorga una memoria ilimitada, dado que pueden leer y escribir en una cinta de longitud infinita. Como las computadoras reales no tienen límites teóricos (sólo prácticos) para la extensión de la memoria disponible, se les atribuye una potencia comparable a la de las máquinas de Turing.

3) especificar la siguiente instrucción q_i.

Por tanto, la lista de instrucciones determina una función de transición que, dada la instrucción en curso y el símbolo inspeccionado, prescribe tres cursos de acción: escribir, mover y cambiar de instrucción. Por tanto, una *máquina de Turing* se puede definir formalmente como una función M cuyo domino es el conjunto $\{q_0, q_1, ..., q_n\} \times \{|, \square\}$ y cuyo codominio es el conjunto $\{|, \square\} \times \{I, D, P\} \times \{q_0, q_1, ..., q_n\}$. La función M determina de manera absoluta el funcionamiento de la máquina y se puede definir mediante una tabla con un número finito de entradas.

Para representar números en la cinta acordamos lo siguiente: una cadena de $k + 1$ trazos verticales | limitada a la izquierda y derecha por el símbolo $\square$ representa al número k (la presencia del trazo adicional es para distinguir al número 0 de la expresión vacía, pues según lo convenido el 0 se denota con $\square|\square$). Denotamos con $\bar{k}$ esta cadena de k + 1 trazos y la llamamos *numeral de k*.

En este contexto decimos que una función aritmética f de grado n es *Turing-calculable* si existe una máquina de Turing M tal que siempre que ésta inicia su funcionamiento en la instrucción q_0 (estado *inicial*) estando bajo inspección el primer símbolo de la expresión $\bar{k}_1\square\bar{k}_2\square...\square\bar{k}_n$, entonces

a) si f está definida en $(k_1, k_2,..., k_n)$, M se detiene estando bajo inspección algún trazo del numeral $\overline{f(k_1, ..., k_n)}$, y

b) si f no está definida en $(k_1, k_2,..., k_n)$, M jamás se detiene, o lo hace en una celda en blanco.

Aunque la descripción de las máquinas de Turing es muy simple, son muchas y muy complejas las tareas que éstas pueden realizar, al grado de que en un famoso artículo Turing llegó a la conclusión de que no hay una diferencia esencial entre una mente y una máquina (lo cual sigue siendo un tema polémico).

Problemas irresolubles. Pese a su capacidad para llevar a cabo cualquier tarea de cómputo concebible, hay límites al poder de las máquinas de Turing, problemas que no pueden resolver. Para establecer tales límites los investigadores recurrieron a un método de codificación similar al de Gödel, asignando a cada máquina de Turing un número, al igual que a cada configuración de la cinta con que ésta se alimenta (es decir, a la información impresa en la cinta al momento de poner en funcionamiento la máquina, la cual se supone que sólo contiene un número finito de trazos). Sin entrar en detalles sobre

cómo se lleva a cabo la codificación, supondremos a la mano una de ellas y algo más: que hay máquinas de Turing que pueden llevar a cabo la codificación y la decodificación.

Un problema que no se puede resolver con una máquina de Turing es el siguiente, denominado *problema de la parada* (Turing, 1936): *dado el número* m *de una máquina de Turing* M *y el número* c *de una cinta* C, *construir una máquina de Turing* M_p *que determine si* M *se detendrá al ser alimentada con* c (es decir, que al poner la máquina M_p en funcionamiento estando bajo inspección el primer símbolo de la expresión $\overline{m}\square\overline{c}$, ésta calculará el valor $\overline{0}$ si y sólo si el cálculo realizado por M terminará en algún momento).

La solución negativa de este problema guarda un estrecho vínculo con otro problema resuelto por Kleene en 1936: el de exhibir una función aritmética que no es calculable mediante una máquina de Turing.

Sea f la siguiente función de dos argumentos:

1) si e es el número de código de una máquina M y ésta calcula un valor al ser aplicada a un número x, entonces $f_e(x)$ es el valor que la máquina M calcula para x.

2) Si e no es el número de código de una máquina, o si la máquina M con número de código e no calcula nada para x, entonces $f_e(x)$ no está definido.

Con base en f y el procedimiento diagonal de Cantor podemos definir una función g que no es Turing-calculable como sigue:

1) si $f_x(x)$ está definido, entonces $g(x) = f_x(x) + 1$

2) si $f_x(x)$ no está definido, entonces $g(x) = 0$.

La función g no es Turing-calculable, pues si una máquina M con código p la calculara, el valor calculado por M para p sería $f_p(p) + 1$, y no $f_p(p)$, como lo debería hacer M. Obviamente, la contradicción resulta de suponer que g es calculable.

De lo anterior se sigue que la cuestión de saber si $f_x(x)$ es un valor definido no es decidible, pues si lo fuera la función g se podría calcular como sigue: primero se determinaría si $f_x(x)$ está definido. Si no lo estuviera, entonces $g(x)$ sería 0; en cambio, si lo estuviera, el valor $f_x(x)$ se calcularía imitando el comportamiento de la máquina M_x aplicada al argumento x, y $g(x)$ se obtendría añadiendo 1 a dicho valor. Esto prueba la existencia de cuestiones elementales para las que no hay un procedimiento de decisión.

A este resultado se le conoce como *teorema de irresolubilidad del problema de la parada*, pues equivale a decir que no hay un procedimiento general para decidir si una máquina M se detendrá al darle como argumento un número arbitrario x (es decir, un

procedimiento para saber si M terminará por calcular un valor para x). De este resultado se sigue la irresolubilidad de muchos otros problemas. Por ejemplo, con base en él Post respondió negativamente a la siguiente cuestión, conocida como *problema de Thue para semigrupos*: dado un alfabeto A y un conjunto de reglas de sustitución de expresiones para dicho alfabeto, ¿se puede hallar un algoritmo que responda a la pregunta sobre si dos palabras cualesquiera del alfabeto son equivalentes entre sí, es decir, si se puede convertir una en la otra aplicando las reglas?

Máquinas universales. En el penúltimo párrafo indicamos la posibilidad de imitar el comportamiento de cualquier máquina de Turing. Esto tiene como base la idea de que los seres humanos en principio podemos hacer cualquier cosa que pueda hacer una de tales máquinas, que en cierto sentido somos *máquinas universales*. En este sentido, lo que Turing hizo fue demostrar la existencia de máquinas con tal poder de imitación.

Una *máquina universal* es una máquina de Turing U que realiza la siguiente tarea: si e es el número de código de una máquina de Turing M que calcula un valor $f_e(k)$ para un número natural k, entonces la máquina U calcula el mismo valor al ser aplicada a la expresión $\overline{e}\,\Box\,\overline{k}$ (nótese que uno de estos parámetros es el código de una máquina), o de lo contrario no calcula nada (no se detiene, o se detiene en un cuadro en blanco). Con base en la codificación, Turing demostró en 1936 la existencia de máquinas con esta habilidad: la de imitar el comportamiento de todos los demás dispositivos de cómputo automáticos.[40]

§8 El problema de la decisión

En 1933 Church demostró un resultado que se inspira en el método de aritmetización de Gödel y el procedimiento diagonal de Cantor; en él, establece la inexistencia de un procedimiento de decisión para la aritmética de Peano: *el sistema* AP *es indecidible, es decir, el conjunto* $T_{AP} = \{x \mid x$ *es el número de Gödel de un teorema de* AP$\}$ *no es recursivo.*

La forma en que se enuncia el teorema presupone la tesis de Church, según la cual una función aritmética es calculable si y sólo si es recursiva.[41] En el mismo trabajo Church

[40] El concepto de *máquina de Turing universal* está relacionado con la idea de *computadora digital programable*, donde el número e corresponde al programa que la máquina va a ejecutar, y el número k a los datos de entrada. La máquina universal en sí corresponde a un programa que imita la acción de otras máquinas (o programas) leyendo su código. El programa residente en U es el equivalente al sistema operativo residente en algunas computadoras electrónicas que les permite correr otros programas, siendo por ello el análogo de las máquinas universales.

[41] Al respecto cabe señalar que de ser cierta la tesis de Church, la falta de un procedimiento de decisión para la aritmética no se debería a la falta de ingenio o imaginación, sino a que simplemente no habría ninguno, situación

extrajo una consecuencia quizá inesperada para algunos, y que marca una diferencia fundamental entre el cálculo de proposiciones y el cálculo de predicados: *El sistema* HA *es indecidible, es decir, el conjunto* $T_{HA} = \{x \mid x$ *es el número de Gödel de un teorema de* HA$\}$ *no es recursivo.*

Una consecuencia de este resultado es que no podemos idear un algoritmo para decidir si una fórmula es válida o no (esto a consecuencia del teorema de completud de Gödel), ni disponer de un procedimiento general que nos permita decidir si una fórmula *A* es consecuencia lógica de un conjunto de enunciados Γ. Con ello, la posibilidad de resolver favorablemente el problema de la decisión planteado por Hilbert, parte integrante de su programa, se vino a tierra.[42] Años más tarde Alan Turing llegaría a las mismas conclusiones, esta vez vía el problema de la parada visto en la sección anterior.

Tales resultados atrajeron rápidamente la atención sobre esta clase de problemas, que ahora podían ser examinados con base en las nuevas técnicas de investigación. Así, una de las tareas de la lógica matemática en el siglo XX fue la búsqueda de métodos de decisión para grandes clases de problemas, o pruebas de su inexistencia.

Algunos resultados en una y otra dirección son los siguientes:

- la teoría elemental de grupos es indecidible.
- la teoría elemental de campos es indecidible.
- la aritmética de Peano de primer orden es indecidible.
- la teoría elemental de los grupos abelianos es decidible.
- la teoría elemental del campo de los números reales es decidible.
- la geometría elemental es decidible.
- el álgebra de Boole es decidible.
- el conjunto de fórmulas demostrables en el cálculo de predicados que sólo contienen predicados monádicos (de un sólo argumento) es decidible.

análoga a la que se presenta respecto al quinto postulado de Euclides, que no se puede derivar de los cuatro primeros postulados no por falta de talento, sino porque tal demostración es imposible.

[42] El problema, que lo podemos expresar mediante la pregunta ¿es tal o cuál proposición demostrable en una teoría que tiene tales o cuales axiomas?, fue considerado por Hilbert como «el problema fundamental de la lógica matemática», y por Jacques Herbrand como «el problema más general de las matemáticas». De hecho, este problema ya había sido mencionado por Ernst Schröder en 1895, pero fue Hilbert quien en 1917, en un memorable escrito cuyas raíces se remontan a su intervención en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900, lo elevó a tan alto rango, y soñó con un procedimiento de decisión universal para resolver todos los problemas matemáticos.

- el conjunto de fórmulas demostrables en el cálculo de predicados que sólo contienen un tipo de cuantificador es decidible.
- el conjunto de fórmulas prenex demostrables en el cálculo de predicados en las que todos los cuantificadores universales preceden a los cuantificadores existenciales es decidible.[43]

En relación a las teorías axiomáticas, podemos decir que en general los resultados obtenidos han sido negativos, habiéndose visto que toda teoría suficientemente expresiva como para contener a la aritmética recursiva es indecidible. Este reconocimiento de las limitaciones y del alcance del método axiomático fue uno de los más importantes frutos de las investigaciones en torno al fundamento de las matemáticas en el siglo XX.

Enumerabilidad recursiva. Una noción que pronto mostró su fecundidad en el estudio de problemas de decisión fue la *enumerabilidad recursiva*, la cual se refiere a conjuntos de números. En general se dice que un conjunto A de números naturales es *recursivamente enumerable* (*RE*) cuando es la imagen de una función recursiva f, en cuyo caso la sucesión $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... se dice que es una enumeración recursiva de A.[44] Esta noción corresponde a la idea intuitiva de una lista con todos los elementos de A (quizá con repeticiones) generada mediante un algoritmo. Por ejemplo, el conjunto de números pares es *RE*, pues es la imagen de la función $f(x) = 2x$. Un ejemplo menos simple es el de los números de Gödel de las fórmulas demostrables en *AP*. Para generar la lista, basta recorrer el conjunto de números naturales en orden creciente y separar aquellos que son números de secuencia de una prueba; en cada uno de ellos, el número del teorema correspondiente aparecerá como exponente del mayor factor primo del número, y ya está. Un ejemplo de conjunto que no es *RE* es el conjunto T_{AP} de números de Gödel de fórmulas de L_{AP} que no son teorema de *AP*.

El primer matemático en examinar la enumerabilidad recursiva fue Kleene en 1936 en un trabajo ahora clásico del tema. Después, en 1944 Post extendió los métodos de análisis de modo que para tratar con estos conjuntos no era necesario aludir al concepto de función calculable. Estos dos trabajos abrieron una nueva era de investigación en la lógica matemática cuyos efectos aun se sienten hoy en día en áreas como la teoría de los sistemas formales y la teoría matemática de la computación.

---

[43] Una fórmula *prenex* es una fórmula de la forma $Q_1x_1 \ldots Q_nx_nA$, donde cada Q_i es alguno de los cuantificadores $\forall$ o $\exists$ y A no tiene cuantificadores (a esta última se le llama *matriz* de la fórmula). Ya para los años veinte se sabía que toda fórmula en la lógica de predicados es equivalente a una fórmula prenex.

[44] Una segunda caracterización de esta noción es la siguiente: un conjunto A es recursivamente enumerable sii hay un predicado decidible $R(x, y)$ tal que $x \in A$ si y sólo si $\exists yR(x, y)$.

Post demostró que *todo conjunto recursivo es recursivamente enumerable*, pero que el recíproco no siempre sucede. Por ejemplo, el conjunto de números de Gödel de fórmulas demostrables en *AP* no es recursivo, aunque es *RE*. Este descubrimiento tuvo importantes consecuencias e indujo una jerarquía creciente de clases de conjuntos de números naturales: los conjuntos recursivos primitivos, los conjuntos recursivos y los conjuntos recursivamente enumerables. Post también demostró el siguiente teorema: *un conjunto de números naturales es recursivo si y sólo si él y su complemento son recursivamente enumerables*. La importancia de este resultado es que permitió establecer un puente entre el problema de la decisión y la enumerabilidad recursiva: *el problema de la decisión de un conjunto RE tiene solución recursiva si y sólo si su complemento es RE*. Como veremos, de aquí deriva la prueba de que el conjunto T_{AP} recién mencionado no es *RE*.

Dos ejemplos. Hasta aquí sólo hemos evocado algunos resultados básicos de la teoría de las funciones recursivas. Para finalizar esta sección queremos referir una aplicación al problema de la enumerabilidad recursiva y un refinamiento del primer teorema de incompletud de Gödel.

No enumerabilidad recursiva de K^c. Con base en el método de codificación de máquinas de Turing, Kleene mostró cómo codificar en los números naturales no sólo su estructura, sino la sucesión de operaciones que éstas realizan sobre una cinta predeterminada. Así, algunos números naturales z son una especie de "expediente" en el que se encuentra registrada la historia de todos los cálculos realizados por una máquina M desde que inició su operación en el estado q_0 hasta que se detuvo. Kleene llevó a cabo la codificación de modo tal que el predicado $T(e, k_1, k_2,..., k_n, z)$, que es verdadero cuando e es el código de una máquina M y z es el valor calculado por M teniendo como dato de entrada la expresión $\bar{k}_1\square\bar{k}_2\square...\square\bar{k}_n$, es recursivo primitivo. Ahora bien, en la sección titulada "problemas irresolubles" vimos que el conjunto $K = \{x \mid f_x(x)$ está definido$\}$ no es recursivo (la cuestión no es decidible). No obstante, K es recursivamente enumerable, pues $x \in K$ si y sólo si $\exists z T(x, x, z)$. Por tanto, concluimos que K^c no es *RE*, pues si lo fuera el problema de la decisión de K tendría solución recursiva.

Un refinamiento de los teoremas de Gödel. A lo largo del siglo XX los teoremas de Gödel fueron refinados, modificados y generalizados. Una versión especialmente elegante, debida a V. A. Uspenskii y dada a conocer en 1953, incorpora el concepto de *conjuntos no separables*, introducido por Kleene en 1950.

Sean X y Z dos conjunto de números naturales recursivamente enumerables y ajenos entre sí. Decimos que X y Z son *recursivamente separables*, si existe un conjunto

recursivo A tal que $X \subset A$ y $Z \subset A^c$. En el caso contrario decimos que X y Z no son recursivamente separables. Para asegurar la existencia de proposiciones indecidibles en AP y todas sus extensiones consistentes, Uspenskii demostró que los conjuntos $T_{AP} = \{x \mid x$ es el número de Gödel de un teorema de $AP\}$ y $R_{AP} = \{x \mid x$ es el número de Gödel de una fórmula refutable en $AP\}$[45] no son recursivamente separables, de donde se sigue que ninguna extensión consistente de AP puede ser completa.

En efecto, si hubiera tal extensión, digamos B, entonces $T_B \cup R_B$ sería igual al conjunto $\{x \mid x$ es el número de Gödel de un enunciado$\}$, y los conjuntos T_B y R_B serían recursivos. Por tanto, habría un conjunto recursivo A, a saber T_B, que separaría a T_{AP} y R_{AP}, lo cual contradiría el hecho de que estos conjuntos no son recursivamente separables. Por tanto, ninguna extensión consistente de AP es completa.

Asimismo, el sistema AP no es decidible, pues si lo fuera el conjunto T_{AP} sería recursivo y por tanto un separador de él y de R_{AP}. De este modo, la incompletud y la indecidibilidad de AP son una consecuencia del hecho de que T_{AP} y R_{AP} no son recursivamente separables.

§9 El décimo problema de Hilbert

En el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en 1900, Hilbert presentó una lista de 23 problemas cuya solución, pensaba, estimularía el avance de las matemáticas en el siglo XX. Algunos de estos problemas tenían que ver con la lógica y el fundamento de las matemáticas, y al respecto no se equivocó: ciertamente, fueron un poderoso estímulo para el desarrollo de esta disciplina.[46] El décimo de ellos se refiere a las ecuaciones diofánticas, y es el tema de esta sección.[47]

Una ecuación diofántica es simplemente una ecuación de la forma $p(x_1, ..., x_m) = 0$, donde $p(x_1, ..., x_m)$ es un polinomio con coeficientes enteros. Por ejemplo, $x^3 - 2xyz + 3 = 0$ es una ecuación de este tipo.

El problema en cuestión es el siguiente: dada una ecuación diofántica con cualquier número de incógnitas, *diseñar un proceso acorde con el cual se pueda determinar mediante un número finito de operaciones si la ecuación tiene soluciones enteras* (donde

[45] *Refutable*: que su negación es demostrable.
[46] Los dos primeros son: el relativo al problema del continuo de Cantor (hipótesis del continuo) que dio lugar a innumerables investigaciones en la teoría de conjuntos, y el relativo a la compatibilidad de los axiomas aritméticos, que estimuló el desarrollo de la teoría de la demostración y dio lugar a los teoremas de Gödel.
[47] Las ecuaciones se llaman *diofánticas* en honor a Diofanto de Alejandría, quien escribió un libro sobre el tema en siglo III de nuestra era.

por «*proceso*» debemos entender «*algoritmo*»). Algo esencial al problema es que las soluciones sean en números enteros, no aceptándose ni siquiera fracciones, ya no digamos números irracionales o imaginarios.

El problema fue ampliamente investigado en el siglo XX, y detrás de su solución se encuentra un gran número de matemáticos, entre los que podemos mencionar a Gödel, Turing, Church, Post, Kleene y, en la segunda mitad del siglo, a Martin Davis, Julia Robinson, Hilary Putnam y Yuri Matijacevic, quien finalmente lo resolvió en 1970.

La respuesta de Matijacevic es igualmente simple: *no existe tal algoritmo, el problema es indecidible*. Lo sorprendente de la solución es que ésta nos da una mejor comprensión de las propiedades de los números enteros.

Un algoritmo como el buscado por Hilbert tomaría como datos de entrada los coeficientes de una ecuación diofántica. Como respuesta, produciría un «1» si la ecuación tiene soluciones enteras y un «0» si no (1 = sí, 0 = no). En tal caso, y con apego a la tesis de Church, se podría construir una máquina de Turing M_H que decidiría la cuestión. [Lo que sí es posible es construir una máquina de Turing M que responde con un «1» cuando una ecuación diofántica tiene solución, pero que no se detiene cuando no la tiene. El dispositivo no es muy complicado: lo único que hace es verificar una tras otra todas las sucesiones $k_1, ..., k_m$ de números enteros hasta encontrar una que sea solución, en cuyo caso la máquina se detiene estando bajo inspección el primer símbolo de la expresión □$\bar{1}$□. Esto es posible gracias al método de numeración de Gödel. Sin embargo, cuando la ecuación no tiene solución, la búsqueda continúa indefinidamente, y la máquina jamás se detendrá. Por ejemplo, tal cosa sucedería con la ecuación $x^2 + 1 = 0$. No obstante, la existencia de esta máquina lo único que demuestra es que el conjunto de ecuaciones diofánticas que tienen al menos una solución entera es *RE*.]

En la solución del problema Matijacevic hizo intervenir al conjunto K de la sección anterior (*v*. el apartado sobre la *no enumerabilidad recursiva de* K^c). La relación de este conjunto con el problema que nos ocupa es simple: en 1970 Matijacevic demostró que *todo conjunto* RE *tiene una ecuación diofántica correspondiente*, es decir, demostró que si A es un conjunto *RE*, entonces existe un polinomio con coeficientes enteros $P_A(x, y_1, ..., y_m)$ tal que para todo n, $n \in A$ si y sólo si la ecuación $P_A(n, y_1, ..., y_m) = 0$ tiene una solución. Con base en este resultado pronto llegó a la conclusión de que no puede haber un algoritmo como el buscado por Hilbert, es decir que la máquina M_H no existe.

En efecto, consideremos el polinomio $P_K(x, y_1, ..., y_m)$ correspondiente al conjunto K. Si tal algoritmo (máquina) existiera, la pertenencia de un número n a K la podríamos

determinar viendo si la ecuación $P_K(n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ tiene un solución, y el conjunto K sería recursivo. Mas en la sección encabezada como "problemas irresolubles" vimos que K no es recursivo, de donde se sigue que el décimo problema de Hilbert es irresoluble.

§10 La teoría de modelos/2

Si bien los trabajos de Löwenheim, Skolem, Tarski, Gödel y Maltzev mencionados en los apartados §1, §2 y §6 fueron los primeros esfuerzos en la teoría de modelos, esta disciplina no se desarrolló como rama separada de la lógica matemática sino hasta después de la segunda guerra mundial, sobre todo a partir de los trabajos de Leon Henkin, Abraham Robinson y Tarski en los años cuarenta y cincuenta.

Grosso modo, la teoría de modelos se puede definir como la rama de la lógica matemática que se ocupa de la relación entre los lenguajes formales (esencialmente la lógica de predicados) y sus interpretaciones. En su aspecto interno, el trabajo en esta teoría se concentró durante la segunda mitad del siglo XX en el desarrollo de métodos para construir modelos, entre los que destacan el *método de las constantes* (que incluye al teorema de finitud), las *funciones de Skolem*, los *ultraproductos* y los *modelos especiales*. Si bien todos estos métodos son muy simples en sí, en la práctica se les supo combinar de manera sutil hasta alcanzar resultados nada triviales. A su vez, en su aspecto externo, la teoría se orientó hacia la obtención de resultados en distintas ramas de la matemática, especialmente en el álgebra y el análisis. En este sentido, un dominio de especial significación fue la teoría de conjuntos, donde la construcción de modelos fue la clave en la demostración de la consistencia y la independencia de la hipótesis de continuo y el axioma de elección por parte de Gödel y Paul J. Cohen, tema sobre el que nada habremos de añadir en virtud de que en este mismo número de *Miscelánea Matemática* hay un trabajo dedicado a él.

Para finalizar queremos llamar la atención sobre un ejemplo que ilustra muy bien los alcances de esta teoría. Se trata de un modelo descubierto por Abraham Robinson para la teoría de los números reales en el que, además de los números habituales, se cuenta con números infinitesimales. Estos números, ya presentes en la obra de Cavalieri, Newton, Leibniz y Euler, fueron eliminados en el siglo XIX en favor de la noción de límite a causa de las dificultades para describirlos o justificarlos. Con su trabajo, Robinson mostró que una teoría que sólo contemple números reales es tan consistente como una que además supone la existencia de otros números que, comparados con éstos, lucen infinitesimales.

Hay dos maneras de llegar a esta teoría. La primera consiste en llevar a cabo una construcción algebraica con base en un ultraproducto; la segunda, en una aplicación del teorema de finitud ya mencionado en la sección §2.

Cada modelo de la teoría de Robinson es un campo no arquimideano R^* que extiende de manera elemental al campo R de los números reales, en el sentido de que todos los enunciados de L_R (el lenguaje correspondiente a R en la lógica de predicados) verdaderos en R también son verdaderos en relación a R^* (ambos modelos realizan los mismos enunciados de L_R). No obstante, el campo R^* contiene, además de los números estándar R, elementos infinitamente pequeños, es decir, un subconjunto $I \subset R^*$ tal que $0 < i < 1/n$ para todo $n \in N$ (siendo el inverso i^{-1} de cada uno de estos números un elemento infinitamente grande). En este contexto se cuenta con un criterio de proximidad absoluto: dos números x e y son *próximos* entre sí cuando $x - y \in I$. Así, por ejemplo, es posible hacer un lado la teoría de límites y decir que una función es continua en x si $f(x + i) - f(x)$ es infinitesimal para cada número infinitesimal i, o entender la integral como una suma infinita. A su vez, la derivada de una función f en x es un número real d tal que la diferencia

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}-d$$

es infinitamente pequeña para cada infinitesimal i. De esta manera Robinson obtuvo una teoría enteramente rigurosa que produce los mismos resultados que el análisis clásico, y que tiene la ventaja de poder hacer uso de los números infinitesimales. Como prueba del alcance de la nueva teoría, él y otros demostraron diversos resultados que no se habían podido probar con los métodos tradicionales (básicamente la teoría de límites) en áreas como la topología y el análisis funcional. De este modo, los números infinitesimales fueron rescatados del descrédito en que habían caído.

Apéndice 19
Aritmetización de la sintaxis de *AB*

A. Representación decimal y cambios de base

Estamos tan habituados a la numeración decimal, que tendemos a identificar los números con su escritura en ella y a considerar cualquier otra representación como un disfraz. La posibilidad de usar otros sistemas de numeración (binaria, duodecimal, hexagesimal, etc.) tiene como base la siguiente propiedad de los números naturales:

> Sea b un número natural mayor que 1. Para cada número natural $N > 0$ hay una expansión de la forma
> $$N = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$
> en la que cada a_i es un entero no negativo menor que b y $a_n \neq 0$. Esta expansión es única en el sentido de que sólo hay una sucesión $a_n, \ldots, a_1, a_0$ que satisface la igualdad anterior.

La numeración posicional tiene como base esta propiedad. Al abreviar $a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$ como $a_n \ldots a_1 a_0$ se tiene la *representación* de N en base b. Esta representación no es sino un *criptograma* o forma reducida del polinomio a la izquierda, del cuál sólo recoge los coeficientes.[1] Al denotar los enteros no negativos menores que b mediante signos individuales (*dígitos*), tenemos la *escritura* del número N en base b. Ésta no es otra cosa que la sucesión $d_n \ldots d_1 d_0$ formada por los dígitos correspondientes a los números $a_n, \ldots, a_1, a_0$.

Por ejemplo, En notación decimal el número ciento veintitrés mil setecientos ochenta y nueve se escribe 123789. Esto se debe a que la expresión '123789' representa al polinomio $1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$ del que es una abreviatura. Este modo de representación requiere que los dígitos sean signos individuales. Cuando $b \leq 10$ se suelen utilizar los símbolos de costumbre (v.g., '0', '1', '2', '3', etc.), pero cuando $b > 10$ se requieren nuevos dígitos para los números comprendidos entre 9 y b, pues no se les puede escribir como de costumbre en la notación 10, 11, 12 etc. sin dar lugar a confusiones. Por ejemplo, ¿qué denotaría '13' en base 16? ¿$1 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0$ o $13 \cdot 16^0$? Como es evidente, este problema no atañe directamente a los números (no es un problema aritmético) sino a su representación simbólica. Se trata, pues, de un problema metalingüístico (meta_aritmético).

---

[1] Por criptograma se entiende precisamente esto: la escritura abreviada de algo, un documento cifrado.

Puesto que una misma expresión puede denotar números distintos en distintas bases, se suele indicar la base con un subíndice. Por ejemplo

$$(4301)_5 = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 576$$

$$(4301)_6 = 4 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 1 \cdot 6^0 = 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 973$$

Los casos en que se omite el subíndice es cuando el número se escribe en notación decimal o cuando la base es obvia por el contexto.

Cambios de base. El pasaje de cualquier otra base a la decimal se puede efectuar a través de un artificio que se conoce como división sintética. En la siguiente tabla lo aplicamos a la expresión 43015.

4	3	0	1	5
	20	115	575	
4	23	115	**576**	

En el primer renglón figuran los valores de los dígitos de la expresión '4301' y, en el recuadro, la base 5. El primer número de la línea superior, 4, se escribe en el tercer renglón y se multiplica por 5 (la base). El resultado 20 se escribe en la segunda línea y se suma con el número 3 arriba de él, escribiéndose el resultado 23 en el tercer renglón. Repitiendo el procedimiento, este último número se multiplica por 5 (la base) y el resultado 115 se escribe en la segunda línea, etc. la última expresión del tercer renglón, '576', es la escritura del número en base 10. Podemos aplicar este procedimiento a números escritos en cualquier base. Por ejemplo, la expresión '**5B3D1F**' es la escritura de un número en base 16. ¿Cuál es este número? Si recordamos que en base 16 los dígitos A, B, C, D, E, F representan, respectivamente, a los números que en notación decimal se escriben 10, 11, 12, 13, 14 y 15, la división sintética nos proporciona el siguiente resultado:

5	11	3	13	1	15	16
	80	1456	23344	373712	5979408	
5	91	1459	23357	373713	**5979423**	

$$\therefore (5B3D1F)_{16} = 5979423$$

El proceso de división sintética se puede invertir a fin de encontrar la escritura de un número en otra notación que la decimal. Por ejemplo, ¿cuál es la escritura de 586 en base 5? A la derecha invertimos el procedimiento de la división sintética y lo aplicamos a este número. La tabla se

residuo:	4	3	2	1	5
cociente:	0	4	23	117	
	4	23	117	586	

$$\therefore 586 = 4321_5$$

construye de *derecha* a *izquierda*. En el primer renglón se escribe en un recuadro la base 5 y en la tercera línea (comenzando por la derecha) el número 586. El primer número arriba de él, 117, es el cociente de dividir 586 por 5 y el segundo, 1, el residuo (i.e. $586 = 5 \cdot 117 + 1$). El cociente 117 se vuelve a escribir en el tercer renglón y se divide por 5. El cociente 23 y el residuo 2 que resultan de la división se escriben arriba de él, etc. El procedimiento se repite hasta alcanzar un cociente menor a 5. Como resultado aparece en el primer renglón la escritura del número en base 5. Cuando la base es mayor que diez, en ocasiones hay que convertir los residuos de la tercera línea en los dígitos correspondientes, como en el siguiente ejemplo en que se encuentra la escritura de 5979004 en base 16:

	5	**B**	**3**	**B**	**7**	**C**	
		↑		↑		↑	
residuo:	5	11	3	11	7	12	16
cociente:	0	5	91	1459	23355	373687	
	5	91	1459	23355	373687	**5979004**	

$$\therefore 5979004 = 5B3B7C_{16}$$

Dígitos y congruencias. Un problema de especial interés para nosotros es el siguiente: dado un número x, determinar si en su escritura en base b figura o no cierto dígito 'd'. Por ejemplo, ¿figura el dígito '4' en la representación del número 729 en base 5? Para contestar preguntas de esta clase vamos a formular un criterio que sólo toma en consideración las propiedades aritméticas de los números x, b y d.

Como hemos visto, la escritura de un número x en base b es una sucesión de dígitos '$d_n \ldots d_1 d_0$', llamada *numeral*, en la que cada uno de ellos representa alguno de los valores 0, 1, ... , b - 1. Esta sucesión se fija en forma única por la igualdad:

$$x = d_n \cdot b^n + \ldots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0$$

de la que es una abreviatura. Si escribimos x en la forma

$$x = b^k(d_n \cdot b^{n-k} + \ldots + d_{k+1} \cdot b^1 + d_k) + (d_{k-1} \cdot b^{k-1} + \ldots + d_1 \cdot b^1 + d_0), \quad 0 < k < n$$

podemos ver que los números entre paréntesis

$$d_n \cdot b^{n-k} + \ldots + d_k \cdot b + d_k \quad \text{y} \quad d_{k-1} \cdot b^{k-1} + \ldots + d_1 \cdot b_1 + d_0$$

son, respectivamente, el cociente y el residuo de dividir a x por b^k. Denotemos con $q(x, b^k)$ al primero de estos números y con $r(x, b^k)$ al segundo. Como

$$q(x, b^k) = b(d_n \cdot b^{n-k-1} + \ldots + d_{k+1}) + d_k$$

resulta que d_k es el residuo de dividir $q(x, b^k)$ por b. Tenemos con ello las siguientes equivalencias:

'd' es el k-ésimo dígito en la escritura de x en base b
$\Leftrightarrow d = d_k$
$\Leftrightarrow q(x, b^k) = b(d_n \cdot b^{n-k-1} + \ldots + d_{k+1}) + d$
$\Leftrightarrow q(x, b^k) - d = b(d_n \cdot b^{n-k-1} + \ldots + d_{k+1})$
$\Leftrightarrow b \mid q(x, b^k) - d$
$\Leftrightarrow q(x, b^k) \equiv d \pmod{b}$.

Proposición. 'd' es el k-ésimo dígito en la escritura del número x en base $b \Leftrightarrow q(x, b^k) \equiv d$ (mod b).

Corolario. '0' es el k-ésimo dígito en la escritura de x en base $b \Leftrightarrow b \mid q(x, b^k)$.

Hemos determinado las circunstancias bajo las cuales un dígito figura en la escritura de un número en una base dada. Tales circunstancias son enteramente aritméticas y no dependen de la representación del número en ella.

B. Aritmetización de la sintaxis del sistema *AB*

Veamos ahora cómo se puede expresar la metateoría de *AB* en la aritmética a través de su codificación. Para ello sustituyamos la letra *a* con el dígito 1 y la letra *b* con el dígito 2, de modo que cada fórmula de L_{AB} se convierte en un
Como hemos visto, con base en la codificación, podemos referirnos a los números de código en vez de a las fórmulas y sucesiones de fórmulas. V.g., dado que

$$g(a) = 1,\ \ g(ab) = 5,\ \ g('a,ab,aab') = 2606\ \ \text{y}\ g(aab)=14$$

podemos decir '*1 y 5 son axiomas*' o '*2606 es una prueba de longitud 3*'. Esto abre la posibilidad de expresar en lenguaje aritmético la metateoría del sistema. Para ello hay que traducir al lenguaje de la aritmética la descripción del sistema *AB*. En lo que sigue las expresiones de la forma $\mu x P(x)$

se leen '*la menor x tal que P(x)*' y los simbolos '=' y '≡' se usan en el sentido de '*igualdad por definición*' y '*equivalencia por definición*' respectivamente.

Conocidas las circunstancias bajo las cuales un dígito figura en la escritura de un número en una base dada, concentremos nuestra atención en el caso en que la base es 3 y definamos algunas funciones y operaciones relacionadas con el sistema *AB*.

D1 $L(0) = 1$; $L(sx) = \mu y(3 > sx)$.

$L(x)$ es el número de dígitos que hay en el numeral de x en base 3 (la *longitud* de x).

Por ejemplo, como $3^5 < 576$ y $3^6 > 576$, $L(576)=6$. Pero $576=100100_3$, de suerte que la escritura de 576 en base 3 consta precisamente de 6 símbolos. Cuando x es el código de una fórmula, $L(x)$ es su longitud.

D2 $dig(i, x) = r(q(x, 3), 3)$.

Cuando $0 < i < L(x)$, $dig(i, x)$ es el número correspondiente al dígito d_i de la escritura de x en base 3.

D3 $d(j, x) = dig(L(x) - j, x)$.

Cuando $1 < j < L(x)$, $d(j, x)$ es el valor del *j-ésimo dígito* en la escritura de x en base 3 contando de izquierda a derecha.

D4 $fmla(x) \equiv \forall i\ (1 < i < L(x) \Rightarrow d(i, x) \neq 0)$.

x es una *fórmula*.

D5 $x * z = x \cdot 3^{L(x)} + z$.

$x * z$ es el número cuya escritura en base 3 se obtiene al *eslabonar* los numerales en base 3 de x y z (en ese orden).

Por ejemplo, $25=221_3$, $75=2210_3$ y $L(75) = 4$, de modo que $25 * 75 = 25 \cdot 3^4 + 75 = 25 \cdot 81 + 75 = 2100$. Pero $2100 = 2212210_3$, de suerte que la escritura de 2100 en base 3 resulta de encadenar las expresiones '221' y '2210'.

D6 $x^{-1} = \sum_{i=1}^{L(x)} d(i, x) \cdot 3^{i-1}$

x^{-1} es el número cuyo numeral en base 3 se obtiene al escribir el numeral de x en orden *inverso*.

D7 $Ax(x) \equiv (x = 1 \text{ o } x = 5)$.
x es un *axioma* de *AB*.

La descripción aritmética del sistema *AB* es la siguiente:

Fórmulas: $F = \{x \mid fmla(x)\}$.

Axiomas: $A = \{1, 5\}$.

Reglas de inferencia: (C) de x e y se infiere $x * y$; (I) de x se infiere x^{-1}.

Derivaciones: una sucesión $a_1, \ldots, a_n$ es una *prueba* $\Leftrightarrow \forall i(1 < i < n \Rightarrow (Ax(a_i)$ o $\exists j(1 < j < i \;\&\; a_i = a_j^{-1})$ o $\exists j \exists k(1 < j, k < i \;\&\; a_i = a_j * a_k)$

Las siguientes definiciones precisan el concepto de sucesión de fórmulas y permiten caracterizar el concepto de prueba como una propiedad de los números, no como una propiedad de sucesiones de éstos.

D8 $s(x) \equiv d(1, x) \cdot d(L(x), x) \;\&\; \forall i(1 < i < L(x) \;\&\; d(i, x) = 0 \Rightarrow (d(i - 1, x) \cdot d(i + 1, x) \neq 0))$
x es una *sucesión de fórmulas* de *AB*.

D9 $term(x, y) \equiv sec(y) \;\&\; fmla(x) \;\&\; (x = y \text{ o } \exists z(y = z * 0 * x) \text{ o } \exists z(y = x * 0 * z) \text{ o } \exists z \exists w(y = z * 0 * x * 0 * w)$
x es un *término* de la sucesión y.

D10 $term\text{-}ant(z, x, w) \equiv \exists u \exists v(term(z, u) \;\&\; term(x, v) \;\&\; w = u * 0 * v)$
z es un *término anterior* a x en la sucesión w.

D11 $prueba(x) \equiv s(x) \;\&\; \forall y(term(y, x) \Rightarrow [Ax(y) \text{ o } \exists z(term\text{-}ant(z, y, x) \;\&\; y = z^{-1}) \text{ o } \exists z \exists w(term\text{-}ant(z, y, x) \;\&\; term\text{-}ant(w, y, x) \;\&\; y = z * w]$

La propiedad de ser una prueba se expresa así: x es una prueba $\Leftrightarrow prueba(x)$. Finalmente, la propiedad de ser un teorema se expresa, después de los comentarios que siguen al metateorema 14, como sigue:

$$x \text{ es un } teorema \Leftrightarrow fmla(x) \;\&\; \exists y \exists z(y, z < L(x)^{L(x)} \;\&\; prueba(y) \;\&\; y = z * 0 * x).$$
(hay una prueba de la que x es la última fórmula).

La descripción anterior sólo hace referencia a números enteros y no menciona ninguna entidad específica del sistema *AB*. Las nociones requeridas para su comprensión son aritméticas

(divisibilidad, congruencias, etc.) y cualquiera que las entienda podrá formarse una idea de la estructura del sistema.

Apéndice 20

Una prueba de consistencia para la aritmética de Peano (la prueba de Schütte)

La prueba de Schütte presupone cierta familiaridad con la aritmética ordinal de Cantor y la lógica matemática. Si el lector no se siente cómodo con su lectura, le recomendamos que le dé una ojeada superficial o la abandone por completo sin sentirse desesperanzado.

Grosso modo, el procedimiento seguido por Schütte es el siguiente. Supongamos que lo que se quiere es probar la consistencia del formalismo aritmético AP. Para tal fin Schütte construye un sistema de deducción natural AP^* con el mismo lenguaje que AP y las siguientes propiedades:

(1) Si una fórmula Φ es derivable en AP, también lo es en AP^*.

(2) Si Π es una derivación de una fórmula Φ en AP^*, entonces Π se puede reemplazar por una derivación Π' de Φ con la propiedad de que todas las fórmulas elementales que figuran en Π' también figuran Φ, con la posible substitución de términos constantes por variables (las fórmulas elementales son todas aquellas de la forma $s = t$ ó $\neg(s = t)$, donde s y t son términos cualesquiera).

Los axiomas de AP^* son las *fórmulas elementales cerradas* (sin variables) que son *correctas*, es decir, que al ser evaluadas conforme a las operaciones de suma, producto y sucesor dan lugar a un enunciado aritmético verdadero. Por ejemplo, $2 \cdot (2 + 3) = 10$ y $\neg(2 \cdot 3 = 5)$ son fórmulas elementales cerradas que, siendo verdaderas en tanto que enunciados aritméticos, son axiomas de AP^*; por el contrario, $1 + 1 = 0$ y $\neg(0 = 0)$ no son axiomas de AP^*, pues como enunciados aritméticos son falsas.

Una característica del sistema AP^* que lo distingue de AP, y en general de los sistemas formales considerados por Hilbert, es que incluye una singular regla de inferencia que admite una infinidad de premisas; a ésta se le llama *Regla de Inducción Infinita*. Las demostraciones basadas en ella son una extensión de la noción tradicional de demostración, en la que sólo se admite un número finito de premisas en cada paso. La regla se enuncia así:

$$\text{Del conjunto } \{A(k) \vee D \mid k \in N\} \text{ se infiere } \forall x A(x) \vee D \quad \text{(Ind. inf.)}$$

Con base en el teorema (2) es fácil demostrar la consistencia de AP^*. En efecto, si el sistema fuese inconsistente, la fórmula $\neg(0 = 0)$ sería un teorema. No obstante, esta fórmula sólo sería derivable de otras con la misma forma, por lo que los axiomas considerados en su derivación deberían ser iguales a ella, es decir, se debería tratar de un axioma, lo que no es el caso. En virtud

del teorema (1), la consistencia de *AP* es una consecuencia inmediata de la de *AP**, pues si *AP* fuera inconsistente la misma contradicción se podría derivar en *AP**.

Sin entrar en detalles, diremos que en la prueba del teorema (2) se recurre a la inducción transfinita, una forma generalizada de la inducción finita. La misma constituye un método de prueba aplicable a los números ordinales transfinitos de Cantor. Su uso se logra asignando un número ordinal α a cada fórmula perteneciente a una derivación *AP**; dada la forma en que se hace la asignación, en la demostración del metateorema (2) es necesario llevar a cabo una prueba por inducción que se extiende hasta un número ordinal que abarca todas las derivaciones posibles. Dicho número no es finito, sino el ordinal ε_0, el primer ordinal transfinito inaccesible por medio de las operaciones de suma, producto y exponenciación con ordinales menores que él.[1] Así, el recurso a la inducción transfinita es inevitable.

Seamos un poco más precisos. En la prueba del teorema (2) se considera inicialmente una derivación que no cumple con el enunciado del teorema, es decir, una derivación en la que se aplicaron reglas de inferencia en cuya conclusión ya no figuran algunas fórmulas presentes en las hipótesis. Se procede entonces a demostrar que el último paso en que se aplicó alguna de tales reglas se puede substituir con un derivación que no recurre a ellas (es decir, que en el "árbol" de la derivación se puede "podar" cada rama en que se han aplicado tales reglas e "injertar" en su lugar otra deducción en la que no se recurre a ninguna regla de tal naturaleza y que tiene la misma conclusión). Por el modo en que se asignan los números ordinales a las fórmulas de la derivación, este método de "poda e implantación" hace que el ordinal adscrito a la fórmula demostrada crezca exponencialmente con cada "injerto", es decir, que si a la fórmula inferida tiene asignado un ordinal α, después del implante su ordinal es 2^{α}.

Aunque a la luz de la matemática constructiva la inducción transfinita hasta ε_0 aún conserva un cierto valor, en el sentido de que comenzando con cualquier derivación Π por complicada que ésta sea, en sólo un número finito de aplicaciones del procedimiento se habrá llegado a la derivación Π' referida en el teorema (2), no podemos decir que esta peculiar aplicación de la inducción transfinita hará sentir más seguro a alguien que duda del principio de inducción finita: en este sentido, la prueba de consistencia de Schütte no tiene ningún valor epistemológico; más bien, su interés radica en que establece un vínculo entre fragmentos progresivos del principio de inducción y permite explorar el alcance de algunos métodos constructivos de demostración (esto en sentido laxo de la palabra) que a su vez podrían ser útiles al investigar el problema de la

---

[1] Formalmente, ε_0 se define como sigue: $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$, donde ω es el conjunto de los ordinales finitos, cuyos elementos podemos identificar con los números naturales.

consistencia del análisis o algunas de sus partes. En esta dirección ya hay algunos resultados en la teoría de la demostración, aunque, repetimos, a éstos no se les atribuye ningún valor como fundamento, sino como respuestas a problemas teóricos de interés general.